

JACOBI BERNOULLI, BASILEENSIS, OPERA.

Tomus Secundus.

GENEVÆ,

Sumptibus Hæredum CRAMER & Fratrum PHILIBERT.

M. DCC. XLIV.

Ante N. LXVII. Pag. 665.

N°. LXVII.

NOTÆ
ET
ANIMADVERSIONES TUMULTUARIÆ
In Geometriam *CARTESII.*

Editæ primum

Ad calcem Editionis Francofurtensis

Anno

1695.

NOTÆ
ET
ANIMADVERSIONES
TUMULTUARIÆ
In Geometriam *CARTESII.*

Num. LXVII.

IN LIBRUM I.

NOTA I.

Quomodo ad æquationes perveniendum ſit, quæ reſolvendis Problematis inſerviunt; de incog-

Num. LXVII.

incognitarum delectu, & de ordine in analysi tenendo.

Pag. 3, ad literam *G*, & pag. 84, ad lit. R.

PRIMUM, quod in resolutione alicujus Problematis faciendum præcipit Auctor noster, concernit quantitatum nomenclationem, in eo consistentem, ut lineæ omnes, quæ ad constructionem ejus necessariæ videbuntur, tam cognitæ quam incognitæ, literis quibusdam Alphabeti designentur. Et ne hoc promiscue fiat, adjicit in posteriori loco, delectu quandoque opus esse circa incognitas; cum plurimi sæpe referat, quænam accipiantur pro incognitis, ut operatio, quantum fieri potest, brevis atque facilis reddatur. Ubi Tyrones sequentia moneri operæ pretium ducimus: Primo, si inter quantitates cognitas nonnullæ sint, quæ a se mutuo dependeant, seu quarum una per alteram determinetur; tum licebit quidem initio operationis cuique peculiarem literam tribuere, at postmodum in calculi progressu, aut fine, literæ istæ varie invicem permutandæ sunt, nunc earum valores substituendo, nunc restituendo literas; prout animadvertimus, hoc vel illo modo quantitatum terminos abbreviatum iri. Deinde conducit nonnunquam expendere, non tantum qualis quantitas pro incognita accipienda sit, sed etiam quis præcipue ordo sit tenendus in analysi, ut quæsitum quam facillime obtineamus: sæpe enim eadem retenta quantitate incognita, una quam alia via incedendo operatio expeditior evadit. Utrumque facili aliquo exemplo declarabimus.

PROBLEMA.

Fig. 1.

In semicirculo BMN, datis duorum arcuum BC & CE, sigillatim quadrante minorum, sinubus rectis CD & EF, quæritur sinus arcus compositi ex ipsis, nempe recta EG.

ANALY-

ANALYSIS.

Num. LXVII.

Ad hanc indagandam, ſunto Sinus totus AC $= a$, CD $= b$, EF $= c$, & EG $= z$; & quoniam prævideo neceſſarios quoque fore ſinus complementorum AD, AF & AG, voco inſuper AD, d; AF, e; & AG, y. Unde, cum ob æquales angulos ACD, AHG & FHE, triangula rectangula ADC, AGH & EFH ſint ſimilia; adeoque AD [d] ad DC [b] ut AG [y] ad GH, nec non AD [d] ad AC [a] ut EF [c] ad EH, reperiuntur GH $= by : d$, & EH $= ac : d$, ac proinde ſumma vel differentia utriuſque, hoc eſt, quæſita EG, ſive z, $= (ac \pm by) : d$, nempe $(ac + by) : d$ in ſiniſtro, & $(ac - by) : d$ in dextro quadrante. Jam quoniam ſinus complementorum AD, AF, & AG, ſeu d, e, & y, per ſinus rectos CD, EF, & EG, ſeu b, c, & z, ita determinantur, ut ſit $d = \sqrt{(aa - bb)}$, $e = \sqrt{(aa - cc)}$, & $y = \sqrt{(aa - zz)}$; hinc varie utor his valoribus ad quæſitum in terminis ſimpliciſſimis eliciendum: Primo ex æquatione tollo y, ut fiat $z = (ac \pm b\sqrt{(aa - zz)}) : d$ ſive $dz - ac = \pm b\sqrt{(aa - zz)}$, & eorum quadrata $ddzz - 2acdz + aacc = aabb - bbzz$, factaque convenienti tranſpoſitione $bbzz + ddzz - 2acdz = aabb - aacc$. Deinde ad contrahendam æquationem ſubſtituo aa loco $bb + dd$, fietque $aazz - 2acdz = aabb - aacc$; ubi quia addita utrobique $ccdd$, prior pars æquationis $aazz - 2acdz + ccdd = aabb - aacc + ccdd$, fit quadratum, extraho utrinque radicem, ut habeatur æquatio $az - cd = \sqrt{(aabb - aacc + ccdd)}$ ſive $z = (cd + \sqrt{(aabb - aacc + ccdd)}) : a$; ad quam porro abbreviandam pro $aa - dd$ pono bb, & reſultat $z = (cd + \sqrt{(aabb - bbcc)}) : a$, iterumque ee loco $aa - cc$; ſic tandem fiet $z = (cd + \sqrt{bbee}) : a = (cd + be) : a$, quæ ſimpliciſſima eſt expreſſio valoris z, quo indicatur ſinum quæſitum arcus compoſiti haberi, ſi aggregatum rectangulorum ſub ſinubus rectis datorum arcuum & ſinubus alternorum complementorum per ſinum totum dividatur.

Ut vero etiam conſtet alterum, quando diximus quod, eadem

 quan-

Num. LXVII. quantitate incognita retenta, sæpe præstet hoc quam illo modo solutionem aggredi; observandum est, æquationem nostram immediate absque substitutione vel reductione prævia ad hos terminos perduci posse, si quæsitum sinum EG, non per partes EH, HG, sed per ipsas EL, LG investigemus, faciendo ut AC ad CD, seu a ad b, sic AF, seu e, ad FK, sive LG, quæ propterea erit $be:a$; iterumque ob similitud. Triang. ACD & FEL [utpote quorum utrumque Triangulo FHL simile est] ut AC ad AD, sive a ad d, sic FE, seu c, ad EL, quæ proinde fit $cd:a$; hinc enim statim habetur tota $EG = (cd + be):a$, ut antea. Ubi notare convenit, quod si vicissim ex datis sinubus EG, CD, inveniendus sit sinus differentiæ arcuum EF, compendiosior futura sit operatio, qua quæruntur partes GH, HE, quam qua partes GL & LE. Uterque autem modus ostendit, quæsitum sinum EF haberi, si differentia rectangulorum sub sinibus rectis datorum arcuum & sinubus alternorum complementorum per sinum totum dividatur.

NOTA II.

Non semper necesse est ad constructionem, omnes Problematis æquationes indeterminatas ad unam determinatam reducere; sed præstat quandoque Problema conficere per Loca quæ suppeditant indeterminatæ æquationes.

Pag. 4. ad lit. H, & pag. 150. seqq. CUM in Problemate aliquo determinato plures suppositæ fuerunt literæ incognitæ, totidemque repertæ æquationes, solet Auctor, priusquam ad ejus constructionem accedat, has æquationes varie tractando, ac inter sese comparando, eo reducere, ut tandem una tantum in æquatione litera incognita remaneat, & sic ex omnibus æquationibus indeterminatis una determinata resultet: quod

quod deinde Commentator ejus SCHOOTENIUS p. 150, exemplo cujusdam Problematis illustrat; ubi postquam ad duas æquationes indeterminatas $aa + xx + yy = 2dy$, & $aac - cxx - cyy = 2aby$ pervenisset, exinde tertiam determinatam $y = aac : (ab + cd)$ elicit, ac tum demum Problematis constructionem molitur. Ad quæ notare convenit, quod communiter quidem hoc sit optimum, ubi tertia hæc æquatio non multo magis est composita, quam duæ reliquæ; ut in allato exemplo contingere videmus: nam si animadverterem fore, ut ex reductione indeterminatarum emergeret aliqua valde composita & constructu difficilis; satius tum esset statim subsistere in indeterminatis, & Problema conficere per *Loca*, construendo unumquemque Locum, seu æquationem indeterminatam, seorsim, ut per mutuas utriusque intersectiones postmodum quæsitum obtineatur; præsertim cum ejusmodi constructiones ab ipsa quasi natura subministratæ videantur, & casuum varietatem, possibilitatem, limites, totamque indolem Problematis multo melius ob oculos ponant, quam illæ, quæ Auctoris methodo ex tertia demum æquatione longis ambagibus & insuperabili sæpe labore eliciendæ forent, quæque propterea coactæ potius & minus naturales jure merito censendæ; ut maxime & ipsæ proprie non aliter nisi per *Loca*, id est, per descriptionem duarum Linearum absolvantur. Num. LXVII.

His explicandis idoneum nobis exemplum suppeditat Problema illustre de quadrisecando Triangulo Scaleno per duas normales rectas, cujus analysis, quam hic brevitatis studio omittimus, inserta legitur *Actis Erudit. Lipſ.* m. Novemb. 1687 *. Apparet, hoc Problema duas conditiones includere, quarum una requirit, ut rectæ bisecantes Triangulum illud una quadrisecent; altera, ut bisecantes rectæ ad angulos rectos se decussent; quarum unaquæque, seorsim & abstracte ab altera spectata, Problema indeterminatum relinquit, peculiaremque æquationem subministrat, duas complectentem incognitas litteras x & y, quæ pro denotandis

* Supra N°. XXIX. pag. 328.

Num. LXVII. ſegmentis lateris duas quadriſecantium extremitates recipientis aſſumendæ fuerunt. Prior Æquatio, quæ quadriſectioni reſpondet, hæc eſt: $yy - 4ay + 4xy + \frac{5}{2}aa - 4ax + xx = 0$. Poſterior, quæ anguli qualitatem reſpicit, iſta: $4xxyy \pm 2aeyy \pm 2afxx \pm aaef = aadd$. ex quarum mutua collatione oritur tertia æquatio determinata octo dimenſionum, pluriumque membrorum; cujus conſtructionem ſi quis Auctoris methodo inveſtigandam ſuſciperet, non tantum per ſuperfluas & non naturales ambages incederet, ſed & opus immenſi fortaſſe laboris aggrederetur: cum contra facilis & expedita pateat via quæſitum conſequendi, abſque tertiæ æquationis ope, per ſolam conſtructionem Locorum jam repertorum, & quæ ipſa Problematis natura ad id negotii ſponte ſuggeſſiſſe videtur. Conſtat autem ex iis, quæ Auctor lib. 2 exponit, æquationem priorem denotare Locum ad hyperbolam; alteram ad curvam quandam tertii generis, ſeu ſectionibus conicis duobus gradibus altiorem; quarum deſcriptiones ita habent:

Fig. 2. *Conſtruct. Æquat. prioris.* Erecto ſuper baſe Trianguli cujuſvis AC quadrato ACXY, ductiſque diagoniis AX, CY, ſeſe decuſſantibus in S, triſecetur CS in T & V, centroque V, ac vertice T ad axem CT Hyperbola deſcribatur mTn, cujus tranſverſum latus ſit TS, & rectum ejus triplum CY. Dico, ſi ei intra quadratum applicetur quævis recta RF [rf] baſi CA perpendicularis, & huic ex parte A æqualis abſcindatur AD (Ad), puncta D & F (d & f) futura talia, ut ex illis duæ rectæ inflecti poſſint, quæ Triangulum propoſitum quadriſecent [quamvis ſubinde ad alios & alios angulos]; adeoque hyperbolam deſcriptam fore Locum prioris æquationis, quæ quadriſectionem reſpicit: $yy - 4ay + 4xy + \frac{5}{2}aa - 4ax + xx = 0$. Ad quod demonſtrandum, per punctum Hyperbolæ R agantur rectæ RZ, RP, parallelæ oppoſitis quadrati lateribus, & ſecantes diagonalem CY in L & l; nec non Rs perpendicularis diagonio CY; & per punctum V recta VI parallela lateri CX, ſecans ductam RZ in Q, baſin CA in t, & hyperbolam productam infra baſin in I: ponaturque AC $= a$, Rs $= p$, Vs $= q$, CD, hoc eſt PR, ſeu pL,

pL, aut pY $= x$, & AF, ſeu PY, vel Pl $= y$; adeoque LY $= x\sqrt{2}$, & lY $= y\sqrt{2}$. Quo facto erit ex natura hyperbolæ, rectangulum SsT ſeu Ss in sT, hoc eſt, $(q + \frac{1}{6}a\sqrt{2})$ in $(q - \frac{1}{6}a\sqrt{2})$, ſeu $qq - \frac{1}{18}aa$, ad quadr. Rs, ſeu pp, ſicut TS ad CY ſeu 1 ad 3; adeoque, multiplicatis extremis & mediis, $pp = 3qq - \frac{1}{6}aa$. Porro, quoniam Ll biſecta eſt in s per rectam Rs, propter angulos ad s rectos, & ſemirectos ad L & l, ac proinde Ls $=$ sR $=$ sl, fiet sY, ceu ſemiſſis ſummæ rectarum LY & lY $= \frac{1}{2}(x+y)\sqrt{2}$, demtaque VY $= \frac{2}{3}a\sqrt{2}$ [ob CY $= a\sqrt{2}$] habebitur sV ſeu $q = \frac{1}{2}(x+y)\sqrt{2} - \frac{2}{3}a\sqrt{2}$: ſimiliterque reperietur Rs vel $p = \frac{1}{2}$Ll, ſive ſemiſſi differentiæ inter LY & lY $= \frac{1}{2}(x-y)\sqrt{2}$; qui valores literarum p & q, ſi in æquatione $pp = 3qq - \frac{1}{6}aa$ ſubſtituantur, dabunt æquationem: $yy - 4ay + 4xy + \frac{5}{2}aa - 4ax + xx = 0$, quæ prorſus convenit cum propoſita, quam proin rite conſtructam eſſe conſtat. Addimus obiter: ſi ex juncta & producta Tt abſcindatur Ti $=$ VI, erit juncta Vi hyperbolæ hujus aſymptotos. Num. LXVII.

Conſtr. Æquat. poſter. Demiſſa ex vertice Trianguli perpendiculari BK, & biſecta baſe AC in M, aſſumtoque in eadem puncto utcunque F ad partes ipſius C, abſcindatur ad eaſdem partes recta AN tertia proportionalis ad AM & AF, ad oppoſitas vero ipſa KO tertia proportionalis ad KN & BK; ut & CD media proportionalis inter CM & CO: quo facto, ſi baſi in puncto F normaliter applicetur recta FR $=$ AD, erit punctum R ad curvam optatam gRh, reſpondentem alteri æquationi, quæ anguli conditionem implet: $4xxyy \pm 2aeyy \pm 2afxx \pm aaef = aadd$; id eſt, erunt puncta D & F talia, ut per illa ductæ rectæ biſecantes Triangulum DE, FG, ſeſe mutuo in H ad angulos rectos interſecent. Quod ſic patet: Aſſumtis, præter ſupra memoratas quantitates, perpendiculari BK $= d$, ſegmento CK $= e$, & ſegm. AK $= f$ (plane ut in analyſi Problem. loc. cit. *Act. Lipſ.* * factum fuit) habetur per conſtr. AN $= 2yy : a$, & KO $=$ Fig. 3. 4. & 5.
$dd:$

* Supra pag. 330. 331.

Num. LXVII. $dd:(2yy:a\pm f)$; adeoque $CO = dd:(2yy:a\pm f)\pm e$ [variantibus sc. signis, prout perpendicularis intra vel extra Triangulum, & ad hanc illamve partem basis cadit]: unde cum CM sit $\frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a$ in $dd:(2yy:a\pm f)\pm e =$ rect. MCO = [per const.] CD^2 [seu PR^2 in fig. 2] $= xx$; factaque reductione $4xxyy \pm 2aeyy \pm 2afxx \pm aaef = aadd$. Quod erat ostendendum.

Fig. 6. Eadem constructio non ineleganter sic variabitur: Ductis rectis αx, $\delta\varphi$, ad angulos rectos sese decussantibus in β, abscindantur in iis rectæ βx & $\beta\varphi$, quarum illa sit media proportionalis inter CM & CK, hæc inter AM & AK; factoque rectangulo $\alpha\beta\gamma\delta$ = Triangulo dato ABC, jungantur rectæ δx & $\alpha\varphi$; vel assumta harum alterutra ad lubitum, mediante rectangulo reperiatur altera, [nota, quod in fig. 4. recta βx semicirculo super $\beta\delta$, & in 5ª $\beta\varphi$ semicirculo super $\beta\alpha$ descripto applicanda est; cætera vero peragenda, ut dictum;] quo facto, junctæ rectæ δx, $\alpha\varphi$, statim denotabunt ipsas x & y, abscindendas in base Trianguli pro quæsitis CD & AF, vel pro YZ & ZR in fig. 2, ad habendum punctum R quæsitæ Curvæ gRh. Et sic tot alia puncta hujus Curvæ reperiri possunt, quot alia rectangula dato triangulo sigillatim æqualia super rectis indefinitis $\alpha\beta$, $\beta\delta$ constituta fuerint; quæ rectangula omnia una opera determinantur, si per punctum γ inter Asymptotos $\beta\alpha$ & $\beta\delta$ describatur hyperbola $\epsilon\gamma\zeta$, ut ex natura hujus curvæ constat. DEM. Cum enim per constr. βx sit $= \sqrt{\frac{1}{2}ae}$, & $\beta\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}af}$, ponanturque $x\delta = x$, & $\varphi\alpha = y$; erit $\beta\delta = \sqrt{xx \pm \frac{1}{2}ae}$, & $\beta\alpha = \sqrt{yy \pm \frac{1}{2}af}$, adeoque rectang. $\alpha\delta$, id est, per constr. Triang. ABC, sive $\frac{1}{2}ad = \sqrt{((xx\pm\frac{1}{2}ae)\times(yy\pm\frac{1}{2}af))}$; qua reducta habetur $4xxyy \pm 2aeyy \pm 2afxx \pm aaef = aadd$, eadem æquatio cum illa, quæ construenda proponebatur.

Postquam sic ambæ curvæ mRn & gRh, quæ ambabus æquationibus indeterminatis singulæ singulis respondent, descriptæ & eidem figuræ adaptatæ fuerint, manifestum est, punctum ipsarum commune R, in quo se mutuo intersecant, utrique simul satisfacturum esse, ipsumque adeo Problema per illud penitus deter-

determinatum iri. Quocirca, demissa ex hoc puncto in basin trianguli perpendiculari RF, si huic æqualis abscindatur AD, erunt puncta D & F talia, ut si per illa ducantur rectæ DE, FG, triangulum datum seorsim bisecantes [quod quomodo fiat, in vulgus notum est] illud simul & quadrisecent, & se mutuo ad angulos rectos secent. Quod initio faciendum proponebatur. Num. LXVII.

Quod si Curvæ intra angulum rectum gCh nullibi se mutuo secuerint, nullam quoque illo casu Problema solutionem admittet: sic ut hinc totam Problematis naturam, possibilitatem, limites, determinationes, & casuum varietates, uno quasi obtutu perspicere liceat; quod ex alia constructione methodo Auctoris investigata difficulter cognosceretur. *

NOTA III.

De Ordinibus Curvarum æstimandis.

Auctor subinde confundere videtur duplicem Curvarum respectum, juxta quem considerari possunt Curvæ, quatenus vel *per ipsas alia*, vel *per alias ipsa* construuntur; unde non satis sibi constat in distinguendis per certa genera Curvis, illasque quas modo ad diversa Linearum genera retulit [quod diversorum graduum æquationes *per ipsas* possent construi], mox iterum sub eodem gradu complectitur, quoniam ipsas vicissim *per eandem* construi posse animadvertebat. Quod ex pag. 11, sic ostenditur: Cum quæstio PAPPI in 12 lineis est proposita, pervenitur ad æquationem sex dimensionum; & cum in lineis 16, ad æquationem dimensionum octo, monente Auctore p. 25. Sed æquationes sex dimensionum ab ipso construuntur ope Curvæ, quæ ad Cubum adscendit, lib. 3^{tio} p. 97, pariterque æquationes octo dimensionum possunt construi per aliam, quæ assurgit ad Quadrato-quadratum. Quare cum ad construendum Problema in 16 Pag. 11. §. *Primo autem*, & pag. 24. §. *Caeterum.*

* Vide infra Notam XIII.

Num. LXVII. 16 lineis, Auctor requirat, pag. 11, Curvam *uno gradu* altiorem illa, qua construitur in lineis tantum 12, omnino colligendum videtur, quod illi propositum fuerit Curvas Cubicas & Quadrato-quadraticas ad duo diversa Linearum genera vel duos differentes gradus referre. Quemadmodum etiam concludi potest ex eo, quod habetur pag. 23, §. *Quod si*, ubi curvam EC, quæ per intersectionem Regulæ GL, & Lineæ CNK describitur, perpetuo diversi ab hac generis esse innuit, cum tamen ex calculo facile appareat, æquationem Curvæ EC nunquam plus una dimensione superaturam æquationem Curvæ CNK; adeo ut & hinc sequatur, Curvas ex. gr. trium & Curvas quatuor dimensionum ad duo diversa Linearum genera referendas esse. Et tamen ipsemet Curvas istas in paragr. statim subsequentibus non obscure, imo libro 2°, p. 21 & 24, alibique disertis verbis sub eodem gradu complectitur; sicut etiam illas Curvas, quæ ad Surde-solidum & Quadrato-cubum adscendunt, promiscue eidem Curvarum generi includit.

Ut itaque in re dubia certi quippiam statuatur, consultum fuerit Curvas ita distinguere, ut ipsarum gradus æstimentur ex numero dimensionum, ad quas ascendunt æquationes ipsarum naturam exprimentes; quo pacto Conchoidem Veterum Sectionibus conicis, non uno tantum, ut facit Dnus DES-CARTES p. 24, sed duobus gradibus altiorem constituimus, propter quatuor dimensiones, quas hujus Curvæ æquatio acquirit, ut ex *Commentario* apparet pag. 250. Nec ut aliter statuamus, persuadere nobis potest ratio ab Auctore allata pag. 24, dum regulam dari asserit, qua ad Cubum reducantur omnes difficultates, quæ adscendunt ad Quadrato-quadratum, & ad Surde-solidum omnes illæ quæ adscendunt ad Quadrato-cubum; alludens procul dubio ad id, quod lib. 3°. pag. 79, ostendit, ubi æquationem biquadratam in duas quadratas resolvere docet, quarum secundi termini per æquationem cubicam inveniantur. Etenim si mens Auctoris hæc sit [nec liquet quæ alia esse possit] Curvas quatuor dimensionum Curvis trium propterea non esse dicendas magis compositas, quod illæ possint construi inveniendo tantum radi-

radicem alicujus æquationis trium dimenſionum; ſequetur, quod Curvæ etiam quam maxime compoſitæ ſæpenumero ejuſdem generis habendæ cum ſimpliciſſimis; quotieſcunque enim quantitatum indeterminatarum altera unam tantum duaſve in æquatione dimenſiones obtinet, ſumpta ad lubitum altera, quæ plurium dimenſionum fuerit, poſſunt Curvæ puncta per ſolam regulam & circinum inveniri; adeo ut ſi conſtructionis ſimplicitas attenderetur, ejuſmodi Linea cum primi gradus Curvis connumeranda foret. Deinde notandum eſt, per accidens tantum fieri, ut Æquatio Biquadrata, p. 79, ad una dimenſione minorem, ſive Cubicam, reducatur, nec propterea in Quadrato-cubica, ut Auctor exiſtimat, pariter procedere debere; utpote quam eo ſenſu non ad Surde-ſolidam, ſed ad Æquationem 15 aut 10 dimenſionum perduxit HUDDENIUS lib. 1. de Red. Æquat. p. 488 & 489. Num. LXVII.

NOTA IV.

De infimi Ordinis curvis, per quas æquatio data poteſt conſtrui.

QUoniam Auctor in omnibus ſuis conſtructionibus Circulum adhibuit, qui Locus eſt duarum tantum dimenſionum; hinc factum, ut per Curvas cujuſque gradus conſtruere potuerit duntaxat æquationes duplo plurium dimenſionum, quam ſunt illæ, quibus earundem Curvarum natura exprimitur. Cum tamen oſtenſu perfacile ſit, quod cujuſlibet generis Curvæ aptæ ſunt ad conſtruendas æquationes tot dimenſionum, quot indigitat quadratum numeri dimenſionum, ad quas adſcendunt æquationes curvarum illarum naturam exprimentes. Ita per Curvas trium dimenſionum conſtrui poſſunt non ſolum æquationes bis trium, ſeu ſex, ſed ter trium, ſeu 9 dimenſionum; quales Auctori non poſſent conſtrui niſi ope Curvæ 5 dimenſionum, ut ex locis alleg. colligitur. Etenim ſi proponantur duæ æquationes indetermina-

Pag. 11. §. eod. ſub finem, ad verba, *Excepto in* 13. & pag. 106.

Num. LXVII. tæ, puta $aay = x^3$, & $y^3 = bbx + c^3$; in quarum una y sit unius tantum & x trium dimensionum, in altera vero & y dimensionum totidem; atque valor ipsius y juxta priorem æquationem inventus substituatur in altera, manifestum, quod resultans æquatio $x^9 = a^6 bbx + a^6 c^3$, futura sit ter trium seu novem dimensionum, quæ per consequens mediantibus duabus Curvis, quibus duæ illæ indeterminatæ æquationes 3 dimens. respondent, construi poterit; adeo ut si peccatum sit censendum in Geometria [quod alicubi appellat Auctor] ad ejus constructionem Curvam magis compositam adhibere, ipsemet ab ejus labe haudquaquam immunis pronunciari possit, [de quibus fusius in *Act. Lips.* 1688, m. Jun. p. 329 *]. Id vitii jam olim animadverterat præclarus Geometra Gallus FERMATIUS, & post ipsum HIRIUS in Tractatu *de Constructionibus Æquationum*, ubi nobiscum agnoscit quod per Curvas trium dimensionum æquationes ad 9 usque dimensiones construantur, in eo tamen non minus culpandus, quod pro æquationibus altioribus, propriæ suæ in Dnum. DES-CARTES strictura velut oblitus, etiamnum ipse Curvas justo altiores adhibet, & verbi gr. pro construenda æquatione dimensionum 16, quæ juxta Regulam nostram ope duarum Curvarum 4 dimensionum construitur, Curvam 5 dimensionum requirit; quod equidem propterea facere coactus fuit, quia pro Curvarum altera perpetuo talem selegit, quæ æquatione *duobus tantum terminis* constante exprimitur [quemadmodum Dno. DES-CARTES erroris ansa fuit, quod pro illa Curvam *duarum tantum dimensionum*, sive Circulum adhibuit.] Nam si pro utraque tales assumantur Curvæ, quæ æquationibus exprimuntur ejusdem quidem gradus, at plurium, vel, si opus sit, omnium terminorum, nil obstare video, quo minus per illas æquatio proposita, etiamsi completa fuerit, construi possit: quoniam duæ ejusmodi æquationes locales plures simul differentes terminos complectuntur, ut facile ostendi potest, quam æquatio proposita determinata comprehendit; adeoque omnes quantitates cogni-

* Supra N°. XXXI. pag. 343.

cognitas, quæ in propoſita occurrunt, includere poſſunt. Sic duæ æquationes locales completæ decem dimenſionum plures ſimul continent differentes terminos, quam æquatio determinata & completa 100 dimenſionum continet; quod ſufficit ad oſtendendum, conſtructionem æquationis completæ 100 dimenſionum per duas 10 dimenſionum non eſſe impoſſibilem. Differentes autem voco terminos æquationum localium, in quibus altera vel utraque indeterminatarum literarum x & y diverſum numerum dimenſionum habet, ut $axyy$, bxy^3, $cxxyy$, qui tres differentes termini ſunt. Num. LXVII.

IN LIBRUM II.

NOTA V.

Curvæ tranſcendentales a Geometria non ſunt excludendæ.

SPiralis, Quadratrix, Cyclois, aliæque ejuſmodi Curvæ, quæ non ſunt algebraicæ, hoc eſt, nullis æquationibus algebraicis certi & definiti gradus poſſunt exprimi, ſed omnes æquationum gradus quaſi tranſcendunt, *tranſcendentales* inde appellatæ, ab Auctore noſtro in ſua Geometria non potuerunt non negligi, quoniam earum tractatio hujus regulis haudquaquam ſubjacet, ſed reconditioris cujuſdam Geometriæ fundamentis innixa eſt. Idem tamen interim jure vapulat Cel. Geometræ LEIBNITIO, quod Curvas iſtas propterea e cenſu geometricarum Linearum eliminaverit; cum non tantum plurimas magni momenti proprietates poſſideant, nullatenus cedentes iis, quibus cæteræ gaudent, ſed eas etiam vere geometricas exacteque demonſtrabiles. Cui non obſtat, quod motus quibus deſcribuntur, nullam inter ſe relationem habeant, quæ exacte menſurari poſſit; quandoquidem ob hanc rationem potius ex Mechanica repudiandæ forent,

Pag. 18. lin. 7. a fine. *Verum enim vero*, & Pag. 38. §. *Ac proinde.*

 quæ

Num. LXVII. quæ describendis seu construendis magnitudinibus occupatur, quam ex Geometria, quæ jam positarum & descriptarum affectionibus demonstrandis potissimum insumitur. Ut ipse alias, initio Lib. 2[di], contra Veteres argumentatus est Auctor, qui plerasque etiam algebraicas e Geometria exclusas voluerunt.

NOTA VI.

Error CARTESII *arbitrantis curvarum & rectarum linearum rationem nullo modo posse cognosci.*

Pag. 30. §. *Quemadmodum.* POpularis fuit antehac Geometrarum error, existimantium recti & curvi tam disparem esse naturam, ut ratio unius ad alterum ab hominibus nullo modo cognosci aut comprehendi valeat. Quibus hic assentire videtur sagacissimus Auctor noster, mutaturus haud dubie sententiam, si paucis annis fato suo supervixisset. Paulo enim post ejus obitum HEURATIUS *Batavus*, (quanquam primæ inventionis gloriam NELIO suo tribuant *Angli*) Curvæ æqualem rectam assignavit, edita anno 1659 ad SCHOOTENIUM Epistola, quæ ad calcem I[æ]. Part. hujus *Geometriæ* adjecta legitur. Ab illo vero tempore infinitæ aliæ diversorum generum Curvæ, modernorum industria, rectificationem nactæ sunt.

NOTA VII.

Methodus Tangentium CARTESII *promota.*

Pag. 40. §. K. Pag. 244 & Pag. 262 seq. MEthodus hæc, qua Auctor ad inveniendas Curvarum datarum perpendiculares seu tangentes, SCHOOTENIUS etiam ad *Maximi* & *Minimi* determinationem utitur, (quæque in eo consistit, ut duæ radices æquales in æquatione concipiantur,) ad

ad plura quoque alia Problemata, si dextre tractetur, adhiberi poterit, ad quæ alias Geometriam hanc haud facile extendi posse quis existimet. Et ne repetamus ea, quæ passim in *Actis Lipf.* m. Jan. & Mart. 1692 *, m. Jun. 1693, † & m. Octob. 1694 ‡, hanc in rem publicata prostant; lubet tantum uno alterove exemplo ostendere, quo pacto nonnunquam eadem methodo ex data tangentium, non modo rectarum, sed etiam curvarum conditione, ipsa vicissim proposita Linea inveniri debeat. Num. LXVII.

EXEMPL. PRIMUM: Proponatur invenienda Linea ACc, quæ tangat vel tangatur ab infinitis Parabolis BCD, bDc, &c. super eodem axe AE constitutis, & vertices singulos B, b, &c. in singulis axis punctis, parametrosque AB, Ab, &c. distantiis verticum ab extremo ejus puncto A æquales habentibus. Ad lineam hanc investigandam cogitabimus, quod duæ quævis harum Parabolarum, ut BC, bc, se mutuo intersecare debeant alicubi citra quæsitam Lineam ACc; indeque vicissim colligemus, quod ex quovis citra lineam ACc dato puncto velut D, duæ ejusmodi Parabolæ inflecti possint, quæ parametros habeant verticum suorum distantiis ab A æquales, sed eo futuræ sibi propiores, quo punctum D quæsitæ lineæ ACc propius assumptum fuerit; ita quidem ut si hoc in ipsa linea ACc accipiatur (rectis AE, ED coordinatis ejus existentibus) ambæ Parabolæ prorsus sint coalituræ, junctis in communi puncto verticibus earum B & b, ipsaque tum æquatio ab AB vel Ab denominata duas æquales radices habitura: unde deinceps in Problemate pergere non erit difficile: Positis enim $AE = x$, $ED = y$, AB vel $Ab = s$, adeoque BE vel $bE = x - s$, habebitur, ex natura Parabolæ, rectang. ABE, vel AbE, seu $xs - ss = yy$, seu ED^2, ordinataque æquatione a litera s, $ss - xs + yy = 0$, quæ terminotenus comparata cum æquatione duarum radicum æqualium $ss -$ Fig. 7.

* N°. XLVI, pag. 466. 471. & N°. XLVII, pag. 473, seq.
† N°. LVI. pag. 560.
‡ N°. LXII. pag. 638. seq.

Num. LXVII. $2es + ee = o$, dabit $y = e$, & $x = 2e$, ac proinde $x = 2y$, quod indicat Lineam quæsitam A C c rectam esse, rationemque abscissæ ad applicatam constanter duplam. Addimus, quod tametsi loco simplicium Parabolarum, proponatur series Paraboloidum, vel Cubicorum, vel Biquadraticorum, vel cujusvis altioris gradus, Linea ipsas omnes tangens nihilominus recta invenitur, ratione tantum inter abscissam & applicatam variante.

Fig. 8. EXEMPL. SECUNDUM: Sit porro invenienda Curva GHhK, quæ tangat omnes Parabolas, quas globi bellici in singulis mortarii elevationibus ex puncto F constante vi explosi describunt. Ad hujus Problematis solutionem, ex arte Balistica ut demonstratum supponimus, quod globi, vi nitrati pulveris projecti, aut missilia quævis in aere Parabolas describunt, quarum altitudines supra planum horizontis sint in duplicata ratione sinuum angulorum elevationis tormenti. Quo posito, considero quod duæ quævis harum Parabolarum F M P, F m p, quæ curvam quæsitam tangunt in H & h, sese necessario alicubi intra eandem secent; adeoque etiam reciproce, quod ex quovis intra illam dato puncto, velut O, duæ diversæ Parabolæ duci possint, quæ præscriptam tangant, præterquam quando punctum O in ipsa curva GHK assumptum fuerit; quo casu ambæ Parabolæ in unam coalescent, æquatis earum tum amplitudinibus FP & F p, aut amplitudinum semissibus FL & Fl, tum altitudinibus L M & l m. Unde rursus calculum prosequi non arduum erit. Esto namque altitudo jactus perpendicularis $FG = a$, $FL = s$, $LM = t$. $FN = x$, $NO = y$, & ducatur F R tangens Parabolam F M P in F & occurrens axi L M in R; fietque propter Parabolam $LR = 2t$, & $FR = \sqrt{(ss + 4tt)}$: quare cum tangens FR repræsentet lineam directionis mortarii seu globi, eo momento quo ex mortario egressus Parabolam describere incipit, erit, per Lemma præsuppositum, FG ad LM, seu a ad t, ut quadratum sinus totius F R ad quadratum LR sinus anguli LFR, sive ut $ss + 4tt$ ad $4tt$; unde manat $ss = 4at - 4tt$, æquatio prior, quæ positionem curvarum FMP, F m p determinat. Rursus ut L M ad Q M sive t ad

t ad $t - y$, ita FL^2 ad QO^2, hoc eſt, ss ad $xx - 2xs + ss$; Num. LXVII.
ac proinde $yss - 2txs + txx = 0$, æquatio altera, quæ naturam Parabolarum reſpicit. Harum duarum æquationum beneficio eliminetur alterutra litera s vel t, puta t, ut habeatur æquatio $ss - \frac{x^3 + 2axy}{xx + yy}s + \frac{axxy + \frac{1}{4}x^4}{xx + yy} = 0$, in qua quia litera s duos æquales valores habere concipitur, comparetur ipſa cum æquatione $ss - 2es + ee = 0$, ut ſupra; vel quia æquatio duarum duntaxat dimenſionum eſt, quærantur, per doctrinam pag. 7, ejus ambæ radices, nempe $s = (\frac{1}{2}x^3 + axy \pm xy\sqrt{(aa - ay - \frac{1}{4}xx)}) : (xx + yy)$, quæ cum æquales eſſe nequeant, niſi quantitas poſt ſignum radicale evaneſcat, ſequetur $aa - ay - \frac{1}{4}xx = 0$, quod arguit lineam quæſitam GHK itidem Parabolam exiſtere, cujus vertex G, axis FG, baſis FK dupla FG, & latus rectum ipſius FK duplum.

Notandum hic primo, quod ſi infinitæ hæ Parabolæ, quarum communis tangens quæritur, aliam quamcunque poſitionem habere concipiantur, verbi gr. talem, ut ipſarum vertices exiſtant in linea recta, aut in circumferentia circuli, aut in alia quavis curva data, prior tantum duarum præcedentium æquationum $ss = 4at - 4tt$ variabit; præterquam cum ſunt in Ellipſi, cujus axis minor FG majoris eſt ſemiſſis; quoniam enim ipſa hæc Ellipſis æquationis noſtræ Locus eſt, non differet eo caſu Parabolarum poſitio a præſente. Si vero quæſtio proponatur etiam in aliis curvis quam Parabolis, tunc & altera æquatio variabit; adeo ut hinc generaliter conſtet, quo pacto quibuſlibet lineis poſitione datis, alia invenienda ſit Linea, quæ ipſas omnes tangat, vel ab iis tangatur.

Deinde etiam ſciendum eſt, quod idem Problema ſub alia adhuc forma proponi poſſit hunc in modum: Quæritur, qualis ſit curva, quæ jungit omnia puncta G, h, K, eorum quæ globi ex F conſtante vi exploſi in planis acclivibus FG, Fh, FK, attingere poſſunt remotiſſima. Problematis enim hujus identitas cum præcedente hinc pateſcit, quod ducta Parabola Fmhp, quæ cur-

Num. LXVII. vam ſupra repertam GhK tangat in ipſo puncto h, in quo eam ſecat planum Fh, omnes aliæ ex F eductæ Parabolæ curvam GhK alibi quam in puncto h tangere debebunt, proindeque cum totæ intra eandem jaceant, planum Fh neceſſario citra punctum h ſecabunt. Quæ quidem conſideratio hunc uſum præbet, ut inveniri poſſit angulus elevationis mortarii, e quo jactus globi in dato plano inclinato Fh fiat omnium longiſſimus; uti maximum eſſe conſtat in plano horizontali FK, ſi fiat exploſio ſub angulo 45 gr. id quod in re militari uſum quandoque non contemnendum habere poteſt. Etenim, cum ob angulum datum nFh, nota ſit ratio lateris Fn ad nh, ſeu x ad y, (quæ ponatur ut a ad b) habebitur $ay = bx$, quod ſubſtitutum in æquatione $s = (\frac{1}{2}x^3 + axy) : (xx + yy)$ valorem unius radicum æqualium ipſius s denotante, gignit $s = (\frac{1}{2}aax + aab) : (aa + bb)$; in æquatione vero $aa - ay - \frac{1}{4}xx = 0$ ſuffectum exhibet $\frac{1}{4}xx = - bx + aa$, ac proinde $\frac{1}{2}x = - b + \surd(aa + bb)$; quo valore porro ſurrogato in æquatione modo inventa $s = (\frac{1}{2}aax + aab) : (aa + bb)$, habebitur $s = aa : \surd(aa + bb)$, & hoc denique ſubſtituto in æquat. $ss = 4at - 4tt$ ad habendum $2t$, fiet $2t = a + ab : \surd(aa + bb)$. Quare tandem cum FL, ſeu s, ſit ad LR, ſeu $2t$, hoc eſt, $aa : \surd(aa + bb)$ ad $a + ab : \surd(aa + bb)$, ut ſinus totus a ad tang. ang. LFR, erit tangens iſta $b + \surd(aa + bb)$. Quod innuit, tangentem anguli quæſitæ elevationis mortarii eſſe aggregatum tangentis & ſecantis anguli inclinationis dati plani nFh: quod inveſtigandum erat.

NOTA VIII.

De Circulo curvam oſculante, ſimulque tangente ac ſecante.

Pag. 44, ad verba, *Tangat ibidem curvam lineam CE, nec ipſam ſecet.*

SUbintellige: *niſi forte oſculetur.* Fieri enim poteſt, ut recta PC curvæ perpendicularis ſit, & tamen circulus centro P per C deſcriptus, curvam in C non tangat, ſed ſecet: nempe ſi concurſui

cursui duarum intersectionum sive contactui tertia intersectio accesserit, & sic id quod *Osculum* dicitur, effecerit. Eadem cum restrictione est intelligendum, quod in sequenti paragrapho habetur, ubi asseritur, æquationem, per quam invenitur linea CM, vel MA, continere debere duas radices inæquales, si circulus curvam lineam in C secet: hoc enim tantum de simplici curvarum sectione valet, non de composita, quæ ex trium pluriumve simplicium concursu coaluit, totidemque radicum æqualium index est. Neglexit vero Auctor hanc restrictionem, quod ejus tempore nihil adhuc expliciti de natura Osculorum notum fuerat, quæ demum acutissimo Geometræ LEIBNITIO distinctius considerari, mox etiam aliis plenius excuti & ventilari cœpit; qua de re fusius in *Actis Lips.* mens. Jun. 1686, Mart. & Sept. 1692 *, & Jun. 1693 †. Interim tamen verum est, hac animadversione non everti fundamentum methodi Auctoris, quippe quod in eo tantum positum est, ut cum recta PC curvæ perpendicularis est, saltem duæ radices æquales in æquatione adsint: adsunt autem hæ, sive circulus tangat curvam, sive osculetur; cum tres pluresve radices æquales duas non excludant, sed includant. Num. LXVII.

NOTA IX.

Quando secunda Ovalis CARTESII *transeat in Circulum, & qualem?*

QUoniam non definitum nec demonstratum extat, in quem Circulum transeat secunda hæc Ovalis, quando FA, AG, & 5A, A6, in eadem ratione sunt; utrumque hic loci supplebimus: utemur autem signo $=\!=$ ad indigitandam proportionalitatem quatuor magnitudinum, quibus interferitur, ut discursum utcunque contrahamus. Pag. 52. & 270. ad lit. OO.

In recta FG abscindatur ad partes G recta AX, quæ sit quarta Fig. 9.

Ssss 2

* Supra N°. XLVII. pag. 473; seq. & N°. LV. pag. 543.
† N°. LVI. Art. II. pag. 559.

Num. LXVII. ta proportionalis ad AF — AG, AG, & 2FA, ductisque ad commune punctum 2 curvæ A 2 rectis F2, A 2, G 2 & X2, demittatur ex illo perpendicularis 2P. Quo facto, cum A5 : A6 = AF: AG, [*per hyp.*] erit permutando A 5 : AF = A 6 : AG, seu AS [per V. 7.]; componendoque F5 : AF = S6 : AG, hoc est, F2 : AF = G2 : AG. Quare tum angulus F2G bisectus est per rectam A2 [VI. 3], tum etiam rect. F2G : rect. FAG = quadr. F2 : quadr. FA [VI. 22]; unde dividendo rect. F 2 G — rect. FAG [sive quadr. A 2 *per Theor. part. post.* Geom. *pag.* 370.] : rect. FAG = quadr. F2 — quadr. FA : quadr. FA, rursumque permutando quadr. A2 : quadr. F2 — quadr. FA = rect. FAG: quadr. FA = AG : AF [VI. 1], & convertendo quadr. A 2 : quadr. F2 — quadr. FA — quadr. A2 [sive 2 rect. FAP *per* II. 2] = AG : AF — AG = [*per constr.*] AX : 2 FA = rect. XAP : rect. 2FAP [VI. 1]. Quocirca rect. XAP = quadr. A2 [V. 9]; ac proinde XA : A2 = A2 : AP [VI. 17] hoc est, in Triangulis XA2, 2AP, latera circa communem angulum A sunt proportionalia. Ergo Triangula similia [VI. 6]. Ergo cum angulus ad P sit rectus, erit etiam angulus A 2 X rectus; igitur in semicirculo [III. 31]. Peripheria ergo circuli est Curva A 2 X, ejusque diameter recta AX. Quod determinandum demonstrandumque erat.

NOTA X.

Ovalis primi & tertii generis in rectam, secundi in hyperbolam, quarti in ellipsin abire potest.

Pag. 55. lin. 11. *Quod si vero,* &c. QUod positis A5 & A6 lineis æqualibus, Ovalis primi & tertii generis abeat in Lineam rectam, secundi in Hyperbolam, quarti in Ellipsin, ita facile ostenditur: Quia per constr. AR vel AS = AG, vel AH, & per hypoth. A6 = A5, erit demtis

demtis additisve æqualibus, *In I & III Ovali:* R6, vel S6 = G5, vel H5; quare circulus, centro G vel H, radio R6 vel S6, descriptus alterum centro F per 5 descriptum in ipso puncto 5 continget. *In II Ovali*: S6 [hoc est, per construct. G2] = AG + A5; & *in IV^ta*, R6 sive H4 = AH — A5; utrobique vero F5, hoc est, F2 vel F4 = FA + A5. Unde patet differentiam rectarum F2, G2, differentiæ ipsarum FA, GA; nec non summam F4 + H4, summæ FA + AH æquari. Constat autem aliunde, illam *Hyperbolæ*, hanc *Ellipseos* proprietatem existere. Num. LXVII.

NOTA XI.

Lens hyperboliformis radios lucis [homogeneos] *accurate colligens in unum punctum.*

QUoniam enim, per hyp. $d - e$ est ad e, sicut g ad AM, seu x, erit componendo d ad e, sicut $g + x$ ad x, hoc est, sicut differentia rectarum GC & GA ad AM; ac proinde per naturam harum Ovalium AM sive AH — HM debet etiam æquari differentiæ ipsarum AH & HC, hoc est, HC debet esse = HM, quod fieri nequit, nisi focus H infinite distet a puncto C vel M, lineaque CH ipsi AM parallela fiat; quo casu curvam AC Hyperbolam evadere constat per ea, quæ pag. 274 a SCHOOTENIO demonstrata sunt. Idem etiam simili modo de altera curva CY ostendetur. Quod si vero linea AM major minorve inveniatur quam $ge : (d - e)$, haud absimili ratiocinio colligitur, focum H finito intervallo a puncto C vel M ad dextram sinistramve ejus statuendum esse, quod arguit curvam AC primi tertiive generis Ovalem esse, plane ut Auctor asseruit. Pag. 65. lin. 5. *Et denique si AM,* &c.

Num. LXVII.

NOTA XII.

De Focis linearibus, ſeu Lineis cauſticis & dia-cauſticis.

Pag. 65. §. *Poſſem quoque.*

SUperflua hæc eſt limitatio Auctoris; poteſt enim Problema generaliter confici, qualiſcunque ſit data vitri ſuperficies, ut bene animadverſum ab Ill. HUGENIO in *Tractatu de Lumine* pag. 113. Quemadmodum etiam circa totam materiam opticam, quæ in hoc ſecundo libro pertractatur, multo univerſaliora nunc detecta habentur, poſtquam a Geometris, præter puncta ſolitaria, quæ Focos appellarunt, integræ cœperunt conſiderari Lineæ, a radiorum reflexorum & refractorum concurſibus formatæ, quas Cel. Dn. LEIBNITIUS appoſite Focos Lineares, alii Cauſticas ac Diacauſticas nuncupare ſolent. De harum linearum affectionibus legi merentur ea quæ paſſim in *Actis Erud. Lipſ.* prodierunt, præſertim quæ habentur menſ. Mai. *1692*, & Jun. *1693* *, ubi non tantum fundamentum omnium Ovalium *Carteſianarum* exponitur, & reliquorum inventorum fons aperitur, ſed & plurima alia ſcitu jucunda atque utilia exhibentur. Quomodo vero etiam præſentis Problematis conſtructio ex iiſdem poſſit elici, haud obſcurum eſt, ſi conſideremus, illo nihil aliud præcipi, quam ut data linea curva reperiatur alia, cujus diacauſtica ex dato puncto conveniat cum datæ diacauſtica ex alio dato puncto. Quod conſequi poterimus, ſi quæramus prius Curvam, cujus Evoluta (hæc autem quid ſit, ibi vide) conveniat cum diacauſtica datæ curvæ ex dato puncto, & deinde illa mediante aliam, cujus diacauſtica ex altero dato puncto cum inventæ evoluta coincidat. Quorum utrumque per ibi tradita facillimo negotio effectui dare licet, modo datæ curvæ rectam perpendicularem inveniri poſſe concedatur.

IN

* N°. XLIX, pag. 491. ſeq. & N°. LVI, pag. 549. ſeq.

IN LIBRUM III.

Num. LXVII.

NOTA XIII.

De simplicissima Problematis construendi ratione.

SI sola Dni. DES-CARTES auctoritate standum sit, e pluribus Curvis, per quas aliquod Problema construi potest, semper illa eligenda venit, quæ generis est simplicissimi; ut maxime constructionem & demonstrationem Problematis multo impeditiorem reddat, quam alia, quæ uno alterove gradu magis composita est. At si asserti rationes desideremus, altum silentium. Et sane, cum totum negotium geometricum, vel manuum, vel mentis operatione absolvatur, illa constructio omnium optima censebitur, quæ utramque præ cæteris facilitat: quicquid sit de curvæ genere graduve, cujus ope hæc constructio peragitur. Nam quanquam curva gradus altioris quiddam forte habeat in natura sua magis compositi, quam alia inferioris; ratiocinium tamen, quo id colligimus, in constructione Problematis non attenditur, sed tanquam jam antea factum supponitur; & nunc solummodo spectatur curvæ descriptio, ejusque ad optatam constructionem applicatio, quæ nonnunquam, vel ipso fatente Auctore, facilior simpliciorque existit, quam si alia inferioris generis curva assumeretur. Exemplum ejus rei illustre habemus in Problemate *Quadrisectionis Trianguli Scaleni per duas normales rectas*, quod supra * construximus ope Hyperbolæ & Curvæ alicujus 4 dimensionum, tametsi duabus curvis trium idem præstari potuisset in hunc modum: Attollatur æquatio 8 dimensionum, quæ ambas Problematis conditiones includit, facta multiplicatione per x, ad 9 di- Pag. 67. §. *Tametsi.*

* Nota II. pag. 671. seq.

Num. LXVII. 9 dimensiones, & sublato secundo termino reducatur ad hanc formulam: $x^9. * m x^7. n x^6. p x^5. q x^4. r x^3. s x x. t x. v = 0$; tum sumpto ad lubitum Loco aliquo 3 dimens., puta Parabola Cubica, quæ exprimitur per $a a y = x^3$, substituatur valor iste ipsius x^3 in 5 vel 6 primis terminis æquationis propositæ 9 dimensionum: sic habebitur pro Loco altero æquatio indeterminata $a^6 y^3. a^4 m x y y. a^4 n y y. a a p x x y. a a q x y. a a r y$ [vel $r x^3$] $s x x. t x. v = 0$, quæ itidem trium tantum dimensionum existit. Ubi apparet, quod etiamsi methodus ista resolvendi æquationem propositam in duo Loca, multoties expeditior sit, constructionesque longe faciliores suppeditet illa, qua Dn. DES-CARTES uti solet, fieri tamen potest, ut facta substitutione coefficientium æquationis propositæ loco literarum m, n, p, &c. Locus iste $a^6 y^3$. &c. fiat constructu tam difficilis, ipsaque demonstratio tam impedita & coacta, ut nemo non præferendam videat nostram constructionem, ad quam insuper ipsa Problematis natura sponte quasi nos deduxit, ut maxime 4 dimensionum curvam postulet.

Sed & hoc denique addere non pigebit, quod si curvarum simplicitati nolimus scrupulosius inhærere, possimus unamquamque æquationem generaliter & facillime constructam exhibere, mediante curva aliqua, quæ licet tot dimensionum sit quot habet æquatio proposita, ejus tamen omnia puncta per solas lineas rectas inveniri possunt. Modus talis est: Primus æquationis terminus adæquetur reliquis, dein dividatur tota æquatio per potestatem radicis proxime inferiorem maxima, ut radix ab una parte sola habeatur; quemadmodum si proposita sit æquatio $x^5 = a x^4 + b b x^3 - c^3 x x - d^4 x + e^5$, fiat divisio per x^4, ut proveniat $x = a + b b : x - c^3 : x x - d^4 : x^3 + e^5 : x^4$; tum assignato in recta indefinita AB puncto A, abscindatur ex illa arbitraria AB, quæ vocetur x, & quærantur tertia proportionalis ad hanc x & b, quarta ad x & c, quinta ad x & d, &c. eæque omnes, una cum quantitate a, pro signorum + & — varietate, sibi mutuo addantur demanturve, & quæ provenit recta BC normaliter applicetur ipsi AB in puncto B; sic erit punctum C ad curvam desideratam CC. Ducta enim recta AC, quæ cum ipsa AB angulum (Fig. 10.)

semi-

ſemirectum conſtituat, curvamque in punctis C, C ſecet, deſignabunt demiſſæ ex illis perpendiculares CB, CB, omnes radices propoſitæ æquationis: quod ex ipſa operatione per ſe manifeſtum eſt; quandoquidem recta BC, quatenus ad curvam applicata eſt, æquatur per conſtructionem quantitati $a + bb : x - c^3 : x^2 - d^4 : x^3 + c^5 : x^4$, eademque, quatenus eſt ſubtenſa anguli ſemirecti, æquatur ipſi AB, ſeu x. Sciendum vero etiam eſt, quod idem liceat conſequi, ſi loco primi termini æquationis quivis alius cæteris adæquetur. BARROWIUS celebris Geometra *Anglus* in *Lect. Geom.* pag. 145. homogeneum comparationis, ſeu ultimum terminum, reliquis adæquare ſolet. Sed & infinitis propemodum modis iſta variari poſſunt. Et habent ſane hujuſmodi conſtructiones in limitum, maximorum item & minimorum determinationibus, aliiſque, ſuos uſus, qui in aliis conſtructionibus vix locum habere poſſunt. Num. LXVII.

NOTA XIV.

De æquationum ſuperiorum generatione per multiplicationes inferiorum.

Poſſet aliquis Tyro, vel Tyrone major, hic quærere, cur ad explicandam æquationum generationem & naturam quantitates adæquandæ ſint nihilo, priuſquam multiplicentur, & cur non potius ita ſtatim liceat arguere: Quia $x = 2$, iterumque $x = 3$, erit facta multiplicatione æqualium x & 3 per æqualia x & 2, productum $xx = 6$; quæ diverſa plane eſt æquatio ab illa, quæ invenitur multiplicando $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$. Ad hunc ſcrupulum ſibi eximendum, ſcire debent Analytices ſtudioſi, recte quidem colligi hoc ratiocinio, quod x, qua eſt 3, multiplicatum per x, qua eſt 2, hoc eſt, xx faciat 6; at ſic quantitatem xx ſpectari ut rectangulum duorum valorum inæqualium, ſecus atque accipitur in æquationibus ex Problematis vel Theorematis alicujus reſolutione ortis, ubi ſemper denotare ſolet qua- Pag. 69. §. *Sciendum.*

Num. LXVII. dratum unius ejusdemque valoris. Quo etiam sensu venit in modo formandi æquationes, quem hic præscribit Auctor. Posito namque $x = 3$, vel $x - 3 = 0$, si multiplicetur $x - 3$ per quamcunque quantitatem, velut per $x - 2$, sequitur productum $xx - 5x + 6$ nihilo æquale fore, cujuscunque valoris ponatur x in quantitate $x - 2$, adeoque terminum xx non minus ternarii quadratum, quam quodvis aliud rectangulum innuere posse. Quod similiter quoque de quadrato binarii est intelligendum, sicubi insuper posuerimus $x = 2$.

NOTA XV.

Cautio adhibenda in æquationum præparatione ad constructionem.

Pag. 74. lin. 7. Et insuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato semissis secundi major sit.

INter alia, quæ ad æquationum præparationem ab Auctore requiruntur, ista quoque conditio adjecta est, ut usui postmodum esse possit in construenda æquatione sex dimensionum $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0$, prout ex seq. pag. 97 & 98 videre est. Etenim si quantitas cognita tertii termini q minor poneretur quam $\frac{1}{4}pp$ quadratum semissis secundi, fieri posset ut constructio secundum regulam Dni. DES-CARTES instituenda redderetur impossibilis; utpote secundum quam Parabola describenda est, cujus Parameter sit $= \sqrt{(t : \sqrt{v} + q - \frac{1}{4}pp)}$.

NOTA

NOTA XVI.

Num. LXVII.

Transformatio æquationis datæ in aliam, cujus terminus quilibet coefficientem habeat datæ magnitudinis.

Generaliter quantitas cognita seu coefficiens cujuslibet termini æquationis propositæ $x^4 . px^3 . qxx . rx . s = 0$, transmutabitur in aliam datam a, multiplicando radices æquationis, juxta doctrinam pag. 75, per $a:p$, si sit coefficiens secundi termini, quem transmutare velis; aut per radicem quadratam ex $a:q$, si sit coefficiens tertii; aut per radicem cubicam ex $a:r$, si quarti; aut per quadrato-quadratam ex $a:s$, si quinti; & ita consequenter, si plures termini adfuerint. *Pag. 76. §. Qua Operatio.*

NOTA XVII.

Dividendo æquationem datam per binomium, quod illius radicem esse suspicamur, cur juvet divisionem incipere a termino ultimo.

Cur Auctor divisionem incipere jubeat a fine, ratio est, quia si fieri non possit; tum id plerumque initio statim operationis cognoscitur. Ex. gr. Examinaturus, num æquatio $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, dividi possit per $yy + 8$, divido primum -64 per $+8$, & habeo -8, factaque per yy multiplicatione $-8yy$, quæ subtracta ex $-124yy$ relinquunt $-116yy$. Hoc vero quia non amplius per 8 sine residuo dividi potest, confestim concludo, divisionem per hoc binomium $yy + 8$ succedere non posse; quod alias facto initio ab y^6 non constitisset, nisi postquam tota operatio ad finem perducta fuisset. *Pag. 77. §. Incipio ab ultimo termino.*

Num. LXVII.

NOTA XVIII.

Problemata Solida, quomodo per exiguam aliquam Sectionis Conicæ particulam conſtruantur.

Pag. 85. lin. 24. *aut etiam per ipſarum particulam aliquam.*

QUomodo Problemata Solida per exiguam aliquam portionem Sectionis Conicæ conſtrui poſſint, cum Auctor id non exponat, paucis hic indicare operæ pretium duximus. Primo quia data eſt Sectionis portio, dabitur quoque vertex Sectionis [*Vid.* MYDORG. *Conic. lib.* 4. *prop.* 34.], ejuſque axis, & ab extremitatibus Sectionis demiſſæ in axem perpendiculares, quarum major vocetur a & minor b. Deinde per regulas Dni. DE BEAUNE, quas ſecundæ Parti *Geometriæ* hujus inſertas legimus, quærantur Limites æquationis propoſitæ, conſiderando num cadant intra perpendiculares a & b, nec ne: nam ſi intra illas cadant, hoc eſt, ſi uterque limes minor ſit quam a, & major quam b, perſpicuum eſt æquationem abſque ulteriori reductione per regulas, quas hic mox ſubjungit Auctor, conſtrui poſſe. At ſi limitum alteruter, vel uterque, cadat extra a & b, ſive major ſit quam a, aut minor quam b, tum perpendendum porro eſt, utrum ab æqualitatis ratione magis minuſve recedant quam perpendiculares a & b; & ſi magis, euſque ſaltem coarctandi ſunt, donec ad æqualitatem æque vel propius accedant; quod video variis modis fieri poſſe: Ex. gr. Eſto propoſita æquatio $z^4 * - 463zz + 4980z - 14508 = 0$, ſitque $a = 63$, & $b = 28$: Limes æquationis major eſt $\sqrt{463}$, & minor $\frac{14508}{4980}$ [*per* 1 *Prop. Cap.* 7. *de Limit. Æquat.*] adeoque radices ſingulæ æquationis minores quam 22, & majores quam 2; ſed quia 22 & 2 magis recedunt ab æqualitate quam a & b, ſeu 63 & 28, conſtituo inter 22 & 2 tot medios numeros, quot requiruntur, ut bini ipſorum proximi ad æqualitatem æque vel propius accedant, nempe, 22,

10,

10, 5, 3, 2. Quo facto, propositam æquationem transponendo & dividendo per z^3 ita reduco, ut habeatur z ab una parte sola, puta $z = 463 : z - 4980 : zz + 14508 : z^3$; tum pro z in denominatoribus pono successive valores 22, 10, 5, 3, 2, consideroque num valores inde resultantes ipsius z positis majores minoresve evadant. Et quoniam posito $z = 22$, resultans valor minor fit quam 22; posito vero $z = 10$, resultat valor major quam 10; quemadmodum etiam posito z æquali uni reliquorum numerorum, valores inde resultantes positis identidem majores fiunt; hinc concludo, inter 22 & 10 necessario vel unam, vel omnes tres radices cadere; & si una, duas reliquas aut inter 10 & 5, aut 5 & 3, aut 3 & 2 conjunctim contineri, aut prorsus imaginarias esse. At quoniam omnes hi limitibus intercepti numeri infra 63 & 28, ceu extremas applicatas datæ particulæ Sectionis Conicæ, consistunt; idcirco prius ad illas multiplicatione elevandi sunt, juxta doctrinam pag. 75, faciendo $z = \frac{22}{63} y = \frac{10}{63} x = \frac{5}{63} u = \frac{3}{63} t$, vel etiam $z = \frac{10}{28} y = \frac{5}{28} x = \frac{3}{28} u = \frac{2}{28} t$, & sic transformando propositam æquationem in totidem alias ab y, x, u & t denominatas, quarum deinde constructiones ope datæ portionis Sectionis Conicæ, per regulam pag. 87, seq. præscriptam ordine tentandæ sunt. Ita hic per primam obtinebitur unus valor pro y, & per secundam duo valores pro x, quibus cognitis & z innotescet; nec opus est progredi ad constructionem reliquarum æquationum, cum jam omnes tres radices propositæ æquationis inventæ sint: quanquam etiam ex aliis quandoque circumstantiis haud ita difficulter cognoscatur, quid primo sit tentandum, quid ultimo, ut perpensis iis multum sæpe superflui laboris rescindi possit. Sed succinctior multo fiet tota hæc operatio, si proposito adhibeamus ea quæ habentur in *Act. Erud. Lips.* mens. Sept. 1689 *, ubi modus docetur non inelegans appropinquandi continue radicibus æquationum per solas rectas lineas & circulos, quantum quis proxime voluerit. Postquam enim, hujus methodi ope, limites radicum sufficienter coarctati, Num. LXVII.

Tttt 3 ipsa-

* N°. XXXVII. pag. 411. seq.

Num. LXVII. ipſaque æquatio, ſi opus ſit, convenienti multiplicatione radicis in aliam transformata fuerit, poterit ipſa ſtatim beneficio datæ portionis Sectionis Conicæ infallibiliter conſtrui; quorum omnium prolixiori explicatione non indiget, qui præcedentia probe intellexerit.

IN COMMENT. *SCHOOTENII*

IN LIBRUM I.

NOTA XIX.

Conſtructio æquationis $z = (cd + ef) : g$.

Pag. 160. ad exemplum $z = (cd+ef):g$. ALiter hoc ita reſolvitur: Fiat ut g ad c, ita d ad quartam h; nec non ut g ad e, ita f ad quartam i, ſummaque $h+i$ vocetur b, erit $z = b$. Vel etiam hoc pacto: Statuatur Triangulum rectangulum, cujus unum crus æquetur mediæ proportionali inter c & d, alterum mediæ inter e & f, & quæratur ad g & hypothenuſam trianguli tertia proportionalis, quæ ſit b, erit $z = b$.

NOTA XX.

Conſtructio æquationis $z = (acdd - aacc) : (d^3 + acd)$.

Ibid. ſub finem. SCHOOTENIUS tres proportiones adhibet. Brevius id per duas proportionalitates obtinetur, faciendo, ut d ad a, ita c ad quartam m; erit $dm = ac$, & $ddmm = aacc$; unde pro $\frac{acdd - aacc}{d^3 + acd}$ poterit ſcribi $\frac{d^3m - ddmm}{d^3 + ddm}$ ſeu $\frac{dm - mm}{d + m}$: quare ſi fiat denuo, ut $d+m$ ad $d-m$, ita m ad quartam b, erit $z = b$.

NOTA

NOTA XXI. Num. LXVII.

Constructio æquationum $z = \sqrt{(aa+bb)}$ & $z = \sqrt{((aadd - aaff - a^4) : (dd + 2df + ff))}$.

PRo *priore quantitate:* Ponatur $\sqrt{(aa+bb)}$ esse hypothenusa Pag. 162. alicujus Trianguli rectanguli, cujus unum crus sit a, & alte- ab initio. rum b: vel transmutetur bb in rectang. ab, ac deinde inter a & $a+b$ quæratur media proportionalis &c. Ita quantitas $\sqrt{(aa - bb)}$ considerari potest, vel ut media proportionalis inter $a+b$ & $a-b$, vel ut crus unum Trianguli rectanguli, cujus hypothenusa sit $= a$, & alterum crus $= b$, &c. Pro *posteriore quantitate:* Quæratur per modo tradita $\sqrt{(aa+ff)}$, quæ vocetur m; ac deinde $\sqrt{(dd - mm)}$, quæ dicatur n; tandemque fiat ut $d + f$ ad n, sic a ad quartam b, erit $z = b$. Ejusdem vero quantitatis constructionem ipse quoque exhibuit SCHOOTENIUS pag. 153.

IN COMMENT. *SCHOOTENII* IN LIBRUM II.

NOTA XXII.

In puncto Flexus contrarii, recta nulla curvam tangere potest.

REcte hic Commentator, in puncto Flexus nullam rectam Pag.270.§. tangere Trochoidem; quod in omni Flexu contrario verum. *Ubi notandum.* Etenim si recta quæpiam infinita tangens curvam, eandemque præterea secans alibi, ita super illa rotari concipiatur, ut conta-

ctus

Num. LXVII. ctus punctum totam successive curvam perambulet, fiet ut contactus iste, qui solus ex duabus intersectionibus coaluit, in puncto Flexus contrarii tertiæ insuper intersectioni conjungatur, evanescente alterutra portionum curvæ, quæ ad easdem rectæ tangentis partes jacuerant; quo fit, ut contactus proprie talis esse desinat, inque sectionem transmutetur quæ *osculatio* dicitur. Cui etiam illud consentaneum est, quod circuli omnes curvam osculantes [osculo ex tribus intersectionibus conflato] curvam non tangunt, sed secant, ut supra annotavimus *. Nam, quod de universis constat, id speciatim quoque de illo valebit, qui curvam in puncto Flexus osculatur. Sed hic, cum perpetuo infinite magnus esse debeat, ut ex loco *Act. Lips.* ibid. allegato apparet, † a linea recta osculante non differt; quæ proinde & ipsa curvam secare, non tangere censenda est. Et quemadmodum osculantes circuli, sic & puncta Flexus contrarii, ob trium intersectionum concursum, per tres radices æquales reperiuntur, quod qua ratione ab HEURATIO in Conchoide sit præstitutum, pag. 258 *Geometriæ* hujus videre est.

IN COMMENT. *SCHOOTENII*

IN LIBRUM III.

NOTA XXIII.

Promotio Regulæ pro inveniendis commode divisoribus æquationis propositæ.

Pag. 307, & 308. ACcidit sæpenumero, ut præstitis iis omnibus, quæ hic fieri jubet Commentator, numerus tamen divisorum utilium per quos divisio tentanda foret, adhuc nimius sit. Id qui cavere velit,

* Nota VIII. pag. 684, 685. † Vide tamen Num. LXXVI, infra.

velit, poterit radices propositæ æquationis initio statim operationis pluribus aliquot numeris, puta unitate, binario, ternario, denario &c. augere minuereve, transformataque æquatione in totidem alias, divisores ex omnibus conspirantes seligere. Nam tum aut nulli conspirabunt; aut si qui conspirant, raro per illos divisio frustra tentatur. Recte autem monet, pag. 308 lin. 27, seq. cujuslibet æquationis terminum ultimum, quo solo ad hoc negotium indigemus, posse reperiri, ut integra æquatione non sit opus. Hoc enim fit, multiplicando coefficientes terminorum propositæ æquationis per numeros continue proportionales ab unitate: videlicet ultimum terminum per unitatem, coefficientem penultimi termini per numerum quo augere vel minuere volumus radices, coefficientem antepenultimi per numeri hujus quadratum, sequentis per cubum, & ita deinceps; atque tribuendo productis eadem ubique signa, quæ occurrunt in æquatione data, si radices minuendæ; mutando vero illa in locis paribus ab ultimo, si augendæ sint. Aggregatum namque omnium productorum erit ultimus terminus æquationis quæsitæ. Ex. gr. Esto proposita æquatio: $x^3 - 3xx - 30x + 72 = 0$, & explorandum sit, num dividi possit per $x +$ vel $-$ divisore aliquo ultimi termini. Multiplico coefficientes terminorum retrorsum per 1, 1, 1, 1; per 1, 2, 4, 8; per 1, 3, 9, 27, &c. per 1, 10, 100, 1000. &c. servatis, si ita lubet, iisdem signis æquationis datæ, productaque omnia ejusdem ordinis addo, hac ratione:

Num. LXVII.

$+1x^3$	$-3xx$	$-30x$	$+72$	$=0$
1	1	1	1	
8	4	2	1	
27	9	3	1	
1000	100	10	1	
$+1$	-3	-30	$+72$	$=+40$
$+8$	-12	-60	$+72$	$=+8$
$+27$	-27	-90	$+72$	$=-18$
$+1000$	-300	-300	$+72$	$=+472$

Num. LXVII. Sic prodibunt 40, 8, 18 & 472, pro ultimis terminis æquationum, quarum radices unitate, binario, ternario, ac denario minores ſunt radicibus æquationis propoſitæ.

Diviſores autem numeri 40 ſunt $\pm$ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.
8 . . $\pm$ 1, 2, 4, 8.
18 . . $\pm$ 1, 2, 3, 6, 9, 18.
472 . . $\pm$ 1, 2, 4, 8, 59, 118, 236, 472.

horum primi unitate aucti efficiunt
tum + 2, 3, 5, 6, 9, 11, 21, 41; tum etiam — 0, 1, 3, 4, 7, 9, 19, 39.
ſecundi binario aucti exhibent
tum + 3, 4, 6, 10; tum + 1 & — 0, 2, 6.
tertii aucti ternario dant
tum + 4, 5, 6, 9, 12, 21; tum + 2, 1, & — 0, 3, 6, 15.
quarti denique denario aucti gignunt
tum + 11, 12, 14, 18, 69, 128, 246, 482; tum etiam + 9, 8, 6, 2, & — 49, 108, 226, 462.

Qui quidem omnes inter ſe & cum diviſoribus numeri 72, [qui ſunt $\pm$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72] collati, ex affirmativis unum ſenarium, eumque unicum, conſentientem habent, ex negativis nullum: unde ſuſpicio eſt, unam verarum radicum æquationis propoſitæ eſſe $+6$, eamque proinde dividi poſſe per $x - 6 = 0$, quemadmodum reapſe dividi poteſt, oriturque æquatio irreducibilis $xx + 3x - 12 = 0$.

NOTA XXIV.

Analyſis & Conſtructio Problematis Hugeniani: *E puncto dato rectam educere quæ datæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.*

Pag. 322. CUm non conſtet, utrum Problematis hujus conſtructio & demonſtratio *Hugeniana* aliquando lucem viderit, nec ſi vidit, omnium manibus teratur; idcirco lubet hic exponere, qualiter

liter existimemus illam a subtilissimo Viro olim concinnatam fuisse : Num. LXVII.

ANALYSIS ita habet: Data sit Parabola EAE, cujus vertex *Fig.* 11. A, latus rectum AB, & axis AG, sitque datum intra extrave illam punctum C, per quod ducere oporteat rectam ECD Parabolæ perpendicularem. Esto hunc in finem demissa ex C in axem normalis CG, & ponatur $AB = a$, $AG = b$, $GC = c$, & $EH = x$; adeoque ex natura Parabolæ $AH = xx : a$, & $HD = \frac{1}{2}a$. Quo facto, propter simil. Triang. EHD & CGD, erit EH ad HD, sive x ad $\frac{1}{2}a$, ut GC, seu c, ad GD, quæ sic fiet $ac : 2x$; ac proinde $HD - GD$ sive $HG = \frac{1}{2}a - ac : 2x$, & $AH + HG = xx : a + \frac{1}{2}a - ac : 2x$, quod, ut apparet, æquatur ipsi b seu AG: unde facta reductione habetur $x^3 = * + abx - \frac{1}{2}aax + \frac{1}{2}aac$. Quæ æquatio cum ad pauciores dimensiones deprimi non possit [quod hic absque ulteriori tentamine ex Regulis *Hudden.* 12 & 14 colligitur] indicat Problema solidum existere. At quia in quæstionis datis ipsa jam Parabola includitur, poterit, illa mediante, constructio solis rectis lineis & circulo absolvi hoc modo:

CONSTR. Facta $GN = \frac{1}{2}AB$, bisecetur AN in L; erectaque super axe perpendiculari $LM = \frac{1}{2}CG$, describatur centro M, radio AM, circulus. Hic secabit Parabolam in punctis E, E, E, a quibus ductæ per C rectæ EC Parabolæ perpendiculares erunt.

DEMONSTR. Ad hoc synthetice demonstrandum, jungantur porro rectæ AM, ME, & demissa in axem perpendiculari EH, ductisque axi parallelis MO, CR, bisecetur RH in I, sumanturque in axe $LQ = LH$, & $GP = GN$. Hinc quoniam $AM = ME$, erit quoque AM^2 [$AL^2 + LM^2$] $= ME^2$ [$MO^2 + OE^2$], demtisque æqualibus $AL^2 - MO^2$ seu $LH^2 = OE^2 - LM^2$ seu HO^2. Sed $AL^2 - LH^2 = HAQ$, & $OE^2 - HO^2 = HEI$. Igitur & $HAQ = HEI$: unde HA est ad HE [hoc est, ex natura Parabolæ HE ad AB] sicut EI ad AQ, & permutando

 HE

Num. LXVII. HE ad EI, ficut AB ad AQ. Eft vero $AB = 2GN$ [*Conftr.*] $= PN$, & $AQ = HN$ [ob $AL = LN$, & $LQ = LH$]; quare & HE ad EI, ficut PN ad HN, & convertendo HE ad HI, ficut PN ad PH; fumptifque confequentium duplis HE ad HR, ut PN ad 2PH [feu PG ad PH], iterumque convertendo HE ad RE, ut PG ad HG feu RC. Cum ergo propter fimil. Triang. HED & REC, HE fit ad RE, ut HD ad RC; erit quoque HD ad RC, ficut PG ad RC; ac proinde PG, feu $\frac{1}{2}AB = HD$. Notum autem aliunde, hoc cafu rectam ECD Parabolæ perpendicularem exiftere. Quare conftat propofitum.

NOTA XXV.

De Ofculo Circuli & Parabolæ.

Pag. 339. §. *Praeterea.* Optime hic animadvertit Commentator, quod ubi tres rectæ NM, CB, DE omnes funt æquales, coincidentibus nimirum tribus interfectionum punctis M, B & E, futurum fit, ut Circulus Parabolam, quam hoc cafu ofculari dicitur, non tangat, fed fecet; quod plane conforme eft iis, quæ fupra * ex *Actis Lipf.* de contactu Ofculi huc tranftulimus.

IN ADDITAMENTUM.

NOTA XXVI.

Corrigitur lapfus calculi Schooteniani, *qui* Bartholinum *in errorem induxerat.*

Pag. 385. *ad lit. F.* Myfterium hic quærit Schootenii Commentator Bartholinus in eo, quod lapfus tantum calami fuit in Schootenio.

* Nota VIII, pag. 684, 685. & Nota XXII, pag. 697. 698.

NIO. Nescio enim, qua incuria factum, ut vera signa quantitatum BM, HC & 3DE in contextu immutata fuerint. Commentator hoc factum propterea existimavit, quod alias membra negativa prævalerent affirmativis; sed in subjuncto calculo paralogizat, & ex inconsequenti falsum infert. *Inconsequens* est, dum arguit: Num. LXVII.

	$144pq$	major est quam	$72qq$.
auferatur	$144pp$	major quam	$36qq$.

relinquetur $144pq - 144pp$ major quam $36qq$.

Nam 12 major quam 7, & 10 major quam 3; nec tamen 12 — 10 seu 2, major quam 7 — 3 seu 4. Deinde etiam absolute *falsum* est quod concluditur: Ergo $144pq$ major quam $144pp + 36qq$; quoniam $144pp + 36qq$ est summa quadratorum ex $12p$ & $6q$, sicut $144pq$ duplum rectangulum laterum, quod summa quadratorum perpetuo minus esse constat. Quod vero $144pq$ hic loci etiam minor sit quam $144pp + 27qq$, adeoque signa perperam mutata fuerint, sic liquet: Progressu calculi, ut videre est ad lit. D & I, invenitur PA esse ad AQ, sicut $\frac{1}{2}q - 7q : 16\sqrt{3}$ ad $\frac{1}{2}q + 7q : 16\sqrt{3}$; ergo componendo PQ ad AQ, hoc est, q ad p, sicut q ad $\frac{1}{2}q + 7q : 16\sqrt{3}$: unde $p = \frac{1}{2}q + 7q : 16\sqrt{3}$, & $pp = \frac{241}{768}qq + 7q : 16\sqrt{3}$; qui valores in quantitatibus propositis loco p & pp substituti dabunt $72qq + 21qq\sqrt{3}$ pro $144pq$. & $72\frac{3}{16}qq + 21qq\sqrt{3}$ pro $144pp + 27qq$. Sed $72qq + 21qq\sqrt{3}$ minor est quam $72\frac{3}{16}qq + 21qq\sqrt{3}$, ut apparet. Quare & $144pq$ minor quam $144pp + 27qq$; quod ostendendum erat.

Num. LXVII.

NOTA XXVII.

Alter BARTHOLINI *lapsus corrigitur.*

Pag. 388. lit. N, ad verba, *Quam quidem radicem.*

Etiam hic impingit Commentator. Nam & altera radix $(16842 - 390\sqrt{785}) : 6481$ major est quam $7 : 16\sqrt{3}$. Dicendum fuisset, radicem $(16842 + 390\sqrt{785}) : 6481$ negligendam esse, quod major sit quam 1, qua minor esse deberet, ob SV (fuq) minorem quam AV (qu).

IN EPISTOLAM PRIMAM HUDDENII *DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM.*

NOTA XXVIII.

De Methodo Huddeniana *inveniendi maximum communem Divisorem duarum quantitatum.*

Pag. 422.

Modus iste *Huddenianus* quærendi maximum communem Divisorem duarum quantitatum algebraicarum reapse non differt ab illo vulgari, quo Auctor *Princ. Math. Univ.* ad fractionum abbreviationem utitur Part. II. *Geom.* hujus, in Exemplis pag. 22, & quem in numeris præscripsit EUCLIDES Prop. 2. Lib. 7. Id quod in præsenti exemplo, ubi calculum secundum hanc operationem apposuero, palam fiet: Redactis quantitatibus in ordinem secundum literam aliquam, velut d, ut habeatur $d^3 - add - 2abd + 2aab$, & $d^4 - (bb + aa)\, dd + aabb$, divido istam,

istam, in qua litera d plures dimensiones obtinet, per alteram in qua pauciores, dicendo: d^3 in d^4 habeo d; quod multiplicatum per divisorem & detractum ex dividendo relinquit $ad^3 - (bb - 2ab + aa)dd - 2aabd + aabb$; & quia video literam d etiamnum tot dimensiones possidere in residuo quot in divisore, pergo dividere ad^3 per d^3, ut fiat a, quod in divisorem ductum & subtractum ex residuo relinquit $-(bb - 2ab)dd + aabb - 2a^3b$. Hic vero quia lit. d non amplius tot dimensiones habet quot in divisore, inverto terminos, ponendo divisorem loco dividendi, & residuum loco divisoris, denuoque divido ita: $-(bb - 2ab)dd$ in d^3 habeo $d : (-bb + 2ab)$, facta multiplicatione & subtractione manet residuum $-add + (aa - 2ab)d + 2aab$; & quoniam sufficientes adhuc dimensiones adsunt literæ d, pergo dicere: $(-bb + 2ab)dd$ in $-add$ dat $-a : (-bb + 2ab)$, facta operatione restat $(aa - 2ab)d - a^3 + 2aab$. Hoc jam propter d unius dimensionis pono loco divisoris, sicut $(-bb + 2ab)dd + aabb - 2a^3b$ loco dividendi, atque dico: $(aa - 2ab)d$ in $(-bb + 2ab)dd$ invenio $(-bb + 2ab)d : (aa - 2ab)$ &c. remanetque $(-abb + 2aab)d + aabb - 2a^3b$, quod rursus divisum per $(aa - 2ab)d$ &c. in quotiente exhibet $(-abb + 2aab) : (aa - 2ab)$, remanetque nihil. Unde colligitur, propositas quantitates compositas esse, earumque maximam communem mensuram haberi, si per denominatorem ultimi quotientis $aa - 2ab$ dividatur ultimus divisor; qui quidem ipsemet optatus divisor esset, si quotiens quantitas integra fuisset. Quod si quis hanc operationem cum *Huddeniana* conferre non pigratus fuerit, eadem fere in utraque vestigia deprehendet. Num. LXVII.

NOTA

Num. LXVII.

NOTA XXIX.

De Valore fractionis, cujus numerator & denominator per determinationem quandam nihilo æquales fiunt.

Pag. 424. lin. 15. ad verba: *Excepto tantum.*

Recte hic observat Ampliss. Dn. HUDDENIUS, fieri quandoque posse, ut duæ quantitates habeant communem divisorem, etiamsi is per literam aliquam, eo modo qui hic docetur, inveniri nequeat. Id enim tum fit, cum litera illa, quæ tanquam incognita spectatur, in communi divisore non reperitur; quemadmodum hic *b* non reperitur in $d - a$: quo casu, priusquam concludatur, non dari duarum quantitatum seu æquationum communem divisorem, videndum est, num termini cujuspiam ad arbitrium sumpti cognita quantitas, aut quantitatis divisor aliquis utramque æquationem tollat: nam si non tollit, neque etiam per Reg. *Huddenianam* communis divisor invenitur, tum demum certum fit, plane nullum dari. Verum quidem est, aliud hic criterium proponi quo id cognoscatur: sed cespitavit Auctor falsa nixus hypothesi, quod valor alicujus quantitatis expressæ per fractionem, cujus numerator & denominator per determinationem quandam nihilo æquales fiunt, inveniri nequeat. Et quanquam, post revisionem horum, ipsemet errorem correxerit in peculiari Scheda ad calcem prioris Partis *Geom.* subnexa; restringendo assertum ad illas tantum fractiones, quarum ambo termini per eandem quantitatem sunt indivisibiles; frustranea tamen hæc videtur esse limitatio: quandoquidem omnis fractio quæ terminos habet nihilo æquales, si rationalis est, illos quoque habet communiter dividuos; & si irrationalis est, quanquam terminos habeat communiter individuos, valorem tamen habet omnino definitum & determinatum, non secus ac rationalis quæpiam fractio.

Sed

Sed quia non facile apparet, quo pacto valor fractionis ejusmodi per methodum Dni. DES-CARTES inveniri debeat, & tamen scrutinium istud elegans est, & minime vulgare, lubet hic modum, quo id institui possit, in gratiam Amatorum Geometriæ hujus exponere. Num. LXVII.

Proposita sit Fractio quæcunque, composita inter alias ex quantitatibus a & z, atque talis ut, posita $z = a$, ambo ejus termini evanescant: quæritur quis tum sit fractionis valor? Ad hoc indagandum, converto primo terminos datæ fractionis in alios, eliminando literam z, illamque ponendo majorem vel minorem quam a quantitate aliqua indeterminata x. Deinde pono numeratorem æqualem quantitati tx, ortamque hinc æquationem a surditate libero, adhibitis, si quantitates valde sint implicitæ, iis subsidiis, quæ Dn. HUDDENIUS, pag. 429, seq. explicuit: quo rite peracto, necessario destruentur vel deficient unus pluresve termini in fine æquationis, sic ut illa per x, aut xx, aut x^3 &c. dividi possit. Hinc, præter illos terminos qui per se deficient, etiam ultimum eorum qui remanserint pono nihilo æqualem, & ex hac hypothesi valorem quæro literæ t, quem in locum numeratoris propositæ fractionis substituo. Tandem etiam simili modo cum denominatore operor, eaque ratione novam fractionem propositæ æqualem obtineo. Et si hujus ambo termini adhuc sint æquales nihilo, repeto de novo operationem, ponendo singulos datæ fractionis terminos $= txx$; & si valor literæ t etiamnum evanescat pro utroque termino, pono illos $= tx^3$, hinc tx^4, tx^5, &c. donec prodeat fractio, cujus non uterque terminus evanescit, quod necessario aliquando fiet. Quod si vero, post primam operationem, pro utroque termino valor ipsius t prodiret infinitus, ordirer etiam novam operationem, sed ponerem successive fractionis terminos $= t\sqrt{x}$, $t\sqrt[3]{x}$, $t\sqrt[4]{x}$, &c. donec t pro alterutro vel utroque termino finitum valorem acquireret. In quibus operationibus illud cumprimis observandum est, quod non opus sit tota æquationum reductione uti, sed tantum quatenus ultimo termino inveniendo conducit, qui plerun-

Num. LXVII. que levi negotio ab attento Analysta eruetur. Exemplis res clarior fiet.

EXEMPL. 1. Sit proposita Fractio $(ab - b\sqrt{(2aa - zz)}):(\sqrt{(2aa - az)} - \sqrt[3]{(2a^3 - z^3)})$, cujus ambo termini, posita $z = a$, evanescunt: quæritur ejus valor? Pro z pone $a + x$, erit fractio $(ab - b\sqrt{(aa - 2ax - xx)}):(\sqrt{(aa - ax)} - \sqrt[3]{(a^3 - 3aax - 3axx - x^3)})$. Fiat $tx = ab - b\sqrt{(aa - 2ax - xx)}$; sublata surditate habebis $bbxx + ttxx + 2abbx - 2abtx * = 0$, positoque ultimo termino $2abbx - 2abtx$ æquali 0, invenies $t = b$, qui novus est fractionis numerator. Fiat iterum $tx = \sqrt{(aa - ax)} - \sqrt[3]{(a^3 - 3aax - 3axx - x^3)}$, sive [ponendo brevitatis ergo p loco $\sqrt{(aa - ax)}$, & q loco $\sqrt[3]{(a^3 - 3aax - 3axx - x^3)}$] $tx = p - q$, vel $q = p - tx$. Cubetur æquatio, & prodibit $q^3 = p^3 - 3pptx + 3pttxx - t^3x^3$, omnibusque membris, quæ signum radicale exuerunt, ad unam partem translatis, fiet $q^3 + 3pptx + t^3x^3 = p \times (pp + 3ttxx)$, quæ si porro quadretur, æquationem producet $(q^3 + 3pptx + t^3x^3)^2 = pp(pp + 3ttxx)^2$, quæ ab omni surditate libera est. At quoniam non integra hac æquatione indigemus, sed tantum quatenus duobus ultimis terminis inveniendis inservit, poteris in substitutione omnes illos negligere, in quibus x plures dimensiones acquirit; quocirca loco q^3 pone tantum $a^3 - 3aax$, loco $3pptx$ tantum $3aatx$, loco $(pp + 3ttxx)$ solummodo $a^4 - 2a^3x$, &c. atque sic loco inventæ æquationis $(q^3 + 3pptx + t^3x^3)^2 = pp(pp + 3ttxx)^2$, non nisi $a^6 - 6a^5x + 6a^5tx$ &c. $= a^6 - 3a^5x$ &c. adeoque sublata a^6, quæ se sponte destruit, $-6a^5x + 6a^5tx$ &c. $= -3a^5x$ &c. sive $6a^5tx$ &c. $= 3a^6x$ &c.; unde posito $6a^5tx - 3a^5x = 0$, habebis $t = \frac{1}{2}$ pro novo Denominatore fractionis propositæ, cujus propterea valor erit $b:\frac{1}{2}$, seu $2b$.

EXEMPL. 2. Proponatur Fractio $(a - z)\sqrt{(2aa - 3az + zz)}:(a - \sqrt{(2az - zz)})$, cujus termini, in casu $z = a$, rursus evanescunt, quæque posito $z = a - x$ in istam transmutatur $x\sqrt{(ax + xx)}:(a - \sqrt{(aa - xx)})$. Pone $tx = x$ $\sqrt{(ax}$

$\sqrt{(ax+xx)}$, & ſublata ſurditate $ax^3+x^4=ttxx$, fac ultimum terminum $ttxx$ æqualem nihilo, & habebis $t=0$; vel brevius ita: Quia $tx=x\sqrt{(ax+xx)}$, erit $t=\sqrt{(ax+xx)}$, hoc eſt, cum x, propter $z=a-x$, fingatur nihilo æquari, erit quoque $t=0$. Pone deinde $tx=a-\sqrt{(aa-xx)}$, fiet $ttxx+xx-2atx=0$, & quia $2atx$ evaneſcere debet, erit etiam $t=0$; adeoque fractio propoſita $=\frac{0}{0}$. Sed quia valor ejus nondum ſic cognoſcitur, pone denuo $txx=x\sqrt{(ax+xx)}$, habebiſque $x^4-ax^3:(tt-1)=0$, & quia $ax^3:(tt-1)$ debet evaneſcere, colliges ipſum t pro numeratore valoris eſſe infiniti. Simili modo operare cum denominatore, ponendo $txx=a-\sqrt{(aa-xx)}$, & invenies $t=\frac{1}{2}a$; adeo ut ipſa fractio abſolute infinita cenſenda ſit, quæ contra prorſus evaneſceret, ſi numerator finita, denominator infinita quantitas fuiſſet. Sed, quod hic peculiariter obſervandum venit, ſi poſt ſecundam hanc operationem ambo fractionis termini, qui poſt primam evanuerant, infiniti redderentur, ſic ut nec ita fractionis valor cognoſci poſſet, non aſſumendum eſſet in ſeq. operat. tx^3, tx^4 &c. neque etiam $t\sqrt{x}$, $t\sqrt[3]{x}$, &c. ſed $tx\sqrt{x}$, &c.. Omitto alias obſervationes & cautelas, quas attenta harum rerum meditatio Lectori ſuggeret *. Num. LXVII.

NOTA XXX.

Retegitur ars, qua HUDDENIUS *Regulam ſuam XI invenire potuerit.*

CUm inventio tot tamque differentium Theorematum, quæ hac Regula continentur, non poſſit non magnam admirationem excitare apud ignaros, quos artificium methodi latet, non ingra- Pag. 439. ſeq. ad Reg. XI.

* De hujuſmodi Fractionum valore inveniendo, videatur *Analyſis inf. parv.* Art. 163. ſeq. Item *Joh.* BERNOULLI Schediaſma, *Act. Erud. Lipſ.* pag. 375. m. Aug. 1704.

Num. LXVII. ingratum iis ſpero fore, ſi qualecunque arcanum retegam, & in una alterave parte Regulæ modum oſtendam, quo non tantum iſta, ſed & pleraque alia ab ingenioſiſſimo Epiſtolæ hujus Auctore inveniri potuerunt. Methodus enim ubique eadem eſt, & in eo conſiſtit, ut ſupponantur ſtatim duæ æquationes ejuſmodi quales quæruntur, ac deinde, facta ipſarum multiplicatione per ſe invicem, comparentur ſeparatim omnes termini productæ cum omnibus terminis propoſitæ æquationis, quo inde coefficientes quæſitarum æquationum elici & determinari poſſint. Quæ quidem methodus non differt niſi in applicatione ab illa, qua ipſe Dnus. DES-CARTES in conſtructionibus Problematum ſolidorum & hyperſolidorum inveniendis uſus eſt, & quam alias etiam ſolennem ſibi fuiſſe fatetur, pag. 49. Imo hæc illa eſt, qua quicquid in Geometria ardui & præclari uſpiam habetur, reperiri debuit; cum fruſtra ſane hæc & talia a priori tentarentur.

Quod ſpeciatim Regulam hanc undecimam concernit, obſervamus primo, quod ſeſe extendat tantum ad illas æquationes, quæ ex multiplicatione duarum produci poſſunt, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt; cujus rei ratio eſt, quod ſi quis ſimilia condere vellet Theoremata pro illis, quæ ex duabus completis producuntur, is incideret in æquationes nihilo ſimpliciores iis, quas ſibi reſolvendas propoſuit. Deinde animadvertimus, quod nonnulli Diviſores copulantur vocula *&*, quando videlicet formula æquationis propoſitæ uno tantum modo in duas æquationes reſolvi, ſed ejus Diviſor ex plurium terminorum collatione determinari poteſt: alii disjunguntur vocula *vel*, quoties illa etiam pluribus modis in duas reſolubilis exiſtit.

Ex. gr. Sit propoſita æquatio hujus formæ x^6 * *, *, sxx, tx, $v = 0$, deturque illam dividi poſſe in duas alias, quarum una ſit unius, altera 5 dimenſionum. Ponantur hæ eſſe $x + y = 0$, & $x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, e quarum ductu producitur $\begin{array}{l} x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + ey = 0, \\ \quad\;\; + y \quad\; + ay \;\; + by \;\; + cy \;\;\; + dy \end{array}$

quæ terminotenus comparata cum propoſita x^6, *, *, *, sxx,

tx,

$tx, v = 0$, ſequentes exhibet æquationes, $a + y = 0$, $b + ay = 0$, $c + by = 0$, $d + cy = s$, $e + dy = t$, & $ey = v$; ſive $a = -y$, $b = -ay = yy$, $c = -by = -y^3$, $d = s - cy = s + y^4$, $e = t - dy$, & $ey = v$. Et quoniam in æquatione $x^5 + ax^4$ &c. aliquis terminus nihilo æqualis requiritur, videndum quis ille ſit: facile autem apparet, nec a, nec b, nec c, nihilo æquari poſſe, cum ſecus etiam evaneſceret y, contra hyp. neque etiam e, qui ultimus terminus eſſe debet; ſed ſolum d; quo caſu fiet $y^4 = -s$, $e = t$, & $ey = v$: unde porro fluit $y = v : t = \pm\sqrt{}\sqrt{} - s = -st^3 : v^3 =$ &c. adeoque $x + y = x + v : t = x \pm \sqrt{}\sqrt{} - s = x - st^3 : v^3 =$ &c. qui ſunt ipſiſſimi Diviſores æquationis propoſitæ, qui in Auctore habentur, pag. 442. Num. LXVII.

Rurſus proponatur Æquatio $x^5, px^4, *, *, sx, t = 0$, ponaturque dividi poſſe per æquationem completam duarum, & aliam trium dimenſionum. Sunto hæ $xx + yx + z = 0$, & $x^3 + axx + bx + c = 0$, e quarum multiplicatione oritur æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^5 + ax^4 & + bx^3 & + cxx & + cyx & + cz = 0 \\ + y & + ay & + by & + bz & \\ & + z & + az & & \end{array}$$

conferenda cum propoſita

$x^5, px^4, *, *, sx, t = 0$. Quod quinque novas æquationes ſubminiſtrat: $a + y = p$, $b + ay + z = 0$, $c + by + az = 0$, $cy + bz = s$, & $cz = t$. Sed quia in æq. $x^3 + axx$ &c. aliquis terminus deficere ſupponitur, video que duos hic deficere poſſe, pono primo $a = 0$, deletiſque in novis his æquationibus iis membris, in quibus a habetur, reperio per primam earum $y = p$, nec non collatis 2, 3 & 5ta æquationibus, $z = \pm\sqrt{(t : p)}$; vel, coll. 2, 3 & 4ta æq $zz - ppz + s = 0$, vel, coll. 2, 4 & 5ta æq $z^3 + sz - pt = 0$; vel denique coll. 3, 4 & 5ta æq. $z = ppt : (ps + t)$; adeo ut æquatio propoſita ſemper dividi hoc caſu poſſit per $xx + px + z$, exiſtente vel $z = \pm\sqrt{(t : p)}$, vel $zz - ppz + s = 0$, vel $z^3 + sz - pt = 0$, vel $z = \pm ppt : (ps + t)$, quorum diviſorum omnium tantum primus in Auctore occurrit, pag. 447.

Num. LXVII. Si deinde ponam $b = o$, delendo ea membra, in quibus b habetur, invenio iterum collatis omnifariam æquationibus quaternis varios valores pro y & z. Sed Auctor illorum tantum rationem habuit, qui fluunt ex comparatione tum 1, 2, 4 & 5[tæ], tum 2, 3, 4 & 5[tæ] æquationis; quippe quarum illa præbet $y = p + t : s$, & $z = yt : s$; hæc $y = \pm s \sqrt{s : t}$, & $z = \pm \sqrt{s}$.

Postquam ita singulos terminos intermedios in æquatione $x^3 + axx$ &c. nihilo æquales suppoSuimus, nunc ambo simul deficere supponendi essent, faciendo a & $b = o$; sed statim apparet, non posse utramque evanescere, quin, contra hyp. evanescat quoque z. Adeo ut Æquatio 5 dimens. ejus formæ cujus est proposita, non possit ex æquatione quadrata completa per cubicam nisi gemino modo produci, nempe sic, ut in cubica vel deficiat secundus terminus tantum, vel tertius tantum. Atque ad eundem quoque modum prolixiora illa Theoremata quartæ & quintæ partis Regulæ hujus Tyrones invenire seu examinare possunt, in quo scrutinio illud cumprimis observare debent, ut omnes variationes possibiles enumerent, quibus fieri potest, ut hi vel illi termini in altera duarum æquationum, e quarum ductu proposita produci fingitur, deficiant.

NOTA XXXI.

Analysis Regulæ XVII. Huddenianæ.

Pag. 469 & 470. ad Reg. XVII. EXhibet hic porro Auctor Epistolæ quædam Theoremata pro reducendis æquationibus, quæ per alias nullo termino carentes dividi possunt. Horum primum & simplicissimum, quod æquationibus quadrato-quadratis inservit, sic eruitur: Positis duabus æquationibus quadratis, $xx + ax + b = o$, & $xx + yx + h = o$, comparetur productum ipsarum

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + bxx + byx + bh = o, \\ \quad + y \quad + ay \quad + ah \\ \quad\quad\quad + h \end{array}$$

quoad

quoad singulos terminos cum æquatione proposita $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ut exinde prodeant quatuor novæ æquationes, $a + y = p$, $b + ay + h = q$, $by + ah = r$, & $bh = s$. Deinde, neglecta secunda, qua non indigemus, cæteræ conferantur inter se, quo fiet ut eliminatis ipsarum ope literis a & b, inveniatur $y = (r - hp) : (s : h - h)$. Excepto tantum, cum s determinatur ad hh, & simul r ad hp; quo casu ambo fractionis termini evanescunt, & in causa sunt, cur y ex his solis datis inveniri nequeat: quare tum, relicta tertia æquatione, secunda in auxilium vocanda est, qua cum cæteris debito modo collata, reperitur $y = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + 2h - q)}$. E quibus manifesta fiunt Theoremata, quæ hic dedit Auctor; simulque cætera quoque difficiliora investigandi modus patescit. Num. LXVII.

NOTA XXXII.

Ratio Regulæ Huddenianæ *ad transformandam æquationem propositam in aliam cujus ultimus terminus pauciores habeat divisores.*

Rationem hujus operationis satis percipiet attentus Lector ex iis, quæ supra * commentati sumus; cum perinde sit, addere producta coefficientium æquationis per numeros continue proportionales ab unitate; atque surrogare hunc, qui unitatem sequitur, in locum x, & tunc aggregatum ipsorum terminorum sumere. Pag. 480. §. *Assumto.*

* Nota XXIII. pag. 698. & seq.

Num. LXVII.

IN GEOMETRIÆ PARTEM II.

NOTA XXXIII.

Cautio observanda in Divisionibus instituendis.

Pag. 15. & Pag. 16.

IN Divisionis operatione id præprimis Tyrones monendi sunt, ut assumpto membro aliquo Divisoris [in quo quædam litera plurimas vel paucissimas dimensiones habet] pro principali Divisore, non primum quodlibet quod occurrit Dividendi membrum per ipsum dividant, sed tale seligant, in quo eadem litera itidem maximum vel minimum dimensionum numerum habet; quod similiter in toto operationis decursu, quotiescunque de novo inveniendo quotiente agitur, attendendum venit. Ita si in Exemplo 2°. pag. 15 *, pro primario divisore statuamus $\frac{2}{3}ab$, ubi litera a minimum, aut b maximum numerum dimensionum habet, dividi per ipsum debet $\frac{4}{9}aab^3$, non $\frac{13}{12}a^4b$, & si pro divisore seligamus $-\frac{1}{2}aa$, dividenda quantitas $-a^5$ [ut factum ab Auctore Introductionis] non alia. Quod si vero in divisore pariter atque in dividendo plura habeantur membra, in quibus litera aliqua maximum vel minimum divisorum numerum habet; illa litera neglecta, habenda est ratio reliquarum. Ita quoniam in secundo Exemplo pag. 16 †, dividendus continet duo membra $-4f^4u^4q$ & $+4f^3u^4q$, in quibus lit. u quatuor, & divisor duo, in quibus eadem duas dimensiones obtinet, nempe $-ffuu$ & f^3uu; siquidem lubeat per alterutrum horum, puta $+f^3uu$ divisionem instituere, divido per ipsum $-4f^4u^4q$, non vero $+4f^3u^4q$; cum reliqua litera f plures ibi quam hic dimensiones

* Ubi dividendus proponitur $\frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5$ per $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa$.

† Ubi $\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3u^2q-fu^2q-4f^4u^4q+4f^3u^4q$ dividendus proponitur per $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f-ffuu+f^3u^2$.

nes habeat, uti quoque plures habet in $+f^3uu$ quam in $-ffuu$. Horum vero obſervatio ideo neceſſaria eſt: quia ſecus ſi Tyrones faxint, atque eum ſemper in dividendo ordinem ſequi velint, quo propoſitæ ſunt quantitates, fieri inter operandum poteſt, ut ſubinde in orbem redeant, & vel nullum diviſionis finem inveniant, vel eum demum poſt ſuperfluas circuitiones aſſequantur. Num. LXVII.

NOTA XXXIV.

Dignoſcere num propoſitæ quantitates ſurdæ communicantes ſint, nec ne.

Poteſt adhuc aliter cognoſci, num propoſitæ quantitates ſurdæ communicantes ſint, necne; neque opus eſt partem illarum prius ex ſigno radicali liberare, quod ſæpe ob diviſorum multitudinem non parum moleſtum. Criterium tale: Ducta quantitatum propoſitarum una in alteram, ſi ſint affectæ latere quadrato; aut in quadratum alterius, ſi ſint affectæ latere cubico; aut in cubum, ſi biquadratico; aut in biquadratum, ſi ſurdeſolido &c. conſideretur, an productum inde ortum ſit perfectum quadratum, aut cubus, aut biquadratum, aut ſurdeſolidum, &c. nam ſi tale ſit, quantitates datæ communicantes erunt; ſin minus, non erunt: & ſi communicantes ſunt, erunt ad ſe invicem, ut dicti producti radix quadrata, aut cubica &c. ad alteram quantitatum rationalium, cum cujus poteſtate multiplicatio facta fuit. Ex. gr. Quantitates $\sqrt{27}$ & $\sqrt{48}$ ſunt communicantes, quia 1296 productum 27 per 48 eſt quadratum; cujus radix cum ſit 36, erit $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{48}$, ut 27 ad 36, ſeu ut 3 ad 4. Ita $\sqrt[3]{40}$ & $\sqrt[3]{135}$ ſunt communicantes, quoniam 216000 productum quadrati ex 40 per 135 eſt cubus, cujus radix 60; unde $\sqrt[3]{40}$ ad $\sqrt[3]{135}$ eſt, ut 40 ad 60, ſeu 2 ad 3. Sed $\sqrt[5]{20}$ & $\sqrt[5]{140}$ non communicantes ſunt, quia 22400000 productum biquadrati ex 20 per 140 non eſt perfectum ſurſolidum. Pag. 35. §. *Ratio autem.*

Simili indicio conſtat, num duæ quantitates ſurdæ potentia ſint

Num. LXVII. ſint commenſurabiles : Facta enim multiplicatione quadrati unius per alteram, ubi ſunt affectæ latere cubico; aut per quadratum alterius, ubi latere biquadratico; aut per cubum, ubi ſurſolido &c. ſi productum inde ortum deprehendatur eſſe verus cubus, aut quadrato-quadratum, aut ſurſolidum &c. quantitates datæ ſaltem potentia commenſurabiles ſunt, earumque quadrata erunt, ut producti radix competens ad alteram quantitatum rationalium, cum cujus poteſtate variabili multiplicatio facta fuit. Ex. gr. $^3\surd 243$ & $^3\surd\ 576$ ſunt potentia commenſurabilia, eorumque quadrata, ſicut 324 ad 576, ſive 9 ad 16; quoniam 324 eſt radix cubica numeri 34012224 producti ex multiplicatione quadrati 243 per 576. Non ſecus etiam, ſi cubus alterutrius e datis quantitatibus ducatur in alteram, vel in quadratum alterius, vel cubum, vel ſurde-ſolidum &c. prout affectæ ſunt vel latere biquadratico, vel ſurde-ſolido, vel quadrato-cubico &c. atque ex hac multiplicatione producatur perfectum biquadratum, vel ſurde-ſolidum, vel quadrato-cubus &c. erunt propoſitæ quantitates potentia cubica commenſurabiles, ſeu ipſarum cubi erunt ut numerus ad numerum. Et ita conſequenter eandem ſemper obſervando progreſſionis legem pro ſuperioribus potentiis. Plerunque vero non eſt opus huc progredi. Quotieſcunque enim quantitates ſurdæ ſunt commenſurabiles ſecundum aliquam potentiam, cujus exponens ad exponentem ſigni radicalis ſit primus, etiam ſecundum longitudinem cæteraſque omnes potentias commenſurabuntur. Et ſi diviſor maximus exponentium ſigni radicalis & potentiæ, ſecundum quam propoſitæ quantitates commenſurantur, eſt binarius, etiam ſecunda potentia, omnibuſque illis quas binarius metitur, commenſurari poterunt. Et ſi diviſor exponentium maximus eſt ternarius, poterunt commenſurari ſecundum tertiam potentiam omneſque illas quas ternarius metitur. Adeo ut ſi datæ quantitates ſurdæ nec longitudine, nec potentia ſecunda, nec tertia &c. ſunt commenſurabiles, etiam commenſurari nequeant ſecundum ullam aliam, cujus & ſigni radicalis exponentes tales ſunt, ut unitas, binarius, aut ternarius &c. ipſorum maxima

xima ſit communis menſura. Sed non attinet iſtis diutius immorari. Num. LXVII.

NOTA XXXV.

Demonſtratio Regulæ extrahendi Radicem quadratam ex binomiis.

Regula hæc extrahendi Radicem quadratam ex Binomiis, fundatur in Prop. 55 & ſeqq. Lib. X. *Elem.* EUCL. potuitque analytice ſic inveniri: Ponatur binomium $a+\sqrt{b}$, ejuſque radix $x+\sqrt{y}$; erit igitur quadratum hujus $xx+y+2x\sqrt{y} = a+\sqrt{b}$. Fiant duæ æquationes ſeparatæ, $xx+y=a$, & $2x\sqrt{y}=\sqrt{b}$: per primam habetur $xx=a-y$, per alteram $xx=b:4y$; unde & $a-y=b:4y$, ſeu $yy=ay-\frac{1}{4}b$, & $y=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{(aa-b)}$; ac proinde $xx\,[a-y]=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{(aa-b)}$. Quare tandem fiet $x+\sqrt{y}$ radix quæſita binomii $=\sqrt{(\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{(aa-b)})}+\sqrt{(\frac{1}{2}a\mp\frac{1}{2}\sqrt{(aa-b)})}$; quod id ipſum eſt, quod hæc Regula præcipit. Pag. 41. De Extractione Radicis &c.

FINIS.

N°. LXVIII.

NOVA
ET. SINGULARIS
GEOMETRIÆ PROMOTIO,
Circa dimensionem quantitatum Curvarum, *per* D. T. *

Act. Erud. Lipf. 1695. Nov.p.489.

CUm variæ in Mathesi dentur viæ ad easdem veritates invenien-das ducentes, plurimum in eo ponendum est studii, simplicissima ut investigetur. Quamvis enim hoc ipsum non sit apprime necessarium in omnibus difficultatibus particularibus, maxime tamen requiritur in principiis fundamentisque ponendis, quæ ita sunt generalia, ut tota iisdem Mathesis innitatur; ad quæ pertinet *genesis omnium curvarum*. Quapropter, postquam harum omnium facillimam descriptionem *per focos* reperi, statim eandem cum Publico communicavi in *Medicina mentis*, ostendens, quam latum hæc campum nobis aperiat, infinitorumque novorum, singularium, & facillimo negotio decerpendorum inventorum feracem, ut augmentum veritatis, quod non unius est hominis, conjunctis viribus ab eruditis Viris eo melius promoveretur. Neque parvam mihi attulerunt lætitiam ea, quæ Dnus. LEIBNITIUS, & doctissimorum nobile par Fratrum BERNOULLIORUM jam præstiterunt, *Actis*que inseruerunt *Eruditorum*. Sed cum hæc curvarum genesis per focos nimiam præ se ferat simplicitatem, tantique momenti non videatur, ut ex ea tanta tamque præclara & utilia possint derivari; non ipse solum alia nova inventa in *Actis Eruditorum* exhibui, sed in posteriori quoque *Medicinæ mentis* editione, alia quædam corollaria non vulga-

* DE TSCHIRNHAUSEN.

vulgaria adjeci, ut alios quoque ad hanc rem penitius pensitandam excitarem. Nota mihi quidem plura, elegantia, præstantiaque sunt consectaria, quorum hactenus nullam, nisi privatim apud Viros maximi ingenii, feci mentionem; arbitratus illa quondam ob novitatem usumque singularem fore gratiora, cum publici juris ea faciendi mihi dabitur occasio. Quoniam vero an brevi hoc futurum sit, cum eo non vivam in otio, quod hæc studia vel maxime requirunt, nescio; nonnulla ex his in publicum producere constitui, ejus quidem momenti, ut non displicitura credam Geometris; eo fine, ut vel hoc ipso augmentum veritatis, sin minus per me ipsum, per alios tamen, qui magis abundant otio, promoveatur. Num. LXVIII

I. Ex hac ergo curvarum genesi per focos intellexi, præter unicam & simplicissimam *Hugenianam* evolutionem dari innumeras alias; ita ut quælibet curva infinitis possit modis evolvi, sequanturque hinc dimensiones curvarum infinitis modis, ut alio tempore ostendi. Perspexi etiam, ipsam spatiorum curvilineorum dimensionem generalissime hinc derivandam, & ea quidem ratione, quæ admodum simplex est, & in qua singularia hæc occurrunt. 1°. Uti notum pervulgatumque est, spatiorum circularium dimensiones absolvi ductu lineæ cujusdam rectæ in arcum circuli; ita universaliter hoc ipsum omnibus competit *spatiis curvilineis*, ut scilicet sint *æqualia producto alicujus rectæ in arcum curvæ alicujus*, occurrantque hic plurima circulari dimensioni analoga. 2°. *Curvæ quarum ope reliquarum curvarum metior spatia*, quæque primæ quasi curvæ existunt & præcipue sunt considerandæ, proprietates habent valde notabiles, & in his, quod multis erit inexpectatum, *curvæ quoque sunt mechanicæ*, quas Cartesius ex Geometria perperam, ut in *Medicina mentis* clare probavi, eliminavit, quarum proinde usus hinc redditur in Geometria manifestior. 3°. *Curvæ illæ*, per quas mensurantur reliqua spatia, *in lineas rectas abeunt, cum spatium aliquod absolute est quadrabile.* Unde facile ex ipsa genesi dijudicari potest, utrum aliquod spatium quadrabile sit, necne. Derivatur quoque inde, figuras clausas non admittere quadraturam, intellige ordinariam; id quod consentit cum iis, quæ habet Dominus Newton †; neque difficulter cognosci potest, quænam figuræ clausæ sint, cum alias multa possint earum figurarum afferri exempla, quæ videntur quidem, nullatenus tamen sunt clausæ.

Ut autem mens mea eo melius possit intelligi, exemplo, quod dictum est illustrabo. Sit ellipsis AFGE [*Fig.* 1]; sumptoque radio æquali semidiametro minori, describatur ex centro C circumferentia BFD, tandemque pro lubitu ducatur ex C recta CG, & HG parallela AE. Dico rectangulum

† Vide N°. LXVI pag. 650, Nota g, & N. LXXI, LXXII, Art. 2.

Num. LXVIII. gulum ex recta AE in arcum circularem HD esse semper quadruplum sectoris elliptici CGE †, ac proinde hoc modo facile *spatium ellipticum in æquales partes ex puncto C dividi potest.* Idem obtinet in parabola & hyperbola, si his omnia, ut decet, adplicentur; ea tamen cum differentia, ut quemadmodum in ellipsi, prout jam vidimus, dimetienda adhibetur arcus curvæ circularis HD, seu talis curvæ, ubi normalis ad tangentem est constans seu datæ rectæ æqualis; ita in hyperbola qualibet mensuranda adhibendus sit arcus curvæ, in qua tangens ipsa est constans seu datæ rectæ æqualis, adeoque curvæ, quæ ex mente Cartesii est mechanica; in parabola vero alia curva, ubi normalis ad tangentem & ipsa tangens sunt æquales constanti quantitati, hoc est, linea recta, assumatur. Atque sic unico theoremate omnium sectionum conicarum per rectangulum ex constante recta in aliam curvam aut rectam ducta traditur dimensio. Quæ quidem spero Geometris non minus grata futura, quam monitum Hugenii, quo simile quid in hyperbola æquilatera a se deprehensum indicavit; cum hæc omnia modis plane diversis eruta, multoque sint universaliora, nec solum omnibus hyperbolis, sed infinitis aliis curvis applicari possunt.

Quænam autem porro hinc conclusiones in curvis superiorum graduum, quæ tres pluresve focos habent, consequantur, periti harum rerum insigni cum voluptate per se ipsos facile experientur. Possem enim plura huc elegantia & universalia theoremata adferre; sed ne ipsis desiderium minuam hæc suo marte indagandi, unico tantum exemplo assertioni meæ fidem faciam.

Sit curva FG [*Fig.* 2], quæ descripta sit ope quatuor focorum A, B, C, D, sitque E centrum gravitatis quatuor punctorum A, B, C, D: dico, si ex quinque his punctis, versus duo puncta F & G pro lubitu assumpta in curva, ducantur rectæ, spatia AFG, BFG, CFG, DFG quadrupla esse semper spatii EFG; si autem quinque essent foci, fore quintupla, & sic porro in infinitum. Sed de his satis. *

II. Notum est in circulo circumferentias esse inter se ut diametros, & spatia circularia similia ut diametrorum quadrata; non autem pervulgatum est, quod animadverti, dari unicum tale theorema pro omnibus curvis ejusdem speciei, ex quo, verbi gratia, curvarum ellipticarum & hyperbolicarum ratio ad invicem innotescit, quæ nos hactenus latuit, possuntque infinita nova & singularia circa omnes curvas derivari. Id quod specimine aliquo illustrabo.

Sint duæ parabolæ AE & BD [*Fig.* 3] quarum focus C; ducaturque recta CDE. Dico *curvam parabolicam AE esse ad curvam parabolicam*

† Vid. N°. sequenti, Art. I. * Ibidem, Art. II.

bolicam BD, ut minoris latus rectum ad majoris latus rectum. Unde si ratio laterum rectorum sit dupla, curva AE dupla erit curvæ BD. Neque absolute necesse est, ut eundem focum C habeant; potest enim punctum ad libitum assumi, & nihilominus tamen ratio, quam curvæ ad se invicem habent, determinari. * Num. LXVIII.

III. Cognita quoque est ratio, quam partes curvæ circularis ad se invicem habent, sed circa quasvis alias curvas hæc nondum ostensa fuit a Geometris. Illis ergo forte non ingratum accidet, si ipsis significavero, me methodi universalis esse compotem, *in qualibet curva, data portione ejusdem, aliam semper assignandi, quæ datam rationem ad priorem obtinet*; cujus rei specimen quoque exhibebo.

Sit parabola ACDEF [*Fig.* 4], cujus focus B, sitque data portio curvæ CD, & alia assignanda EF, ita ut CD sit ad EF, ut data linea GH ad IK. Ductis lineis BC & BD, fiat ut quadratum GH ad quadratum IK, ita recta BC ad rectam BE, & BD ad BF: Dico curvæ parabolicæ portionem CD ad EF esse in ratione data. Sit, exempli gratia, GH ad IK ut 1 ad 2, & fiat BE quadrupla BC, & BF quadrupla BD, erit portio curvæ EF dupla partis CD †. Occurrit hic quidem casus, ubi peculiaria quædam observanda; sed cui demonstratio præcedentium nota, facile videbit quid sibi agendum, aliaque egregia hinc eliciet; verbi gratia, modum *in curvis assignandi spatia datam rationem habentia, licet ipsorum dimensio sit incognita*, prout hoc in specie circa præsens exemplum in hyperbola æquilatera, cujus dimensio analoga est parabolicæ, nova & hactenus incognita ratione fieri potest, ut assignentur spatia quæ datam lineæ ad lineam rationem inter se habent: multaque alia præclara & plane nova theoremata, vel circa ipsas conicas sectiones, quæ tamen hactenus nocturna diurnaque manu quasi versatæ fuerunt a Geometris. Demonstrationes enim horum omnium afferre & prolixum nimis foret & supervacuum, cum hæc inventa præcipue dicata sint Geometris primi ordinis, quibus jam notum est, quomodo ex datis conclusionibus universalibus circa dimensionem quantitatum, demonstrationes, via retrograda, facile possint investigari.

IV. Constitueram hic subsistere, sed commodum incidit in manus meas *Johannis* BERNOULLII meditatio de dimensione curvarum linearum per circulares; quod egregium inventum & mirifice me delectavit, & effecit, ut hæc pauca adjicienda duxerim. Vir hic Celeberrimus præcipue respexit in eruendo hoc Problemate ad evolutionem *Hugenianam*; sed quia juxta descriptionem meam curvarum per focos, quælibet curva infinitis modis potest evolvi, hinc ejus doctrina infinities amplificari poterit,

* Vide N°. seq. Art. III. † Ibidem, Art. IV.

Num. LXVIII. terit, adeoque Geometria singulare hoc modo augmentum recipiet. Addam vero & aliud, quod in tempus aliud reservaveram. Notum est, quod dato cuilibet spatio infinita alia spatia, diversæ naturæ, æqualia perfacile inveniri possint; sed idem in curvis lineis efficiendi nemo adhuc ostendit rationem. Si enim via ordinaria rem aggrediamur, ad tangentium methodum inversam deducimur, cujus ingeniosissima nobis specimina dedit Illustrissimus Vir *Marchio* Hospitalius. Licet autem hanc quoque methodum probe excoluerim, & mihi fere omnimode satisfecerim, non tamen ea hic præstat, quod comparari possit cum methodo universali, quam non ita pridem inveni, ope cujus *infinitæ diversæ curvæ possunt designari datæ curvæ absolute æquales.* Specimina hujus rei alio tempore exhibiturus sum: jam enim vix licuit ob circumstrepentia negotia ad amicorum instantiam præcedentia litteris consignare.

N°. LXIX.

JACOBI BERNOULLI

OBSERVATIUNCULA

Ad ea quæ Mense Novembri 1695

De Dimensionibus Curvarum publicata leguntur,

Auctore D. T.

Acta Erud. Lipſ. 1696. Jun. p. 260.

PRæclara sunt, & e maxime desideratis illa, quæ hic promisit Nobilissimus D. T.* atque si ullatenus præstari possunt, ab ejus certe ingenio expectanda erunt. Optandum tantum esset, ut cum de excellentia Methodi, quam tegere voluit, per exempla nobis judicandum sit, talia selegisset quæ

* De Tschirnhausen. N°. præced.

quæ haud facile aliunde ſolvi poſſent, aut aliis exceptionibus obnoxia forent; qualia num iſta ſint, quæ dedit Vir eximius, paucis examinandi veniam ab ipſo flagitamus. Num. LXIX.

Primo, quod de ſpatio elliptico nos docet in *Fig.* 1, nulla ſingulari methodo videtur indiguiſſe, cum ex natura ellipſis ſimplici proportione concludatur; juncta enim CH & producta GH donec ipſi CF occurrat in I, quoniam ubique IH eſt ad IG ſicut CD eſt ad CE, erunt tum ſpatia IHDC, IGEC, tum triangula IHC, IGC, tum his ablatis ſectores CHD [ſive $\frac{1}{2}$CD in DH] & CGE, ut CD & CE, hoc eſt, erit CE in DH = 2 CGE. Et patet generaliter, quod ſi loco circuli & ellipſis ſubſtituantur quævis aliæ curvæ *ejuſdem generis*, hoc eſt, quæ habeant applicatas IH, IG in conſtante ratione, fore in eadem illa ratione etiam ſectores CHD, CGE.

II. Quod deinde proprietatem ſpectat, quam focis curvarum per fila deſcriptarum attribuit, *Fig.* 2, omnibus illa indifferenter punctis eſt communis, & ex generaliſſima centri gravitatis natura manat; ſumptis etenim in quacunque curva quibuſcunque & quotcunque punctis A, B, C, D; eorumque centro gravitatis E, ſemper vel ſumma trilineorum AFG, BFG, CFG, DFG; vel [ſi punctorum nonnulla ad convexas curvæ partes aſſumantur] differentia trilineorum quæ ab una & eorum quæ ab altera parte ſunt, trilinei EFG totuplex erit quot aſſumpta puncta fuerint. Sed & præter punctum E infinita alia puncta idem præſtant, quæ in axe aliquo æquilibrii per E tranſeunte exiſtunt. (*) Conſiderationem igitur focorum nihil hic ad rem facere apparet.

(*) Nempe, ſi ducatur recta FG, & in eam demittantur ex ſingulis punctis A, B, C, D, E normales Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; erit, ex natura centri gravitatis 4 Ee = Aa + Bb + Cc + Dd + Ee adeoq. 4 Ee × $\frac{1}{2}$ Fg = Aa × $\frac{1}{2}$ Fg + Bb × $\frac{1}{2}$ Fg + Cc × $\frac{1}{2}$ Fg + Dd × $\frac{1}{2}$ Fg, hoc eſt quater Triangulum rectil. EFG = Triang. rectil. AFG + BFG + CFG + DFG; & addito utrinque ſegmento FG quater, erit quater ſpatium curv. EFG = ſpatiis AFG + BFG + CFG + DFG. Manifeſtum autem eſt idem præſtare ſingula puncta ſumpta in recta quæ per E ducitur parallela ipſi FG.

N.LXIX. III. Quod porro asseritur de portionibus parabolarum communem focum habentium, *Fig.* 3, etiam procedit cum diversos habent, modo punctum C, e quo recta CE educenda est, tale assumatur, ut ipsa CA, CB, sint in ratione Parametrorum; at nihil hic peculiare tribui video parabolis, quod non idem quoque valeat de omnibus *ejusdem speciei* curvis, hoc est, curvis similibus & circa communes axes, focos, centra, aliave puncta similia similiter constitutis; puta, si curvæ AE, BD, forent duæ ellipses vel hyperbolæ similes circa eundem axem AC, & communem focum, seu centrum, aliudve punctum simile C similiter constitutæ, semper essent abscissæ portiones curvarum AE, BD, in ratione rectarum similium abscindentium AC, BC, vel CE, CD, utræque nimirum in ratione constante: quorsum applicari possunt ea, quæ jam anno 1692 Mense Maio * ad spiram mirabilem de triangulo circa angulum [hic infinite parvum ECD] rotato & proportionaliter fluente dicta sunt.

IV. Quod denique subjungit Nobilissimus Auctor de assignandis in parabola portionibus datam ad invicem rationem habentibus, *Fig.* 4, id rogo ut revideat; deprehendet enim rem aliter se habere, atque in locis a vertice A tantillo remotioribus portionem CD ad EF semper minorem obtinere rationem, quam GH ad IK. Quorum omnium ingeniosissimum Auctorem non ideo commonefacimus, ut præstantissima ejus inventa, quibus ipsi plenam fidem adhibemus, ullatenus suspecta reddamus, sed illum invitemus potius, ut vel ipsam suam methodum praeclarissimam nobiscum communicare dignetur, vel si hanc diutius nos latere cupit, selectioribus saltem speciminibus eandem nobis comprobet. Quibus si addere velit nonnulla methodum tangentium inversam concernentia, tentare poterit tum Problema Decembris 1695 †, cujus & ego solutionem dabo proxime, tum alia hinc inde in *Actis* occurrentia, quæ nondum solutionem acceperunt, ipsique adeo uberem materiam Publico gratificandi suppeditabunt.

N°. LXX.

* N°. XLIX. pag. 301. Vide etiam ibid. Not. I. Prop. I. pag. 497.
† Supra N°. LXVI. pag. 663.

N°. LXX.

JACOBI BERNOULLI CONSTRUCTIO GENERALIS *Omnium Curvarum Transcendentium,*

Ope simplicioris Tractoriæ & Logarithmicæ.

METhodus Tangentium inversa, in qua dubio procul summus Geometriæ apex consistit, tribus potissimum partibus absolvitur, quarum prima versatur in reducendis differentialibus altiorum generum [seu differentio - differentialibus] ad differentialia primi generis ; altera in separandis litteris indeterminatis cum suis differentialibus a se invicem ; & tertia in construendis æquationibus hoc modo reductis. In singulis perficiendis varie huc usque occupati fuimus , quotquot promotioni hujus Scientiæ operam nostram addiximus. Ad primam inter alia pertinet Theorema de radiis circulorum osculantium, cujus Mense Decembri 1695 , pag. 538 * mentionem injeci, quodque in secundis differentiis ad primas reducendis usum habere dixi, ut suo tempore uberius explicabo †. Ad secundam spectat, quod ibi- *Acta Erud. Lips. 1696. Jun. p. 261.*

* Supra pag. 641.

† Vid. N°. CIII. Art. X.

No. LXX. ibidem ad calcem meditationis subjunxi Problema *, cujus solutionem, ni alius quispiam interea me prævenerit, brevi quoque exhibebo †. Restat tertia Methodi pars, de qua nobis impræsentiarum specialius agendum est, & quæ constructiones curvarum transcendentium concernit. Omnes construendi modi, quorum huc usque specimina in *Actis* comparuerunt, ad duo vulgo nota genera revocari possunt; fiuntque vel per motum continuum, eumque seu naturalem, seu artificialem, vel per inventionem plurium punctorum. Motum naturalem voco, quem natura ipsa sibi relicta sponte producit: artificialem quem Ars insuper moderatur. Ad illum refero constructiones Mense Decembri 1695, pag. 551 & 552 ‡, memoratas, quæ fierent per elastra vel funes debita conditione imbutos: ad hunc, quæ per tractiones, qualem non sine intelligentium approbatione dedit Ingeniosissimus D. LEIBNITIUS, Mense Septembri 1693. Constructiones, quæ punctorum inventione absolvuntur, fiunt vel per quadraturas, quæ non ita pridem solæ in usu fuerant, vel per rectificationes curvarum algebraicarum, quo pacto puncta Catenariæ per curvam parabolicam, & Isochronæ per lemniscatam determinantur: vel denique per coordinatas aliarum transcendentium, sed descriptu faciliorum, veluti præfatus Celeberrimus LEIBNITIUS puncta Catenariæ reperire docuit per logarithmicam. De quibus breviter hæc teneantur; quod constructiones curvarum per motum, sive naturalem, sive arte temperatum, productæ procul dubio omnium forent optimæ, si facili aliquo mechanismo in effectum deduci possent: sed cum illæ tales conditiones prærequirant in materia, quas ei introducere æque, vel fortasse magis arduum est; hæ motum deposcant ita compositum & implicatum, qui in praxi succedat difficulter; necessitas omnino cogere videtur, ut in curvarum transcendentium, non secus ac in algebraicarum altiorum delineationibus, sola punctorum inventione acquiescamus. Ubi quidem quadraturæ, cum ad praxin æque inidoneæ sint, jam fere exoleverunt, iisque merito præ-

* Pag. 663. † N°. LXXII. ‡ Supra pag. 661.

præferuntur constructiones, quæ fiunt per logarithmicam, lineam No. LXX.
sinuum, aut similes, vel etiam per rectificationes curvarum algebraicarum, sicubi haberi possunt; quoniam dubium est, an semper inveniri possint, nec si possunt, universalis regula iis inveniendis præscribi queat ([a]); jure desiderari potest adhuc methodus, qua puncta curvarum, semper & ubique, facili & ad usum accommodata operatione inveniantur. Ostendam igitur hic modum, quo hoc consequi possumus, ope unius logarithmicæ & cujusdam Tractoriæ motu simplici facillimoque describendæ. Quemadmodum enim puncta curvarum algebraicarum determinantur per intersectiones duarum aliarum algebraicarum descriptu faciliorum: ita quoque puncta mechanicarum reperiri debere consentaneum puto.

Si proposita sit æquatio $ady = tdx$, ubi t dari intelligitur per x [ad hanc enim formam, facta separatione indeterminatarum omnes reducuntur] ducantur in plano aliquo horizontali duæ rectæ parallelæ AB, CD, in distantia arbitraria AC, interque illas statuatur curva algebraica FK talis, ut existente AE vel $BE = x$, EF quarta sit proportionalis ad t, a, & duplam subtangentem logarithmicæ, quia hic uti voluerimus: Tum sumpto filo FGH longitudinis AC, describatur Tractoria curva HI ope normæ DGF propellentis extremitatem fili F super curva KF, eo modo quo id, Mense Junio 1693, pag. 255 *, explicatum fuit. Deinde, trajecta indefinite per rectas AB & CD perpendiculari GE, centro G radio EF arcus describatur secans Tractoriam in H; unde demittatur in CD normalis HD, ac jungatur GH: quo facto, tum aggregatum rectarum GH & GD, tum earundem differentia applicetur logarithmicæ, eritque axis portio, quæ applicatis intercipitur, $=$ quæsitæ y; cui proinde si statuatur in E æqualis EL, atque hoc ubique fiat, habebitur per puncta sic descripta optata Curva LM ([b]). Nota si-

 æqua-

([a]) Imo talem dedit Cel. *Johan:* BERNOULLI, Actoris nostri Frater in *Actis Erud.* 1724. Aug. pag. 356.

* Supra N°. LVII. pag. 575.

([b]) Hujus constructionis vide demonstrationem analyticam, infra, N°. CIII, Art. XXI.

No. LXX. æquatio fuerit $rdy = tdx$, & r etiam indeterminata sit, sed data per y, constructio nihilo difficilior evadit; posito enim $rdy = adz = tdx$, constat ex præcedente constructione, inveniri posse relationem inter x & z, itemque inter y & z, quare etiam inter x & y innotescet. Patet autem etiam ex allatis, quod si data sit relatio trium linearum CG, GH & GD [quod contingit, quandocunque Tractoria HI est ex numero algebraicarum;] curva LM possit construi per solam logarithmicam sine adjumento alterius mechanicæ; unde novum criterium pro dignoscendis curvis hoc modo construibilibus resultat, quod Lectores nostri cum olim * exhibito conferre possunt.

* N°. LVIII, pag. 591, 592. De quo vide N°s. LXIV, pag. 631, & LXVI, Art. III, pag. 646, 647.

N°. LXXI.

G. G. L. *

NOTATIUNCULA

AD ACTA DECEMBRIS 1695,

Pag. 537 *& sequentibus* †.

Acta Erud. Lips. 1696. Mart. p. 145

INiquus sim, si non agnoscam, excellentis Mathematici *Jacobi* BERNOULLII *Basileensium Professoris* meditationibus plurimum debere scientias istas profundiores, & me potissimum ipsi pariter ac Fratri ejus Ingeniosissimo, *Joanni* BERNOULLIO, nunc apud *Groninganos Professori* Clarissimo obstrictum esse, qualiacunque a me jacta Analyseos

* *Goth. Gul.* LEIBNITII.

† Ad Num. LXVI.

lyseos cujusdam superioris fundamenta ad varios usus applicuere, suisque inventis mirifice auxere, & ut magis magisque innotescerent ac celebrarentur effecere. Virum autem Celeberrimum *Jacobum* BERNOULLIUM, cujus nupera me ad hoc Schediasma invitavere, persuadere sibi velim, longissime a me abesse animum de meritissimis ejus laudibus detrahendi. Gloriam inventarum figurarum Elasticarum [ex hypothesi scilicet valde verisimili] ipsi illibatam relinquo. Theoremata de radiis circulorum osculantium, etsi mihi non ignota, ne attigissem quidem, nisi originem, eorum pariter ac similium aliorum, ex singulari quodam differentialis calculi genere simplicissimam exponendam occasione data putassem. Ut iis in Elasticis figuris uterer in mentem non venit, quod figuris illis quærendis nunquam animum adjecissem; non quod res sit pulchra & inquisitu digna, sed quod in tanta agendorum copia, quæ ab illo recte acta putavi, nollem denuo agere; incertus etiam, an possem. Itaque non est, cur imputet Theorematum de osculis defectui, cum ipse agnoscat, etiam publicatis illis, nondum vel HUGENIUM, vel me, de lineis illis Elasticis satis meditatos fuisse. Ac ne nunc quidem, exposita analysi Viri Egregii, a me impetrare possum ut hunc campum, licet pulcherrimum, ingrediar; cujus rei plures habeo rationes, quam vellem. De cætero video eum a mea de constructionibus sententia vix dissentire; optaremque ipsum, si vacat, ulterius cogitare de constructione transcendentium per puncta algebraice inventa: id enim magis analyticum fuerit, etsi non æque sit in potestate hactenus, ac reductio quadraturarum ad Euthynses *. De numero radicum osculi candide professus sum dudum, me re diligentius excussa sententiam ipsius amplecti (a). Quod instantiam a me postulat (b) curvæ ordinariæ rectificabilis in se redeuntis, succurrit nunc Epicycloidalis, quam punctum describit fixum in circulo provoluto super alio circulo. Hanc rectificabilem esse, a Celeberrimis Viris HUGENIO & TSCHIRNHAUSIO est ostensum; esse autem in se redeuntem, hæc constructio ipsa monstrat, cum circumferentiæ sunt commensurabiles (c). Præclare facient BERNOULLII Fratres, si conjunctis, vel etiam separatis studiis, velariæ figuræ contemplationem cœptam absolvant. Quod medias directiones attinet, de quibus Ego in *Ephemeridibus Gallicis* Mensis Septembris 1693 (d), cum tendentiæ puncti mobilis sint infinitæ, puncta tendentiarum intervallulis æqualibus assumi arbitrarium putem. Diversis autem punctis tendentias exercentibus, ex punctorum progressibus habetur & progressus communis centri gravitatis, nempe conferendo ejus situm ante progressum, cum situ proximo post progressum punctorum elementarem.

N. LXXI.

* *rectificationes.*

(a) Vide N°. LXVI. Art. III. pag. 647.

(b) Ibid. Art. IV. pag. 650, 651.

(c) Vide Num. seq. Art. II.

(d) Vide N°. LXVI. Art. V. pag. 656-658.

N. LXXI. tarem. Quod si punctorum impulsorum tendentias consideremus, quæ sæpe ab impellentium tendentia diversa est, tendentia media ab iis recepta eodem modo definietur. Eaque omnia pro re nata sunt varianda, sed in his prompte eleganterque exhibendis a Viro Clarissimo non vulgaria expecto, ac publico eum nomine rogandum censeo, ut sua de fluidorum motibus aliisque meletemata præclara diutius non premat. Quod controversias attinet inter D. D. HUGENIUM & RENAUDUM Ingeniarium rei apud Gallos marinæ Generalem, ipse HUGENIUS [cujus certe Summi Viri amissi & ipse desiderium tanto sero ægrius, quanto propius mihi cum eo commercium erat, notioresque maximæ dotes, in quibus vis animi candorque certabant] me sententiam rogare dignatus est; sed tunc nondum erant ad manus utrinque agitata. De re ipsa alias. Recte notatur, eundem ventum magis impellere navem quiescentem, quam procedentem, & discrimen aliquando non esse negligendum. Puto etiam, diversa venti vi, declinationem [*la Dérive*] secus quam D. RENAUDUS supposuit, non esse æqualem, sed eo majorem quo major est venti violentia. Modum generalem construendi tangentium inversas, Mense Augusto, 1695, pag. 373 (e) ipse non nisi pro Mechanismo venditavi. Utilissima cogitatio est, de iisdem ad quadraturas redigendis, separandisve ad invicem indeterminatis. *Problema* (f) de eo præstando circa æquationem differentialem $a\,dy = yp\,dx + by^n q\,dx$ solvere possum, & reduco ad æquationem, cujus forma est $\ldots dv + \ldots\, v\,dz + \ldots dz = 0$, ubi per punctata intelliguntur quantitates utcunque datæ per z. Talis autem æquatio generaliter per me reducta est ad quadraturas, ratione Amicis jam communicata, quam hic exponere necessarium non puto; contentus effecisse, ut Acutissimus Auctor Problematis agnoscere possit methodum [ut opinor] non dissimilem suæ. Neque enim dubito & hoc ipsi innotuisse (g). Et sunt a me in istis multa olim tentata, non pauca etiam præstita, quæ jacent dispersa in schedis, nec mihi ipsi in numerato habentur, copia inopi, ut simul habere videar & non habere. Hæc tamen facilius suppeditavit memoria, ea ipsa die, qua *Lipsiensia Acta* Mensis Decembris 1695 sum nactus, id est hesterna, in ipsis scilicet Nundinis Brunsvicensibus, ubi hæc inter distractiones utcunque in chartam conjeci.

(e) Supra, N°.LXIV, p.635,636.

(f) Propositum a BERNOULLIO, supra N°. LXVI. pag. 663.

(g) Vide Num. sequentem.

N°. LXXII.

N°. LXXII.

JACOBI BERNOULLI
PROBLEMA BEAUNIANUM
Universalius conceptum,

Sive Solutio Æquationis nupero Decembri propositæ, $ady = ypdx + by^n qdx$; *cum aliis quibusdam annotatis.*

I. Quod olim CARTESIO a BEAUNIO propositum, & aliquot abhinc annis resuscitatum fuit Problema, [vid. *Ephem. Gallic.* mense Sept. 1692, & *Acta Lipſ.* mense Mai. 1693] universaliter ita proponi poteſt: *Data quavis Curva, seu algebraica, seu transcendente, seu libera tantum manu formata; invenire aliam ita comparatam, ut ejus applicata ad subtangentem eandem rationem habeat, quam habet constans quadam linea* a *ad summam differentiamve applicatarum curvæ datæ & quæsita; vel etiam reciproce, quam hæc summa differentiave habet ad constantem* a. In casu enim *Beauniano*, ubi loco datæ Curvæ, Recta assumitur angulum semi-rectum cum axe constituens, utrovis modo conceptum Problema in idem recidit; alias duplex est & maxime diversum. Posterioris ego solutionem hac vice cum publico communicabo; sed omissa analysi, & prioris quoque enodatione Lectori relicta, ut si majorem, quam fortasse existima- *Acta Erud. Lipſ. 1696. Jul. p. 332.*

Num. LXXII. rat, in receſſu difficultatem repererit, eo benignius operam hic præſtitam interpretetur. Eſto [*Fig.* 1] Curva data AC vel Ac, axis AB, & ſit abſciſſa $AB = x$, BC, vel $Bc = q$, data per x, & $BD = y$; erit ex præſcripto Problematis $dy : dx = y \pm q : a$, hoc eſt, erit $a\,dy = y\,dx \pm q\,dx$. Eſt autem hæc Æquatio non caſus tantum, ut apparet, ſpecialis æquationis, menſe Decemb. propoſitæ, $a\,dy = y\,p\,dx + b\,y^n q\,dx$, ſed ipſamet potius hæc æquatio ſimplicioribus duntaxat terminis expreſſa, cum una ad alteram perpetuo reduci poſſit; conſentiente illo quod Celeberrimus D. LEIBNITIUS obſervavit, ubi dictam æquationem in hanc transformat $\ldots du + \ldots\, u\,dz + \ldots dz = 0$; hæc enim & ipſa ulterius ad allatam formulam $a\,dy = y\,dx \pm q\,dx$ reduci valet; ſi nempe, quod intelligo, q concipiatur dari per x non modo in terminis algebraicis, ſed in tranſcendentibus, veluti ſi q ponatur $= \int(dx\sqrt{(aa - xx)})$ hoc eſt, ſi curva data AC fingatur eſſe ex mechanicarum numero (a). Quantæ igitur univerſalitatis hoc Problema ſit, quantumque conferat ad promotionem methodi Tangentium inverſæ nemo non videt, gaudeoque præfatum Virum Celeberrimum illud ſua quoque opera dignum cen-

(a) Ponatur $y^{1-n} = u$, vel $y = u^{1:(1-n)}$, eritque $dy = \frac{1}{1-n} u^{n:(1-n)} du$, quibus ſubſtitutis in æquat. $ady = ypdx + by^n qdx$, ea transformabitur in hanc $\frac{a}{1-n} u^{n:(1-n)} du = u^{1:(1-n)} pdx + bu^{n:(1-n)} qdx$, vel dividendo per $u^{n:(1-n)}$, in hanc $\frac{a}{1-n} du = updx + bqdx$, quæ reductio eſt *Leibnitiana*. Ponatur ulterius $pdx = dt$, atque $dx = dt : p$, & $qdx = qdt : p$, & æquatio $\frac{a}{1-n} du = updx + bqdx$, abibit in hanc $\frac{a}{1-n} du = udt + bqdt : p$, quæ eſt reductio *Bernoulliana*. Nam, quia $pdx = dt$, & p datur per x, dabitur x per t, ſaltem tranſcendenter; igitur p & q, qui dantur per x, dabuntur per t; ideoque $bq : p$ dabitur per t. Ergo æquatio $\frac{a}{1-n} du = udt + bqdt : p$ ejuſdem eſt formæ cum iſta $a\,dy = y\,dx \pm qdx$, ubi q datur per x.

cenſuiſſe: hoc enim præſtantiæ & utilitatis ejus argumentum eſſe poteſt.

Solutionem meam quod attinet, ad quam tres quatuorve ducentes vias habeo, illa præter curvam A C, quæ ut jam delineata ſupponitur, ſolam requirit Logarithmicam, qua mediante inveniri debet alia, per cujus quadraturam quæſitæ ED puncta obtineantur, id quod hoc modo fit: Eſto Logarithmica FG [*Fig.* 2] cujus ſubtangens $= a =$ AF [quanquam omnis alia idem præſtet; ſed prolixitatem vito] A C curva data, AL utriuſque axis, AB vel aB $= x$, & BC $= q$; fiatque alia curva AH, cujus applicata BH quarta ſit proportionalis ad BG, BC, & AF; tum ſpatio curvilineo A B H ad A F applicetur æquale rectangulum FL, rurſumque ſtatuatur BD quarta proportionalis ad A F, BG & A L [vel M L, ſumpto ubivis in axe A L puncto fixo M] erit D punctum in optata curva E D, exiſtente BD y æquationis $a\,dy = + y\,dx \pm q\,dx$, vel $a\,dy = - y\,dx \pm q\,dx$; quorum illud obtinet, ſi A B dicatur x, & M ad ſiniſtram dextramve puncti L conſtituatur; hoc vero, ſi ſit a B quæ vocetur x, atque M viciſſim ad dextram ſiniſtramve ipſius L collocatum fuerit (*).

(*) Conſtructionis hujus en Analyſin, ex N^i. CIII, Art. 12, petitam. Sit $y = mn$, & $ady =$ [$amdn + andm =$] $ydx + qdx$ [$mndx + qdx$.] Pone $amdn = mndx$, & $andm = qdx$; & prior æquatio diviſa per mn dabit $adn : n = dx$. Igitur $x =$ Log. n, vel $n =$ numero cujus logarithmus x, id quod ſic deſignabimus $n = Nx$. Hic valor ipſius ſubſtitutus in æquatione poſteriore $andm = qdx$, illam mutat in hanc, $adm = qdx : Nx$, vel, integrando $am = \int(qdx : Nx)$. Igitur $y = mn = \frac{Nx}{a}\int(qdx : Nx)$. Unde fluit Auctoris conſtructio. Nam cum ſit AB $= x$, erit [propter Logarithmicam FG] BG $= Nx$; & BH, quarta proportionalis ad BG [Nx], BC [q] & AF [a], erit $aq : Nx$, atque ideo ſpatium ABH $= \int(aqdx : Nx) =$ F L, & A L $= \int(qdx : Nx)$. Ergo BD, quæ quarta eſt proportionalis ad AF [a], BG [Nx] & AL [$\int(qdx : Nx)$,] erit $= \frac{Nx}{a}\int(qdx : Nx) = y$.

Vel ſic, per methodum Cel. De Maupertuis [*Comm. Acad. Reg. Par.* 1731]. Æquatio $a\,dy = ydx + qdx$, multiplicando per A variabilem, & tranſponendo, induat hanc formam $Aqdx = aAdy - Aydx$, atque

Num. LXXII.

Notatu dignum hic eſt, quod ſi q ſimpliciter denotat poteſtatem aliquam integram & poſitivam ipſius x, hoc eſt ſi curva data AC eſt ex genere Paraboloidum, curvilineum ABH ſemper mediante logarithmica quadrabile exiſtit, adeoque curvæ quæſitæ puncta immediate per logarithmicam abſque quadraturis inveniri poſſunt; quod ſequenti exemplo monſtrabo, e quo lex progreſſionis in cæteris ſatis perſpicietur: Eſto, ut antea Logarithmica FG [*Fig.* 3], ſubtangens ejus $= AF = a$, Parabola quædam ſurſolida IC, vertice I ubivis in axe AB accepto, proinde $IB = x$, & $BC = x^5 : a^4$, productaque infinite BC ſecet logarithmicam in G, tum conſtruantur termini progreſſionis ſequentis, $1.2.3.4.5.a$; $2.3.4.5.x$; $3.4.5.xx:a$; $4.5.x^3:aa$; $5.x^4:a$; $x^5:a^4$; [quod ipſum quoque logarithmicæ beneficio expeditiſſime peragitur, applicando ipſi, in diſtantiis æqualibus AH, HL, LM, MN, NO, rectas HP, LQ, MR, NS, & OT, quarum prima HP ſit $= IB = x$; cæteræ enim ordine erunt $xx:a$; $x^3:aa$; $x^4:a^3$; & $x^5:a^4$, quarum multiplices ſeriei noſtræ, ut apparet, terminos conſtituunt] quo facto in recta GB abſcindatur ex puncto G, vel deorſum verſus axem, vel ſurſum in partes oppoſitas, pro ſigni ambigui varietate, pars GD, quæ ſit æqualis vel aggregato terminorum hujus ſeriei, ſi habeatur $a\,dy = +y\,dx \pm q\,dx$; vel differentiæ inter ſummas terminorum in locis paribus & eorum qui ſunt in imparibus, ſi fuerit $a\,dy = -y\,dx \pm q\,dx$, eritque ſemper quod hoc pacto obtinetur, punctum D in curva deſiderata ED (*). Demonſtrationem

que integrando $\int Aqdx = aAy - a\int ydA - \int Aydx$. Ponantur duo poſteriores termini ſimul æquales nihilo, eritque, $-adA : A = dx$, vel Log. $c -$ Log. $A = x$, aut $c : A = Nx$, vel $A = c : Nx$. Igitur cum ſit $\int Aqdx = aAy$ vel $y = \int Aqdx : aA$, erit $y = \int (cqdx : Nx) : (ac : Nx) = \frac{Nx}{a} \times \int (qdx : Nx)$; quæ æquatio ad Auctoris conſtructionem quaſi manu ducit.

(*) Vide N°. CIII, Art. 12. §. 2. & 3. Vel hanc accipe Analyſin commode in plurimis caſibus ſimilibus adhibendam. Integranda proponitur æquatio (A) $ady = -ydx + x^5dx : a^4$ vel $ady + ydx - x^5dx : a^4 = 0$. Ponatur

nem non addo, quod unusquisque illam ex constructionibus istis haud difficulter eliciet. Forte autem recordari poterit Celeberrimus D. LEIBNITIUS, an & quousque sua Problematis solutio cum ista conspiret. Num. LXXII.

II. Priusquam hinc digrediar, *Notatiunculæ*, quam hic Vir Martio præterito ad *Acta* Decembris communicavit *, in uberiorem veritatis explanationem pauca quædam hic subnectere liceat. Problematis Elastici solutionem, cujus ipse primo loco meminit, tam generalem puto me dedisse, ut ad omnem indefinite hypothesin, veram non minus ac verisimilem, æque se extendat, insuperque fulcra vectium non supponat, sed inveniat; quod totum illud est, quod in hac materia jure requiri potest, quandiu speciales tensionum leges nobis ignotæ sunt.

Constructionem Transcendentium per puncta algebraice inventa fateor rem egregiæ speculationis fore: dubito tamen hic, ut in aliis, generale quidpiam inveniri posse; etiamsi fortasse in paucis quibusdam res succedere deprehenderetur. Itaque negotium tanti non videtur esse, ut ei implicari sit necesse, præsertim cum

natur $y = x^5 : a^4 + p$, & $dy = 5x^4dx : a^4 + dp$, atque A migrabit in (B) $adp + pdx + 5x^4dx : a^3 = 0$. Fiat $p = -5x^4 : a^3 + q$, & $dp = -4.5x^3dx : a^3 + dq$, atque B mutabitur in (C) $adq + qdx - 4.5x^3dx : a^2 = 0$. Statuatur $q = 4.5x^3 : a^2 + r$, & $dq = 3.4.5x^2dx : a^2 + dr$, atque C abibit in (D) $adr + rdx + 3.4.5x^2dx : a = 0$. Sumatur $r = -3.4.5x^2 : a + s$, & $dr = -2.3.4.5xdx : a + ds$, atque D transibit in (E) $ads + sdx - 2.3.4.5xdx = 0$. Fac denique $s = 2.3.4.5x + t$, & $ds = 1.2.3.4.5dx + dt$, atque transformabitur E in (F) $adt + tdx + 1.2.3.4.5adx = 0$, vel $dx = -adt : (t + 1.2.3.4.5a)$, aut integrando, $x = -\text{Log.}(t + 1.2.3.4.5a)$.

Igitur $t = -1.2.3.4.5a - Nx$. Est autem $y = x^5 : a^4 + p = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + q = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + 4.5x^3 : a^2 + r = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + 4.5x^3 : a^2 - 3.4.5x^2 : a + s = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + 4.5x^3 : a^2 - 3.4.5x^2 : a + 2.3.4.5x + t = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + 4.5x^3 : a^2 - 3.4.5x^2 : a + 2.3.4.5x - 1.2.3.4.5a - Nx$. Atqui ex constructione Auctoris $GD = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + 4.5x^3 : a^2 - 3.4.5x^2 : a + 2.3.4.5x - 1.2.3.4.5a$, & $GB = Nx$. Igitur $BD = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + 4.5x^3 : a^2 - 3.4.5x^2 : a + 2.3.4.5x - 1.2.3.4.5a - Nx = y$. Poni etiam potuisset t constans atque, $dt = 0$, de quo vide Num. LXXVII.

* N°. præced.

Num. LXXII. alia præsto sint, quæ defectum hic supplere possint; & considerandum Lectoribus relinquo, an alius generalior simul, simplicior, & ad praxin accommodatior construendi modus reperiri possit illo, qui fit per tractiones, atque nuperrime a me ad *Acta* communicatus *, nescio an etiam publicatus fuit.

Quæstionem de numero radicum osculi consensus Viri Celeberrimi jam extra controversiam ponit. Mutuo cum ipso candore acturus, quæ de curvis in se redeuntibus putabam olim me demonstrare potuisse, corrigo, gratiasque habeo, quod exemplo me edocuerit tales quandoque rectificationem admittere posse, sine quo fortasse nunquam huc animum advertissem. Fecit autem Viri Nobilissimi monitum, ut discursum, Mense Januario 1691, pag. 21 ** hanc in rem allatum denuo examinarem, deprehenderem, eum in hoc laborare, quod supponit, unam duntaxat dari æquationem quæ relationem ipsius x ad t, arcus ad tangentem exprimat. In curvis enim in orbem redeuntibus, quæ rectificationem admittunt, & in quibus x portionem curvæ, una cum integra perimetro semel aliquotiesve accepta, significare potest; relatio ipsius x ad tangentem aliamve functionem pro numero vicium quibus perimeter accipitur subinde variat, peculiaremque æquationem deposcit.

Quæ vero porro subjicit Vir Acutissimus de mediis directionibus, haud ita facile a me assensum impetrant; nec enim satis capio, quo sensu puncta tendentiarum æqualibus intervallis assumi arbitrarium existimet. Mentem meam exemplo declaro: [*Fig.* 4.] Sit ventus aliquis circumfusus æqualiter arcui circulari B b b, vel etiam potentia quæpiam trahens, circumposita opposito arcui C c c, agatque in singulis arcus punctis in centrum A viribus, quæ proportionentur rectis A D, A d secantibus arcuum B b vel C c, quo pacto puncta omnium tendentiarum particularium d, d, reperientur in recta tangente D d d; adeoque disterminabuntur intervallulis inæqualibus d d, d d, ob æqualia arcuum elementa b b, b b,

* N°. LXX.

** Supra N°. XLI, pag. 440.

bb, bb, vel cc, cc. Nam si quis existimet, intervalla dd æqualia assumi posse, is vicissim statuere debet inæqualia arcuum elementa bb vel cc, ac proinde, ob æqualiter circumfusam potentiam, ejus vires censebit esse in ratione composita elementorum bb vel cc & secantium Ad: non ergo sunt in simplici ratione secantium Ad, igitur nec puncta tendentiarum in tangente Dd; utrumque contra hypothesin. Addo, quod inventio centri gravitatis punctorum dd inæqualiter distantium pendet a circuli & hyperbolæ relatione nondum cognita, æqualiter distantium a simplici bisectione rectæ Dd; unde si sit arbitrarium illa fingere, ut lubet, Problema directionis mediæ simul & simplex erit & transcendens; quæ denuo repugnant. Num. LXXII.

Navem quiescentem ab eodem vento fortius impelli, quam procedentem, mecum agnoscit Vir Eximius; idemque videt unusquisque, si considerat, tantam semper velocitatis venti partem motu navis reddi irritam, quanta velocitate ipsa navis progreditur: unde cum hæc, ut dictum alibi, partem velocitatis venti satis notabilem, eoque majorem quo velum spatiosius fuerit, adæquet, constat etiam discrimen oriri, quod in usu navigationis minime contemni possit. At quod deviationem seu declinationem navis attinet, hic rursus diversum sentire cogor; hanc enim ab intensiore vel remissiore venti vi non alterari, mihi extra dubium est; prout etiam assumit Ingeniarius Gallicus [sive RENAVIUM appelles *RENAU* cum Auctore Gallico *Hist. Oper. Erud.* sive malis RENAUDUM *RENAUD* cum D. LEIBNITIO] nec diffitetur HUGENIUS, etsi prior in ejus quantitate definienda aberret, posterior definire plane abstineat. Ex systemate meo motus fluidorum illam sic determino [*Fig.* 5.] : Ponatur navis AB figuram habens rectangulam oblongam [hæc enim pro diversitate figuræ variant] proram conversam in E, velumque ad rectos angulos ventum excipiens, cujus sit directio AD, verus navis cursus fiat per lineam striatam AF, sic ut ejus declinatio censeatur EF; reperio, qualiscunque venti sit velocitas, semper fore DE ad EF in ratione dimidiata ejus quæ componitur ex ratione DE ad AE, & ex ratione longitudinis parallelogrammi

AB

Num. LXXII. AB ad ejus latitudinem. E quo illud consectarium fluit, quod quandoque EF æquare vel etiam superare possit ipsam ED, contra Ingeniarii Gallici hypothesin, nempe tum cum sinus anguli DAE ad sinum complementi ejus æqualem vel minorem rationem habuerit, quam latitudo navis ad longitudinem. Sed & aliud hic singulare occurrit velocitates navium concernens, & quod multis paradoxum videbitur, sed tamen verissimum; nimirum, quod tum navis AB cæteris paribus velocius movebitur in via sua AF, quam eadem posita in AC, proramque juxta ipsam directionem venti AD conversam habens, per AD progrederetur; ac proinde, si, exempli gratia, Nauta nave vectus, cujus longitudo latitudinis sit decupla, flante Borea iter in Austrum meditetur, veloque ad ventum recto proram a Meridie parumper deflectat angulo 5 gr. 43 min. illam dirigendo in plagam fere mediam inter Austrum & Rumbum huic proximum, Nautis *Zuid-ten-Oosten*, vel *Zuid-ten-Westen* dictum [quo pacto ob accedentem declinationem illum præcise in Austrum ferri ex ante dictis constat] iter hoc suum celeritate revera majore prosequetur, quam si manente velo ad ventum recto navigii cursum recta in Austrum instituisset; quanquam hæc velocitatum differentia in praxi tam sit exilis, ut unicam tantum leucam in quadringentis lucrefieri hac ratione posse deprehendam ([a]). Horum vero omnium demonstrationes, quæ fluidorum corporumque motorum in fluidis affectiones concernunt, cum justi fere voluminis materiam præbere possint, malo aliquando junctim exhibere, ubi Deus vitam tranquilliorem firmioremque indulserit valetudinem, quam hinc inde quædam sparsim, atque imperfecte indicando, pretium illorum imminuere.

III. Dum hæc meditabar, accipio Clarissimi NIEUWENTIIT ambos Tractatus de *Analysi infinitorum*, ubi præter quædam bonæ notæ, quæ habet, non contemnenda, id quoque agit, ut difficultates quasdam nobis proponat contra principia Geometrarum hucus-

([a]) Videatur Nº. CIII. Art. 13.

hucusque recepta, præsertim contra calculum nobis usitatum, eo potissimum tendentes, ut differentiationum successionem, seu differentio-differentialia, ceu purum *non ens* vel *nihil*, ut vocat, eliminet; quod nonnullis conclusionibus absurdis & manifesto falsis, quas ex iis admissis sequi existimat, evincere conatur. Meum itaque esset, ut calculi nostri probitatem hic loci adversus objectiones ejus vindicarem, maxime quia mea suo tractatui occasionem dedisse scribit. Sed quia causa communis ipsum jam calculi Auctorem Celeberrimum D. LEIBNITIUM defensorem nacta est, qui Mense Julio superioris Anni scrupulis omnibus tum sibi, tum mihi objectis sufficientissime & plane ad mentem meam respondit; superfluum esset, veritatem pluribus contra D. NIEUWENTIIT asserere, vel ostendere, quam multis ipse contradictionibus per sua principia sese implicet. Num. LXXII.

N°. LXXIII.

JACOBI BERNOULLI

COMPLANATIO

Superficierum Conoidicarum

&

Sphæroidicarum.

OCcasione Problematis *Florentini*, inter alias solutiones ante hoc quadriennium Mense Augusto 1692 * exhibitas, pri- *Acta Erud. Lipf. 1696. Oct. p. 479.*

* Supra N°. LII. pag. 512. seq.

Num. LXXIII. mus aperui artificium ex ſuperficie Sphærica portionem abſcindendi dato cuivis plano æqualem. Habui quidem jam tum modum iſtud efficiendi mechanice in quavis alia ſuperficie conoidica, vel ſphæroidica; cum & ſimplicioris quodammodo ſit inventionis, & meditanti mihi primo ſeſe obtulerit; ſed quoniam rectificationem lineæ circularis ſupponebat, contempſi. Nunc quia video *Fratrem* hæc dignari, quorum mentionem faceret publice, placet etiam Lectori breviter exponere, quid ego hic tum præſtiterim.

Sint duæ Curvæ [*Fig.* 1.] quæcunque AHC & PEF in eodem plano exiſtentes, & ſumptum in priore indefinite punctum H, e quo demiſſa intelligatur in axem normalis HI ſecans curvam PEF in E, nec non ducta tangens HM, eique perpendicularis radius oſculi HN ſecans axem in G, & curvam PEF in F. Eſto etiam punctum aliquod in axe fixum O, & ſit ducta OH ſecans curvam PEF in P, eique normalis OR tangenti HM occurrens in R. Quibus poſitis, inveni quod ſi ſumatur quarta proportionalis ad tangentem HM, ſubtangentem MI, & applicatam IE, eique ex peripheria circuli HKL rotatione puncti H circa axem AD deſcripti æqualis abſcindatur arcus HK [quod fieri poteſt mediante Quadratrice, Trochoide, Linea ſinuum, aut aliter,] atque hoc ubique fiat, junganturque in ſuperficie Conoidis omnia puncta K curva AK, æquabitur trilineum gibbum AHKA ſpatio curvilineo plano AIEPA (*). Quod ſi fiat arcus HK

(*) Intelligatur trilineum AHK diviſum in infinitas zonas, ſeu zonarum potius partes, qualis KHhk; quæ, ut ex *Archimedeis* inventis facile ſequitur, æqualis eſt rectangulo, ſub arcu HK & curvæ particula Hh, pro recta propter exiguitatem habenda. Pariter intelligatur ſpatium AIE diviſum in infinita trapeziola, quale IieE, quod, cum infinite parum differant rectæ IE, ie, cenſetur æquale rectangulo ſub IE & Ii. Jam vero, ſi ſit, ex Auctoris præſcripto, HK ad IE, ut IM ad MH, vel [ob ſim. Triang. IMH, ihH], ut ih, vel Ii, ad iH; erit rect. ſub HK & hH æquale rect. ſub IE & Ii; hoc eſt, elementum HhkK trilinei AHK æquale elemento IieE ſpatii AIE. Eſt igitur trilin. AHK ſpatio AIE æquale.

HK æqualis quartæ proportionali ad duplam NH, NF+NG, & NF—NG ſeu GF, reſultabit trilineum AHK æquale portioni dati plani AGFPA ([b]). Sin vero ſtatuatur HK talis, ut habeat ad ſemiſſem rectæ OP rationem compoſitam ex ratione totius OP ad OH, & ipſius OR ad RH, fiet AHK æquale portioni AOPA ([c]): multifariam enim Problema confici poſſe animadvertebam, prout datum planum hoc vel illo modo in elementa diviſum conciperetur.

At quoniam omnes iſtæ conſtructiones circuli tetragoniſmum ſupponebant, cœpi cogitare, annon etiam abſque hoc liceret intentum aſſequi, ſi curva data PEF, quæ modo in plano per axem Conoidis intelligebatur, transferretur in planum baſis Conoidis: nec mea me feſellit opinio. Mox enim deprehendi, quod in ſuperficie quorundam Conoidum etiam geometrice conſtitui poſſit portio, quæ dato plano ſit æqualis; quanquam vero id de ſola ſphærica oſtendiſſe tum contentus fui, cum de alia non ageretur,

Bbbbb 2 puto

([b]) Diviſum nunc intelligatur AGF in trapeziola, quale eſt FfgG, quod cenſetur æquale trapezio $F\varphi\gamma G$, ductis nimirum rectis $F\varphi$, $G\gamma$ ad rectam FG perpendicularibus. Id vero, dimidium eſt rectanguli ſub baſe FG, & altitudine æquali aggregato rectarum $F\varphi$ & $G\gamma$. Ergo, quoniam eſt, ut docet Noſter, HK ad FG, ut NF + NG ad 2NH, vel [ob ſim. Triang. $NG\gamma$, $NF\varphi$, NHh,] ut $F\varphi + G\gamma$ ad 2Hh, erit rectang. ſub FG & ſub $F\varphi + G\gamma$ æquale rectangulo ſub HK & 2Hh; hoc eſt, duplum Trapezii FfgG quod eſt elementum ſpatii AGF, æquale duplo zonæ incompletæ HhkK, quæ eſt elementum trilinei AHK. Quare & elementum elemento, & ſpatium AGF ſpatio AHK æquale eſt.

([c]) Denique diviſum concipiatur ſpatium AOP in infinita triangula, quale eſt OPp, cujus area æqualis eſt rectang. ſub $\frac{1}{2}$OP, & $P\varpi$. Recta autem $P\varpi$, ut & Hq, normales ſunt demiſſæ in rectam Ohq. Igitur ſi ſit, ut vult Auctor noſter, HK ad $\frac{1}{2}$OP in ratione compoſita ex rationibus OP ad OH, & OR ad RH, vel [ob ſimilia Triang. $OP\varpi$, OHq, nec non hHQ, hOR] ex rationibus $P\varpi$ ad Hq, & Hq ad Hh, quæ compoſitæ efficiunt rationem $P\varpi$ ad Hh; erit rect. ſub HK & Hh, elementum ſcil. HhkK trilin. AHK, æquale rect. ſub $\frac{1}{2}$OP & $P\varpi$, elemento nimirum $OP\varpi$ ſpatii AOP. Quamobrem æquale eſt ſpatium AHK ſpatio AOP.

Num. LXXIII. puto tamen neminem, perspecta constructionis meæ analysi, latere posse methodum hoc universaliter præstandi, indeque omnia determinandi Conoidea, in quibus negotium absolute succedat.

Esto [*Fig.* 2.] AIC curva, ut antea revolutione sua circa axem AD generans Conoides, cujus basis circulus BHC, in cujus plano sit projecta data curva PEF, tum vero in plano per axem Conoidis ADC, concipiatur alia curva LMN ita comparata, ut applicata GM ubique sit æqualis rectæ IK ductæ ab intersectione I ad axem AD normaliter curvæ AIC. Quo posito, sumatur indefinite aliud quodvis planum per axem ADH, formans in superficie Conoidis curvam ARH eandem cum AB vel AC, & ex Puncto H agatur radius HD, & recta HQ perpendicularis ipsi BD, quarum illa secet curvam datam PEF in E, hæc in P. Dico, si ex curvilineo ADNL, resecetur portio AGML, quæ sit æqualis vel semissi quadrati rectæ DE, vel toti rectangulo HQP, atque resectæ portioni curvæ AI ex ARH æqualis abscindatur AR, idque semper fiat, fore trilineum gibbum ARSA, in priori casu, æquale portioni dati plani BDEPB; in posteriori, æquale portioni BQPB; hic enim iterum res varie conficitur: & observari potest, quod si loco portionis AGML altera DGMN æqualis ponatur semissi dicti quadrati DE vel dicto rectangulo HQP, atque abscissæ curvæ CI æqualis ubique statuatur HR, tum quadrilineum gibbum BHRS dato plano BDEPB vel BQPB futurum est æquale (*). E quibus patet, quo-

(*) Constructionis hujus fundamentum continetur in hoc LEMMATE.

Area AGML *ad superficiem genitam ex rotatione curvæ* AI *circa axem* AG, *eandem rationem habet quam radius ad peripheriam.*

Intelligatur enim recta *gim* parallela & vicinissima rectæ GIM, sic ut GgmM, quod æquale censetur rectangulo sub Gg & GM, habeatur pro elemento Areæ AGML. Elementum vero superficiei genitæ ex rotatione curvæ AI circa axem AG, vel zonula genita ex rotatione particulæ iI circa dictum axem AG, æqualis est rectangulo sub Ii & peripheria cujus radius est GI. Habet igitur elementum prius ad posterius rationem eandem quam rect. sub Gg & GM, ad rect. sub Ii & peripheria cujus radius GI; vel rationem composi-

quoties curvilineum ADNL quadrabile eſt, hoc eſt, curva AIC talis exiſtit, ut ſumma omnium perpendicularium IK ductarum in elementa abſciſſarum AG geometrice haberi poſſit [quod non tantum in circuli peripheria, ſed etiam in linea recta, curva parabolica, & infinitis aliis in caſibus contingit,] ſemper dato plano æquale ſpatium ex ſuperficie Conoidis abſcindi poſſe; & utile eſt, ſimpliciores caſus, qui præ cæteris elegantiora Theoremata ſuppeditant, ſpeciatim annotaſſe. Sed & hoc tenendum eſt, quod in ejuſmodi Conoidibus omnibus eadem Num. LXXIII.

Bbbbb 3 quoque

poſitam ex rationibus Gg, vel iO, ad Ii & GM ad peripheriam cujus radius GI. Sed iO ad Ii, ut GI ad IK vel GM. Quare ratio compoſita ex rationibus iO ad Ii & GM ad peripheriam cujus radius GI, eadem eſt ac compoſita ex rationibus GI ad GM, & GM ad dictam peripheriam, quæ ſimul efficiunt rationem GI ad peripheriam radio GI deſcriptam. Igitur elementum GgmM areæ AGML eſt ad elementum ſuperficiei genitæ ex rotatione curvæ AI circa axem AG ut radius ad peripheriam. Ergo ſuperficies, quarum hæc elementa ſunt, eandem inter ſe rationem habent.

Corollarium. AGML eſt ad portionem ARr ſuperficiei genitæ ex rotatione curvæ AI, comprehenſam inter duos meridianos ARH, Arh; ut radius DH ad peripheriæ BHCB arcum Hh inter hos meridianos comprehenſi. Nam AGML ad ſuperficiem integram genitam ex rotatione curvæ AI ut radius DH ad peripheriam integram BHCB. Sed ſuperficies integra ad portionem ejus ARr, ut peripheria integra BHCB ad partem proportionalem Hh. Ergo, ex æquo, AGML ad ARr, ut DH ad Hh.

His poſitis, cum ſit AGML ad ARr ut DH ad Hh, vel [ob ſim. Triang. DHh, DEe] ut DE ad Ee, aut ut quadr. DE ad rect. ſub DE & Ee; ſi ſit, ex Auctoris conſtructione, AGML æquale dimidio quadrati De, erit ARr æquale dimidio rectanguli ſub DE & Ee, a quo dimidio non differt triangulum DEe. Sed elementa ſunt ARr ſuperficiei ARS, & DEe plani BDE. Sunt igitur hæ ſuperficies inter ſe æquales.

Pariter, quoniam eſt AGML ad ARr ut DH ad Hh, & ſit DH ad Hh, ut HQ ad hT vel Qq [ob ſim. Triang. DHQ, HhT]; erit AGML ad ARr ut HQ ad Qq, vel ut rect. HQP ad rect. PQq. Si fiat igitur, ut docet Auctor, area AGML æqualis rect. HQP, erit ARr æqualis rect. PQq, vel trapeziolo PQqp: hoc eſt, erunt æqualia elementa ſuperficiei ARS & plani BQPB. Quare ſunt hæ ſuperficies æquales.

Num. LXXIII. quoque facilitate abſolvatur converſum Problematis, nempe: *Datam portionem ſuperficiei Conoidicæ vel Sphæroidicæ in planum projicere, ſeu planum conſtruere illi æquale*; quod pluribus explicare opus non videtur.

Quoniam hæc omnia occaſione Problematis quod Celeberrimus VIVIANUS Magni Ducis *Hetruriæ* Mathematicus, edito A. 1692, ſcripto * publice propoſuit, in medium allata ſunt, non alienum erit hoc loco memorare, quod paucis Lectorum noſtrorum animadverſum puto: nempe conſtructionem Problematis, quam Clariſſimus ejus Auctor ope torni inſtituendam exhibuit, reipſa plane convenire cum ea, quam dederam Menſe Auguſto 1692, pag. 370, articulo I. † quod ita demonſtro: In baſe hemiſphærii [*Fig.* 3.] ABCDE, cujus centrum F, diameter BD, radiis BF, FD tanquam diametris alii duo circelli BHF, FLD deſcribantur, quorum uterque ſit baſis alicujus cylindri recti, quo velut trepano perforari intelligatur globus. Sumatur in circumferentia alterutrius circelli BHF quodvis punctum H, e quo excitetur HI recta ad planum baſis BHF, occurrens ſphæricæ ſuperficiei in I, quod ſic unum erit eorum, in quibus ſuperficies ſphærica & cylindracea ſe mutuo interſecant. Dico hoc idem quoque reperiri per meam conſtructionem: Ductis enim BH, HF, FI, ac demiſſo per I quadrante verticali AIG, liquet, quod in Triangulis BHF & FHI, propter BF = FI, latus commune HF & angulos BHF & FHI rectos, latera BH & HI quoque æquentur; unde & arcus BG & GI, quorum ſinus iſta latera ſunt, æquabuntur; id eſt, ſi circulus BCDE fingatur eſſe æquator, A polus, BAD primus meridianus, AIG meridianus loci I, longitudo puncti I ipſius latitudini æquabitur. Quod ipſum eſt, quod noſtra conſtructio Articuli primi præſcribit.

* Supra N°. LI, pag. 511. 512.   † N°. LII. pag. 512.

N°. LXXIV.

N°. LXXIV.

POSITIONUM DE SERIEBUS INFINITIS,

PARS TERTIA,

Tractans
De earum usu
In quadraturis Spatiorum
& rectificationibus Curvarum.

Quam

Præside

JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.

defendit

JACOBUS HERMANNUS, Basil. Magist. Cand.
Ad diem 14 *Novemb. M. DC. XCVI.*

Editæ primum
BASILEÆ,
1696.

POSITIONUM

DE

SERIEBUS INFINITIS

Pars Tertia.

De Uſu Serierum Infinitarum in Quadraturis Spatiorum & Rectificationibus Curvarum.

P*OSTQUAM prima parte laboris noſtri defuncti ſumus, variarumque, quoad fieri potuit, Serierum ſummas exhibuimus; ſupereſt, ut ad alteram inſtituti partem tranſeamus, oſtendendo modum eas applicandi ad dimenſiones quantitatum geometricarum, præſertim illarum, quas* tranſcendentes *nuncupant; licet ſeriebus, quæ hic uſui venient, raro contingat eſſe ex numero*

Num. LXXIV. *earum, quas proxime contemplati sumus, quarumque summas in potestate habemus. Observarunt enim Geometræ, plurimas dari quantitates, cujusmodi sunt pleraque Lineæ Curvæ, & pleraque ab iis comprehensa spatia, quæ nullis numeris, vel rationalibus, vel surdis, quantumvis compositis exprimi, hoc est quarum relationes ad alias datas sub nulla æquatione algebraica definiti gradus cogi possent, sed quæ omnes æquationum gradus quasi transcenderent; ac idcirco attentandum duxerunt, num quas uno aliquo numero effari non poterant, per seriem saltem infinitorum, maxime rationalium, exprimere liceret, quibus ita continuo ad quæsitum accederetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fieret, totaque series exactum quæsiti valorem exhiberet. Inventum, quod, quantum constat, vergente demum hoc seculo a* MERCATORE, GREGORIO, NEWTONO, LEIBNITIO, *in lucem productum fuit. Quid primi tres de his memoria prodiderint, etiamnum ignoramus. Summus Geometra* LEIBNITIUS, *qui rem haud dubie longissime provexit, inter alias series quas nobis in* Actis Lipſ. *impertivit, unam, initio* Actorum 1682, *pro circuli magnitudine dedit; sed methodum, qua illuc pervenit, nusquam exposuit. Quantum conjicio, non differt illa a nostra: nam & in easdem cum illo series incidimus, & ipsius subinde Calculo differentiali usi sumus, uti posthac patebit. Principia hujus calculi exponere nimis longum & alienum foret. Ea Vir perillustris D.* Marchio HOSPITALIUS *in Libro* De Analysi infinite parvorum *nuperrime edito perspicue tradit, ad quem proin Lectorem* φιλομαθῆν remittimus.

DEFI-

DEFINITIO.

Mixtam Seriem voco, cujus termini multiplicatione sunt conflati ex terminis ejusdem ordinis aliarum Serierum. Ita si sint series a, b, c, d, e, &c. & f, g, h, i, k, &c. mixta ex utraque erit af, bg, ch, di, ek, &c.

XXXVI.

Fractionem $l:(m-n)$ *convertere in seriem infinitam quantitatum geometrice proportionalium.*

Fit hoc per divisionem continuam numeratoris per denominatorem, hoc pacto: m in l habeo $l:m$, quod multiplicatum per divisorem $m-n$, & subtractum ex dividendo l relinquit $ln:m$; hoc rursus divisum per m facit $ln:mm$, quod ductum in $m-n$ & subtractum ex dividendi reliquo efficit residuum $lnn:mm$; hoc denuo divisum per m, facit $lnn:m^3$, quo ducto in $m-n$ & subtracto, remanet $ln^3:m^3$; atque ita deinceps sine fine in infinitum semper enim aliquid dividendum superest, cum unius membri dividendus a divisore bimembri nunquam sine residuo exhauriri possit. At hoc residuum, continuata operatione, positoque $m > n$, perpetuo decrescit, & tandem data quavis quantitate minus fit, ut patet. Est ergo fractio proposita $\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. quæ series est quantitatum geometrice progredientium in ratione m ad n; quandoquidem quilibet ejus terminus ex constructione in n ductus & per m divisus proxime sequentem exhibet.

Idem brevius sic evincitur: Summa Progressionis geometricæ $\frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. est $\frac{l}{m-n}$, per Corollar. VIII. Ergo reciproce valorem fractionis $\frac{l}{m-n}$ per talem seriem exprimere licet.

Num. LXXIV.

XXXVII.

Fractionem l : (m + n) *resolvere in seriem infinitam geometrice proportionalium.*

Facta divisione continua numeratoris per denominatorem, eadem resultat series, quæ antea, nisi quod termini ejus alternatim fiant positivi & negativi. Est igitur quantitas $\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. saltem si ponatur $m > n$: tum enim quod post singulas divisiones reliquum manet, continuo minuitur, donec continuata in infinitum operatione prorsus evanescat.

Idem quoque sic elucescit: Quoniam in serie quantitatum $\frac{l}{m}, \frac{ln}{mm}, \frac{lnn}{m^3}, \frac{ln^3}{m^4}, \frac{ln^4}{m^5}$ &c. ex hyp. primus terminus est ad secundum, ut tertius ad quartum, & quintus ad sextum &c. nec non secundus ad tertium, ut quartus ad quintum, & sextus ad septimum, &c. erit etiam, ex æquo, primus ad tertium, ut tertius ad quintum, & quintus ad septimum, &c. quod docet, primum, tertium, quintum, septimum &c. terminos, exemptis reliquis, etiam geometrice proportionales esse, quorum adeo summa per Corollar. VIII, invenitur $\frac{lm}{mm - nn}$. Eodem pacto ostenditur, secundum, quartum, sextum &c. terminos seriem geometrice proportionalium efficere, cujus summa $\frac{ln}{mm - nn}$. Igitur differentia harum duarum seriérum, seu $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c. $= \frac{lm - ln}{mm - nn} = \frac{l}{m+n}$, ac propterea quantitas $\frac{l}{m+n}$ in istam seriem vicissim converti potest.

Coroll. 1. In omni Progressione geometrica descendente

[primo

[primo termino existente determinato, signisque + & — alternatim se excipientibus] summa seriei limites habet, quos nequit attingere, nedum egredi, qualiscunque statuatur ratio progressionis. Cum enim per hyp. $n > 0$, & $< m$, erit $\frac{l}{m+n} < \frac{l}{m+0} = \frac{l}{m}$; & $> \frac{l}{m+m} = \frac{l}{2m}$, hoc est, valor seriei perpetuo minor est ipso primo termino, & major ejus semisse. Num. LXXIV.

COROLL. 2. Si tamen $m = n$, fiet $\frac{l}{m+n} = \frac{l}{2m}$, & series $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4}$ &c. $= \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. unde paradoxum fluit non inelegans, quod $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. $= \frac{l}{2m}$. Etenim si ultimus seriei terminus signo — affectus concipiatur, termini omnes se mutuo destruere apparebunt, & si signo +, æquari videbuntur ipsi $\frac{l}{m}$, non $\frac{l}{2m}$. Ratio autem paradoxi est, quod continuata divisione ipsius l per $m+m$, residuum divisionis non minuitur, sed perpetuo ipsi l æquale manet; unde quotiens divisionis proprie non est sola series $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. sed $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. + vel $- \frac{l}{2m}$, faciendo scil. fractionem ex residuo & divisore, illamque signo + vel — afficiendo, prout ultimus seriei terminus vicissim — vel + habere fingitur.

XXXVIII.

Fractionem $1:(m-n)^2$ *transmutare in seriem infinitam.*

Quoniam quantitas $\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4}$ &c. per XXXVI, facta utrinque multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$, habebitur

Num. LXXIV. $\frac{l}{(m-n)^2}$ = feriei A, cujus termini finguli de novo in totidem alias feries B, C, D, E, F, &c. per eandem XXXVI. Prop. convertantur. Quo facto ferierum iftarum termini homologi in unam fummam conflati novam feriem Z conftituent, æqualem propterea quantitati propofitæ $\frac{l}{(m-n)^2}$, mixtamque ex ferie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, &c. & quantitatum geometrice progreffionalium $\frac{l}{mm}, \frac{ln}{m^3}, \frac{lnn}{m^4}, \frac{ln^3}{m^5}$ &c.

$$\frac{l}{(m-n)^2}=A\begin{cases}\frac{l}{mm-mn}=\frac{l}{mm}+\frac{ln}{m^3}+\frac{lnn}{m^4}+\frac{ln^3}{m^5}+\frac{ln^4}{m^6}\ \&c.=B\\ \frac{ln}{m^3-mmn}=\ .\ +\frac{ln}{m^3}+\frac{lnn}{m^4}+\frac{ln^3}{m^5}+\frac{ln^4}{m^6}\ \&c.=C\\ \frac{lnn}{m^4-m^3n}=\ .\ \ .\ +\frac{lnn}{m^4}+\frac{ln^3}{m^5}+\frac{ln^4}{m^6}\ \&c.=D\\ \frac{ln^3}{m^5-m^4n}=\ .\ \ .\ \ .\ +\frac{ln^3}{m^5}+\frac{ln^4}{m^6}\ \&c.=E\\ \frac{ln^4}{m^6-m^5n}=\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ +\frac{ln^4}{m^6}\ \&c.=F\\ \&c.\ =\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \&c.=\&c.\end{cases}$$

$$Z=\frac{l}{mm}+\frac{2ln}{m^3}+\frac{3lnn}{m^4}+\frac{4ln^3}{m^5}+\frac{5ln^4}{m^6}\ \&c.=\frac{l}{(m-n)^2}$$

Eadem feries Z elici quoque poteft divifione continua numeratoris l per denominatorem $mm-2mn+nn$, dicendo: mm in l, habeo $l:mm$, quod ductum in diviforem & fubtractum ex dividendo relinquit $+2ln:m-lnn:mm$; tum porro mm in $+2ln:m$, reperio $+2ln:m^3$, quod multiplicatum & fubtractum, ut decet, refiduum efficit $+3lnn:mm-2ln^3:m^3$, atque ita ulterius pergendo in infinitum: quo pacto, obfervabitur poft fingulas operationes duo membra reliqua manere, fed illa ufque & ufque

usque minora, tandemque data quavis quantitate propius ad nihilum vergentia. Num. LXXIV.

Idem etiam ostenditur ex lege reciprocorum, resolvendo seriem Z, methodo Prop. XIV, in infinitas series geometricas B, C, D, E, F &c. harum enim summæ cum novam progressionem A constituant, quæ ipsa summam efficit $l : (mm - 2mn + nn)$, sequitur reciproce, & hanc quantitatem $\frac{l}{(m-n)^2}$ per seriem Z legitime efferri posse.

XXXIX.

Fractionem $1 : (m + n)^2$ *convertere in seriem.*

Si operatio instituatur methodo Propos. præced. eadem, quæ ibi, obtinebitur series, nisi quod termini locorum parium acquirant signum —, sic ut habeatur: $\frac{l}{(m+n)^2} = \frac{l}{mm} - \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} - \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} - \frac{6ln^5}{m^7}$ &c.

XL.

Fractionem $1 : (m - n)^3$, *aut* $1 : (m + n)^3$, *exprimere per seriem.*

Ex analogia operationum præcedentium liquet modus hoc efficiendi; quorsum igitur plura? En operationem:

$$\frac{l}{(m-n)^2} = \frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} \text{ \&c. per}$$

XXXVIII., factaque hinc inde multiplicatione per $\frac{1}{m-n}$,

$\frac{l}{(m-n)^3}$

Num. LXXIV.

$$\frac{l}{(m-n)^3}=\left\{\begin{array}{l} \frac{l}{m^3-mmn}=\frac{l}{m^3}+\frac{ln}{m^4}+\frac{lnn}{m^5}+\frac{ln^3}{m^6}+\frac{ln^4}{m^7}\text{ \&c.} \\ \frac{2ln}{m^4-m^3n}=\ .\ +\frac{2ln}{m^4}+\frac{2lnn}{m^5}+\frac{2ln^3}{m^6}+\frac{2ln^4}{m^7}\text{ \&c.} \\ \frac{3lnn}{m^5-m^4n}=\ .\ .\ +\frac{3lnn}{m^5}+\frac{3ln^3}{m^6}+\frac{3ln^4}{m^7}\text{ \&c.} \\ \frac{4ln^3}{m^6-m^5n}=\ .\ .\ .\ .\ +\frac{4ln^3}{m^6}+\frac{4ln^4}{m^7}\text{ \&c.} \\ \text{\&c.}\ =\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{\&c.} \end{array}\right\}\text{per Prop. XXXVI.}$$

$$\frac{l}{m^3}+\frac{3ln}{m^4}+\frac{6lnn}{m^5}+\frac{10ln^3}{m^6}+\frac{15ln^4}{m^7}\text{ \&c.}=\frac{l}{(m-n)^3}$$

Eodem pacto habetur $\frac{l}{(m+n)^3}=\frac{l}{m^3}-\frac{3ln}{m^4}+\frac{6lnn}{m^5}-\frac{10ln^3}{m^6}+\frac{15ln^4}{m^7}$ &c.

Conflantur autem termini harum ferierum ex ductu terminorum progreffionis geometricæ in numeros trigonales 1, 3, 6, 10, 15, &c.

Si quis idem per divifionem continuam confequi defideret, is obfervabit, poft fingulas operationes tria fupereffe membra, fed ea fubinde minora, ultimoque prorfus evanefcentia.

Idem etiam regrediendo a ferie inventa patebit, fi illa, methodo Prop. XIV, in alias refolvatur, &c.

SCHOL. Haud diffimili operatione reperitur $\frac{l}{(m\pm n)^4}=\frac{l}{m^4}\pm\frac{4ln}{m^5}+\frac{10lnn}{m^6}\pm\frac{20ln^3}{m^7}$ &c. ut & $\frac{l}{(m\pm n)^5}=\frac{l}{m^5}\pm\frac{5ln}{m^6}+\frac{15lnn}{m^7}\pm\frac{35ln^3}{m^8}$ &c. feriebus mixtis ex geometrica & ferie pyramidalium, trianguli-pyramidalium, & ita confequenter in omnibus altioribus,

bus, ſervata ſemper eadem analogiæ ratione, ut non opus ſit his diutius immorari.

XLI.

Si proponatur ſeries differentialium, quæ mixta ſit ex ſerie geometrica quantitatum indeterminatarum, & alia quavis ſerie quantitatum conſtantium ſeu coefficientium, Integralia eorum abſoluta ſeriem conſtituent mixtam ex eadem ſerie coefficientium, ſimili geometrica indeterminatarum, & alia quadam harmonica.

Patet ex princ. calc. different. vel ſummatorii, juxta quæ quantitatis differentialis $nx^m dx$ integrale abſolutum reperitur $\frac{n}{m+1}x^{m+1}$; hinc enim ſi coefficientes n ſint progreſſionis cujuſvis, & exponentes m progreſſionis arithmeticæ, hoc eſt ipſa x^m progr. geometricæ, erunt quoque $m+1$ arithm. adeoque x^{m+1} geometr. & $1:(m+1)$ harmonicæ progreſſionis. Ut ſi proponatur ſeries differentialium $axdx$, bx^3dx, cx^5dx, fx^7dx &c. mixta ex ſerie quavis a, b, c, f &c. & geometrica xdx, x^3dx, x^5dx, x^7dx &c. erunt eorum integralia $\frac{1}{2}ax^2$, $\frac{1}{4}bx^4$, $\frac{1}{6}cx^6$, $\frac{1}{8}fx^8$ &c. mixta ex eadem ſerie a, b, c, f &c. geometrica ſimili xx, x^4, x^6, x^8 &c. & harmonica $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ &c.

XLII.

Exhibere aream Hyperbolæ inter Aſymptotas per ſeriem infinitam.

Mod. 1. *Per Arithm. Infin.* WALLISII. Eſto Hyperbola PCQ, [*Fig.* 1.] cujus centrum A, aſymptotæ AD, AS, applicatæ BC, IO [ιo], quærendumque ſit ſpatium CBIO [CBιo]. Sumto autem AB $= 1 =$ BD, BC $= b$, BI [Bι] $= x$, quæ non ſit $>$ AB vel BD, hoc eſt, unitate. Dividatur BI [Bι] in partes aliquot æquales BE, EF, FG, GR, RI [Bϵ, $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$, $\gamma\rho$, $\rho\iota$] quarum numerus ſit n, & ſingulæ dicantur d, ſic ut nd ſit $= x =$ BI [Bι]. Tum circumſcribantur [inſcribantur] hyperbolæ parallelogramma BK, EL, FM, GN, RO [Bκ, $\epsilon\lambda$, $\varphi\mu$, $\gamma\nu$, ρo], ductis applicatis EK, FL, GM, RN, IO [$\epsilon\kappa$, $\varphi\lambda$, $\gamma\mu$, $\rho\nu$, ιo],

Num. LXXIV. quæ ex natura hyperbolæ ordine reperiuntur $= b:(1 \mp d)$, $b:(1 \mp 2d)$. $b:(1 \mp 3d)$. $b:(1 \mp 4d)$, &c. usque ad ultimam $b:(1 \mp nd)$. Singulis igitur in d ductis, habentur areæ parallelogrammorum, quæ porro in series convertendæ sunt per XXXVI & XXXVII, ut sequitur:

$$BK\,[B\kappa] = bd:(1 \mp d) = bd \pm bdd + bd^3 \pm bd^4 + bd^5 \pm bd^6 \text{ \&c.}$$
$$EL\,[\iota\lambda] = bd:(1 \mp 2d) = bd \pm 2bdd + 4bd^3 \pm 8bd^4 + 16bd^5 \pm 32bd^6 \text{ \&c.}$$
$$FM\,[\varphi\mu] = bd:(1 \mp 3d) = bd \pm 3bdd + 9bd^3 \pm 27bd^4 + 81bd^5 \pm 243bd^6 \text{ \&c.}$$
$$GN\,[\gamma\nu] = bd:(1 \mp 4d) = bd \pm 4bdd + 16bd^3 \pm 64bd^4 + 256bd^5 \pm 1024bd^6 \text{ \&c.}$$
$$\text{Ult. } RO\,[\rho o] = bd:(1 \mp nd) = bd \pm nbdd + nnbd^3 \pm n^3bd^4 + n^4bd^5 \pm n^5bd^6 \text{ \&c.}$$

Harum serierum primi termini æquantur, secundi progrediuntur ut numeri naturales, tertii ut eorundem quadrata, quarti ut cubi, &c. Hinc, posito numero serierum seu parallelogrammorum n infinito, [quo quidem casu summa parallelogrammorum seu inscriptorum seu circumscriptorum ab ipso curvilineo CBIO vel $CB\iota o$ non differt,] summa terminorum primæ seriei perpendicularis erit æqualis, terminorum secundæ dimidia, tertiæ subtripla &c. summæ totidem, hoc est, n terminorum ultimo æqualium, per ea, quæ docet WALLISIUS in *Arithm. Infinit.* nosque demonstrabimus alibi * : ac propterea summa omnium serierum perpendicularium, id est omnium parallelogrammorum, seu area spatii hyperbolici CBIO [$CB\iota o$] hac serie exprimetur:

$$nbd \pm \tfrac{1}{2}n^2bd^2 + \tfrac{1}{3}n^3bd^3 \pm \tfrac{1}{4}n^4bd^4 + \tfrac{1}{5}n^5bd^5 \pm \tfrac{1}{6}n^6bd^6 \text{ \&c.}$$

sive, loco nd substituendo x,

$$bx \pm \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}bx^3 \pm \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{5}bx^5 \pm \tfrac{1}{6}bx^6; \text{ \&c.}$$

Mod. 2. *Per Calc. differ.* LEIBNITII. Positis, ut prius, AB $= 1 =$ BD, BC $= b$, & BI [$B\iota$] $= x$, ejusque elemento RI [$\rho\iota$] $= dx$, erit ex natura hyperbolæ IO [ιo] $= b:(1 \mp x)$, & elementum spatii hyperbolici RO [ρo] $= bdx:(1 \mp x) =$ seriei geometricæ $bdx \pm bxdx + bxxdx \pm bx^3dx + bx^4dx$ &c.

* In *Arte Conjectandi*, Part. II, Cap. 3.

per

per XXXVI & XXXVII; adeoque ſumma elementorum $\int(bdx:(1\mp x))$, ſive ſpatium CBIO [$CB\iota o$] $= bx \pm \frac{1}{2}bxx + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5$ &c. eadem ſeries, quæ ſupra, mixta ſcil. ex geometrica & harmonica, per præced. Hæc igitur ſi ſummari poſſet, daretur Hyperbolæ quadratura. Num. LXXIV.

COROLL. 1. Si $BI = B\iota$, dabitur tum ſumma tum differentia ſpatiorum CBIO & $CB\iota o$ per ſeriem ex geometrica & harmonica mixtam: cum enim ſit oſtenſum

$$\left.\begin{aligned} CBIO &= bx + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{5}bx^5 + \tfrac{1}{6}bx^6, \text{ \&c.} \\ CB\iota o &= bx - \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}bx^3 - \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{5}bx^5 - \tfrac{1}{6}bx^6, \text{ \&c.} \end{aligned}\right| \text{fiet facta additione \& ſubtractione,}$$

$$CBIO + CB\iota o = 2bx \quad + \tfrac{2}{3}bx^3 \quad + \tfrac{2}{5}bx^5 \quad \text{\&c.}$$

$$CBIO - CB\iota o = \quad bx^2 \quad + \tfrac{1}{2}bx^4 \quad + \tfrac{1}{3}bx^6 \text{ \&c.}$$

COROLL. 2. Poſita BI [x] $=$ BA [1] fit ſpatium interminatum hyperbolicum PCBAS $= b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}b + \frac{1}{6}b$ &c. ſimplici ſeriei harmonicæ, quæ cum infinita ſit per XVI, arguit & aream hujus ſpatii talem eſſe. Conf. Cor. 4. ejuſd. Prop.

COR. 3. Sin & $B\iota$ [x] $=$ BD [1] $=$ BC [b], reſultat pro ſpatio CBDQ ſeries harmonica $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. hoc eſt, ſubducendo unumquemque terminum ſigno $-$ affectum a præcedenti, ſeries $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56}$ &c. cujus termini per ſaltum excerpti ſunt ex ſerie reciproca trigonalium Q, Prop. XV, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. Quod ſi ſtatuatur quadr. AB, BC vel BD quadruplo minus, nempe $\frac{1}{4}$, exhibebitur etiam ſpatium CBDQ per ſeriem prioris ſubquadruplam $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. quæ per ſaltum formatur ex ſerie I Propoſ. XVII. Conf. *Act. Lipſ.* 1682. p. 46. (*)

XLIII.

Invenire aream ſpatii ABEFS [BDφ] comprehenſi aſymptota Hyperbola AD, & Curva BEF [$B\iota\varphi$], qua talis, ut rectangulum ſub

(*) Ibi, Seriem eandem, ſed ſine Demonſtratione, dedit LEIBNITIUS.

Num. LXXIV. *ſub ejus applicata IE [ι ε] & recta conſtante AB, BC vel BD [quæ ſit 1] æquetur ſpatio hyperbolico CBIO [CBιο].* Fig. 2.

Quoniam, poſita BI $= x$, ſpatium hyperbolicum CBIO $= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. per præced. eadem quoque ſeries denotabit [ob AB vel BC $= 1$] longitudinem applicatæ IE, quæ propterea ducta in IR, ſeu dx, producit $xdx + \frac{1}{2}x^2dx + \frac{1}{3}x^3dx + \frac{1}{4}x^4dx + \frac{1}{5}x^5dx$ &c. $=$ RE, elem. ſpatii BIE. Hujus ſeriei terminos ſummando, fit ſpatium BIE $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{30}x^6$ &c. ſeriei mixtæ ex geometrica & reciproca trigonalium, quæ poſito inſuper BI $[x]$ $=$ BA $[1]$ mutatur in ſimplicem trigonalium reciprocam $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. cujus ſumma $= 1$, per XV. Eſt igitur totum ſpatium ABEFS abſolute quadrabile, æquale quippe quadrato ipſius AB (b). Nota hic exemplum Curvæ mechanicæ, ubi quadratura ſpecialis ſuccedit abſque generali; ſimplicis enim ſeriei ſummam dedimus, mixtæ non item.

Eadem ratione oſtendetur ex altero latere ſpatium Bιε $= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{20}x^5$ &c. totumque ſpatium BDφ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$ &c. (c)

CoROLL. Completis rectangulis CD & BQ, aio fore curvilineum mechanicum BDφ $=$ duplo curvilineo hyperbolico CQL, differentiam curvilineorum ABEFS & BDφ $=$ duplo ſpatio CQH, & ſummam eorundem $= 2$ CBDQ (d); quæ ſic palam

(b) *Aliter.* Sit CBIO $= z =$ IE $\times 1$, eritque $dz = dx : (1 - x)$, & ſpat. BIE $= \int z dx = zx - \int x dz = zx - \int (xdx : (1 - x)) = zx + x - \int (dx : (1 - x)) = zx + x - z$. Pro z ſcribatur valor ejus $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ &c. & invenies BIE $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, &c. Poſito autem BI $[x] = 1$, BASFB $[zx + x - z]$ reducitur ad $x = 1 = AB^2$.

(c) Eodem argumento, invenies, ſi CBιο ponatur $= y$, eſſe Bιε $= yx - x + y$. Et, ubi Bι $[x]$ ponitur $= 1$, fit BDφ $= 2y - 1$. Scribe pro y valorem ejus $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$ &c. & habebis eaſdem ſeries quas hic dat Noſter.

(d) Igitur BDφ $[2y - 1] =$ 2CBDQ $-$ CBDM $=$ 2CBDQ $-$ 2LBDQ $=$ 2CLQ. Et ABEFS $-$ BDφ $= 1 - 2y + 1 = 2 - 2y$ $=$ 2CBDH $-$ 2CBDQ $=$ 2CQH: Atque ABEFS $+$ BDφ $= 1 + 2y - 1$ $= 2y =$ 2CBDQ.

palam fiunt: Si a ferie $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. fubducatur Num. LXXIV.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ &c. auferendo figillatim primum terminum a primo, fecundum a fecundo, tertium a tertio, &c. relinquetur $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42}$ &c. $=$ fpatio $BD\varphi$, ut oftenfum. Si vero eadem feries ex altera fic tollatur, ut primus ejus terminus dematur ex fecundo alterius, fecundus ex tertio, tertius ex quarto &c. orietur $\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}$ &c. $=$ $\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$ &c. $- 1 =$ (per præced.) duplo fpat. hyperb. $CBDQ - BH = 2CBDQ - 2DL = 2CLQ$. Ergo $BD\varphi = 2CLQ$. Igitur cum oftenfum etiam fit $ABEFS = 1 = BH = 2DL = 2LH$, erit $ABEFS - BD\varphi = 2LH - 2CLQ = 2CQH$; nec non $ABEFS + BD\varphi = 2DL + 2CLQ = 2CBDQ$. *Quæ erant demonftranda.*

XLIV.

Invenire aream fpatii ABKGMT [BDNγK] comprehenfi afymptota Hyperbola AD, & Curva KGM [KγN], quæ talis, ut rect. BIG [Bιγ] fub ejus applicata IG [ιγ] & indeterminata BI [Bι], æquetur fpatio hyperbolico CBIO [CBιo]. Fig. 2.

Quia pofitis omnibus, ut prius, fpatium hyperb. $CBIO = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. per XLII, erit, per hyp. facta divifione per BI feu x, recta $IG = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4$ &c. adeoque RG elem. fpat. $BIGK = dx + \frac{1}{2}xdx + \frac{1}{3}x^2dx + \frac{1}{4}x^3dx$ &c. omniaque RG feu fpatium $BIGK = \frac{1}{1}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{25}x^5$ &c. & pofita $x = 1$, fpatium totale ABKGMT $= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c. feriei reciprocæ quadratorum, cujus fummam etiamnum defideramus. Conf. Prop. XVII, fub fin. (*)

Haud diffimili modo reperitur ex altera parte fpatium $B\iota\gamma K = \frac{1}{1}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{25}x^5$ &c: fumtaque $x = 1$, totale fpatium $BDN\gamma K$ & $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c.

(*) Imo ibi, [pag. 399] poft Cel. EULERUM oftendimus Seriem reciprocam quadratorum [atque ideo fpatium ABKGMT] effe æqualem fextæ parti quadrati, cujus latus eft peripheria circuli, diametro exiftente $= 1 = AB$.

Num. LXXIV. Coroll. Spatium ABKGMT duplum est spatii BDNγK; cum enim summa utriusque sit $\frac{2}{1} + \frac{2}{9} + \frac{2}{25}$ &c. differentia $\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{36}$ &c. erit utique summa ad differentiam, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$ &c. ad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}$ &c. hoc est, ut 3 ad 1, per XXIV; unde spatium unum alterius duplum esse necesse est, ut maxime neutrius absolutam magnitudinem exploratam habeamus. Vid. Schol. ibid. (f).

XLV.

Exhibere Quadraturam Circuli aut Rectificationem lineæ circularis per seriem. [Fig. 3.]

In peripheria semicirculi BCD, sumto indefinite puncto H, demittatur ex illo in radium AB perpendicularis HE; & sit AB $= 1$, & BE $= x$, adeoque, ex natura circuli, EH $= \sqrt{(2x - xx)}$: quo posito, cum ob simil. Trianguli characteristici LGH & Trianguli HEA, HE sit ad HA, sicut LG vel EF, elem. abscissæ BE, ad LH, elem. arcus circ. BH; reperitur LH $= dx : \sqrt{(2x - xx)}$, factaque multiplicatione per $\frac{1}{2}$, semissem radii AH, sector HAL seu elem. sectoris HAB $= dx : 2\sqrt{(2x - xx)}$. Hæc igitur quantitas, cum absolute summari nequeat, in seriem convertenda est; sed prius tollenda irrationalitas, quod eo fere modo fit, quo in Problematis *Diophanteis* uti vulgo suevẹrunt. In hunc finem pono $\sqrt{(2x - xx)} = x : t$, seu $2x - xx = xx : tt$; ubi, quia divisio fieri potest per x, ipsaque non nisi unius dimensionis in æquatione relinquitur, ejus valor in rationalibus prodibit, unde & dx, & per hypoth. $\sqrt{(2x - xx)}$ seu $x : t$, ipsaque adeo fractio $dx : 2\sqrt{(2x - xx)}$, rationales fient; nempe $x = 2tt : (1 + tt)$, $dx = 4tdt : (1 + tt)^2$, $\sqrt{(2x - xx)} = x : t = 2t : (1 + tt)$, & denique $dx : 2\sqrt{(2x - xx)} = dt : (1 + tt)$; hinc fractio in seriem geometricam per XXXVII conversa exhibet $dt - ttdt + t^4dt - t^6dt + t^8dt$ &c. Summa igitur elementorum HAL, seu totus sector HAB $= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$ &c. eoque per semissem radii $\frac{1}{2}$ diviso,

(f) Supra pag. 531. 532.

so, arcus $BH = \frac{2}{1}t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{2}{9}t^9$ &c. quæ series mixtæ sunt ex geometrica & harmonica, per XLI, a quarum proin summatione decantatum illud de Circuli Tetragonismo Problema dependet. Num. LXXIV.

Nota, ductis ex B & H tangentibus circuli BI, HI, sibi mutuo occurrentibus in I, junctaque HD, quæ radium AC secet in K, fore BI vel $IH = AK$, utramlibet autem $= t$. Nam 2. ang. $BAI = BAH = AHD + ADH = 2ADH$. Ergo $BAI = ADH$; cumque & ABI & DAK anguli, nec non latera AB & AD æquentur, erit quoque $BI = AK$. Deinde cum sit per hypoth. 1 ad t, ut $\surd(2x - xx)$ ad x; itemque, ob sim. Triang. DAK & DEH, AD seu 1 ad AK, sicut DE ad EH, hoc est, ex natura circuli, HE ad EB, seu $\surd(2x - xx)$ ad x; erit utique $1 : t = 1 : AK$, ac proinde AK seu $BI = t$.

Coroll. 1. Sumta $t = 1$, quo casu & BE, x seu $2tt : (1 + tt)$, æquatur BA, 1, fiet quadrans $BAC =$ simplici seriei harmonicæ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. $=$ [subducto reapse unoquoque termino signo $-$ affecto a præcedente] $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99}$ &c. Hinc quia quadratum radii est ad quadrantem circuli, sicut quadratum diametri ad totum circulum, sequitur si quadratum diametri, hoc est quadratum circulo circumscriptum sit 1, ac proin eidem inscriptum $\frac{1}{2}$, totius circuli aream per modo memoratam seriem expressum iri; adeoque si quadratum circulo inscriptum sit $\frac{1}{4}$, circuli aream fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. cujus seriei termini per saltum excerpti sunt ex serie H Prop. XVII. Conf. *Acta Lips.* 1682. p. 45. (*).

Coroll. 2. Posita Tangente $BI = t$, erit arcus, cujus tangens est, $= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7$ &c. utpote semissis arcus BH. Confer. *Acta Lips.* 1691. pag. 179. (*).

XLVI.

Exhibere generaliter Sectorem cujusvis Sectionis Conicæ ex centro per seriem. [Fig. 4 & 5.]

Esto

(*) Ubi Leibnitius eandem seriem affert, sed sine demonstratione.

Num. LXXIV. Esto Coni-sectio quæcunque, Hyperbola sive Ellipsis, BCD, cujus centrum A, vertex B, semi-latus transversum $AB = a$, semi-axis conjugatus $AL = 1$, adeoque semi-latus rectum $= 1 : a$, & ratio laterum, ut aa ad 1. Ponanturque porro abscissa indeterminata $BG = x$, $AG = z = a \pm x$ [$\pm$ significat $+$ in Hyperbol. & $-$ in Ellips. uti $\mp$ vicissim $-$ in Hyp. & $+$ in Ell.] ejusque elementum FG vel $CH = dx = \pm dz$, ordinata $GD = y$, ejus elementum $DH = dy$, & jungens D cum centro recta $AD = u = \sqrt{(zz + yy)}$. Ducta etiam intelligatur HCI parallela axi, secansque curvam in C & rectam AD in I, atque ex C demissa concipiatur in AD perpendicularis CE. Quibus positis, erit primo ex natura curvæ $aa : 1 = \pm zz \mp aa\ [2ax \pm xx] : yy$; unde fit $aayy = \pm zz \mp aa\ [2ax \pm xx]$, & differentiando $aaydy = \pm zdz$, & denique $dy = \pm zdz : aay = zdx : aay$. Deinde quoniam, ob sim. Triang. DGA & DHI, DG [y] est ad GA [z], sicut DH [dy] ad HI, invenitur $HI = zdy : y$, ac proinde CI [$HI \mp HC$] $= zdy : y - dz = (zdy - ydz) : y$. Quare denuo propter Triang. sim. AGD & IEC, ut AD [u] ad DG [y], sic IC [$(zdy - ydz) : y$] ad CE; unde reperitur $CE = (zdy - ydz) : u$, quæ ducta in semissem AD, seu $\frac{1}{2}u$, dat aream trianguli elementaris $ACD = \frac{1}{2}zdy - \frac{1}{2}ydz =$ [posito loco dy valore ejus] $\pm zzdz : 2aay - \frac{1}{2}ydz = \pm (zzdz - aayydz) : 2aay =$ [substituendo $\pm zz \pm aa$ loco $aayy$] $(\pm zzdz \mp zzdz \pm aadz) : 2aay = \pm adz : 2ay = adx : 2ay =$ [loco ay surrogando $\sqrt{(2ax \pm xx)}$] $adx : 2\sqrt{(2ax \pm xx)}$, de qua in seriem convertenda & summanda agitur. Primo autem irrationalitas ex illa tollenda, mediante alia indeterminata, quæ loco x surrogari debet, ut in præc. Pono itaque $\sqrt{(2ax \pm xx)} = x : t$, unde fluit $x = 2att : (1 \mp tt)$, & $dx = 4atdt : (1 \mp tt)^2$, & $\sqrt{(2ax \pm xx)} = x : t = 2at : (1 \mp tt)$, & denique $adx : 2\sqrt{(2ax \pm xx)} = adt : (1 \mp tt) =$ seriei geom. $adt \pm attdt + at^4dt \pm at^6dt + at^8dt$ &c. per XXXVI & XXXVII. Summa igitur omnium sectorum elementarium ACD, id est, area totius Sectoris $ABCD = at \pm \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{5}at^5 \pm \frac{1}{7}at^7 + \frac{1}{9}at^9$, &c.

rectan-

rectangulo scil. comprehenso sub a semi-latere transverso & recta, cujus longitudo est $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$ &c. Unde patet, quo pacto generaliter quadraturæ sectionum Conicarum ad summas serierum ex geometricis & harmonicis mixtarum reducantur. Num. LXXIV.

Nota, ductis per verticem B & curvæ punctum D tangentibus BM, DM, sibi mutuo occurrentibus in M; dico fore BM $= t$. Quoniam enim AG : AB = AB : AT, per 37 Lib. I Apollonii, ac idcirco convertendo AB : TB = AG [z] : BG [x]; nec non [ob sim. Tr. TBM & CHD], TB : BM = CH [dx] : HD [dy] = [ex æquatione Curvæ differentiali] $aay : z$; erit, ex æquo perturbate AB [a] : BM $= aay : x$; unde obtinetur BM $= x : ay = x : \sqrt{(2ax \pm xx)}$, adeoque $\sqrt{(2ax \pm xx)} : x = 1 :$ BM. Verum, per constructionem, $\sqrt{(2ax \pm xx)} : x = 1 : t$. Ergo omnino BM $= t$. Conf. *Acta Lipf.* 1691, pag. 179.

Vide Num. XC.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Falsissimum est, nihil a nobis dici posse, quod non sit dictum prius.

II.

Argumentum CARTESII pro existentia Dei, ab idea entis perfectissimi desumtum, est sophisticum.

III.

Illud etiam, quo Philosophus realem mentis a corpore distinctionem probare nititur, est ficulneum.

IV.

Naturam enim corporis in sola extensione consistere, nobis equidem nondum persuasit.

Num. LXXIV.

V.

Sed & hoc videtur nobis ἄτοπον, quod cum inter mentem & corpus reale discrimen statuat, idem non agnoscat inter diversas mentis facultates, quæ non minus separatim possunt concipi, ac illa.

VI.

Distinctio perceptionis rei corporeæ in imaginationem & conceptum purum nulla est; omnis enim perceptio rei materialis est imaginatio.

VII.

Qui contra MEISNERUM, PERERIUM, THOMAM Aquinatem, *& alios, possibilem vel extensionis, vel durationis Mundi infinitatem negant, munimen suæ sententiæ quærant adversus hoc argumentum;* Quod omni assignabili quantitate majus est, infinitum est, *per definit. Geom.* Quod omni assignabili quantitate majus esse potuit, infinitum esse potuit: *Et analogice*: Quod omni assignabili tempore prius est, æternum est: Quod omni assignabili tempore prius esse potuit, æternum esse potuit: Sed Mundus, *nemine contradicente*, omni assignabili quantitate & tempore major & prior esse potuit. Ergo infinitus & æternus esse potuit.

VIII.

Cur, in Versione LOBWASS. Psalmi CIX, *ultimi versus plerarumque stropharum omni mensura destituantur, causa est, quod cum impari constent syllabarum numero, nequeunt esse Iambici masculini. Vitium vitasset Auctor, si vel omnes fecisset Trochaicos, ut in stroph.* 2, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, &c. *vel Amphibrachycos, ut in stroph.* 5, 12, 33, 55, 62, 72, 75, 77, 83. *vel saltem Iambicos femininos, qui cum versibus antepenultimis rythmos constituerent, ut fecerunt BEZA* & *CONRADUS in versionibus suis gallicis.*

IX.

In vulgaribus Systematibus Arithmeticæ perperam omittitur illa species Regulæ Dupli, *quæ ex duabus proportionibus reciprocis componitur.*

X.

Num. LXXIV.

X.

Axioma Euclideum: Si ab æqualibus æqualia auferas, reſidua ſunt æqualia, *abſolute verum non eſt; quando reſidua hac incomparabiliter parva ſunt reſpectu datarum vel ablatarum magnitudinum: ad quod proin in calculo infinite parvorum caute advertendum, ne in paralogiſmum incidamus.*

XI.

Cl. Dnus. NIEUWENTIIT, *dum prima quantitatum elementa, ſeu differentialia recte admittit; ſecunda, ſeu differentio-differentialia inepte rejicit.*

XII.

Modus inſcribendi generaliter omnia Polygona regularia in circulo, quem ex RENALDINO *citat Celeb.* STURMIUS *in* Matheſi enucleata, *pag.* 38, *manifeſte fallax eſt; ut mirum ſit illum non ſtatim a Viro Cl. repudiari. Sumit enim inſcriptionem Heptagoni pro Problemate plano, quod ſolidum eſſe conſtat. Ut taceam, quod ne quidem in Pentagono & Octogono ſuccedit. Peccat autem, in toto circuitu, pro Pentagono circiter min.* 13, *in defectu; pro Heptagono, min.* 37; *& pro Octogono min.* 90, *in exceſſu* (a).

(a) Qualis ſit iſte modus inſcribendi in circulo Polygona regularia, diſcas vel ex RENALDINO ipſo, *De reſolutione & compoſitione mathematica*, vel ex STURMIO, loco citato, vel ex WOLFIO, *Elem. Analyſ. finit.* Probl. 136. §. 192. Hæc autem ratio, quando & quantum fallat, facile colligitur comparando latus Polygoni hac methodo determinatum cum vero latere. En utriuſque formulam. Sit radius circuli $= 1$, numerus angulorum Polygoni $= n$, erit latus verum $= ((\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n} - (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n})\sqrt{-1}$, latus *Renaldianum* $= \sqrt{((nn + 4n + 16 - \sqrt{(n^4 + 8n^3 - 144nn + 512n - 512)}) : (2nn - 4n + 8))}$. Igitur ſi n ſumatur ſucceſſive pro 3, 4, 5, 6, &c. comparatio valorum ex utraque formula derivatorum manifeſtabit quibus in caſibus Regula *Renaldiniana* ſuccedat, aut fallat, & erroris quantitatem determinabit. Nec arbitror eam in aliis Polygonis quam in Triangulo, Quadrato, & Hexagono ſuccedere. Certe, ſi univerſalis eſſet, determinaretur facile peripheria circuli. Nam, ſi fiat $n = \infty$, formula lateris *Renaldiniani* reduceretur ad $\sqrt{((nn + 4n + 16 - nn - 4n + 80, \&c.) : (2nn - 4n + 8))}$

Num. LXXIV.

XIII.

Quid contra sentiendum sit de Scholio dicti Auctoris, pag. 181, quo Quadraturam circuli Leibnitianam *suspectam velle reddere videtur, superius ex nostra Prop. XLV colligitur.*

XIV.

Titius *apud* Caium *omnia sua bona fœnori exponit; ea conditione, ut sibi quotannis in sui alimentationem, ultra convenientem usuram, qua sola non sufficeret, partem sortis tantam reddat quæ, una cum dicta usura, determinatam quandam summam, de qua conventum est, constituat. Quæritur, quamdiu suffectura sint ejus bona?* Resp. *Observetur mira identitas Quæstionis in speciem diversissima, cum Problemate penultimi Corollarii Disputationis nostræ præcedentis* De Seriebus, *ubi quæsitum fuit, quot antlia haustibus aer recipientis ad datum raritatis gradum perducatur. Nam si ponatur*

Sors integra - - - = a = - - - - *Cavitas recipientis*
Eadem cum usura primi anni = b = *Cavitas recipientis & antlia simul*
Pensio annua - - - = c = - - *Densitas aeris naturalis*
Id quod, elapso primo anno, sorti demendum - - - - = f = - - *Densitas aeris optata.*
Numerus annorum, quibus bona exhauriuntur - - = x = *Numerus haustuum antliæ*

reperitur utrobique x = (*Log.*c — *Log.*f) : (*Log.*b — *Log.*a). (b)

+ 8)) = [propter $n = \infty$] $\sqrt{(48 : nn)} = \frac{4}{n}\sqrt{3}$. Hoc latus Polygoni, si multiplicetur per n numerum laterum, habebitur pro peripheria Polygoni infinitilateri, id est, circuli, $4\sqrt{3} = 6.928+$, quod veræ peripheriæ longitudinem multum excedit.

(b) De numero haustuum requisito ut aer in dato recipiente contentus ad datam raritatem reducatur, videsis, N°. LIV, pag. 541, Notam n; ubi hoc tantum animadvertendum est, [si formulam $x =$ log. r : log. a, ad literas hic ab Auctore usurpatas revocare velis,] rationem r vel $r : 1$ eam esse quæ hic $c : f$; & rationem a, vel $a : 1$, eam quæ hic $b : a$ dicitur. Igitur log. r = log. c — log. f, atque log. a = log. b — log. a; nec non

Num. LXXIV.

non $x = [\log. r : \log. a] = (\log. c - \log. f) : (\log. b - \log. a)$.

Problema quod attinet hujus Coroll. illud sic potest concipi. *Caius Titio* singulis annis non modo debitam usuram $b - a$ solvit sortis a, cujus summæ debitor remanet, sed insuper ipsi fœneratur summam f quæ cum usura $b - a$ efficit c, [adeo ut sit $c = b - a + f$] cujus summæ f, cum usuris, & usurarum usuris, creditor fit apud *Titium*, donec creditum singulis annis crescens tandem compenset debitum a. Anno igitur primo creditum est f; quod anno secundo, propter usuras excrescit ad $\frac{b}{a} f$, cui adjicitur summa f. Anno tertio, hæc summa cum fœnore æquatur $\frac{bb}{aa} f + \frac{b}{a} f$ cui additur pariter f, sicque singulis annis augetur creditum, quod tandem post elapsos x annos, æquale est $((b:a)^{x-1} + (b:a)^{x-2} + \cdots + b:a + 1) f$ $=$ [per Prop.8, pag.381] $((b:a)^{x} - 1) f : (b:a - 1)$; quod si ponatur $= a$ [scil. ut crediti debitique fiat compensatio] erit $(b:a)^{x} = (b - a + f) : f = c : f$. Igitur $x \times \log.(b:a) = \log.(c:f)$; aut $x = \log.(c:f) : \log.(b:a)$, vel $x = (\log. c - \log. f) : (\log. b - \log. a)$.

N°. LXXV.

JACOBI BERNOULLI SOLUTIO

PROBLEMATUM FRATERNORUM

Peculiari Programmate Cal. Jan. 1697, Groningæ, *nec non* Actorum Lipſ. *menſe Junio & Decemb.* 1696, *& Febr.* 1697, *propoſitorum; una cum Propoſitione reciproca aliorum.*

Acta Erud. Lipſ. 1697. *Mai.* p. 211.

GEometræ methodum de *Maximis* & *Minimis* ad illa duntaxat Problemata huc uſque adhibuerunt, in quibus ex infinitis partibus ſeu functionibus unius datæ curvæ aliqua maxima minimave requiritur; neque cogitarunt de ejus applicatione ad talia, ubi ex ipſis infinitis curvis non datis una deſideratur, cui maximum aliquod minimumve competat; licet & hæc ſubtilitate inventionis & utilitatis præſtantia cæteris minime ſint inferiora. In eorum numero eſt, quod *Frater* Menſe Junio primum propoſuit, cujuſque ſolutioni terminum elapſi anni finem ſtatuit, Problema de invenienda *Curva Oligochrona*, per quam deſcendendo grave a dato puncto breviſſimo tempore perveniat ad aliud datum punctum. Quanquam autem hac *Fratris* provocatione me non teneri exiſtimabam; nihilominus cum ſuperaccesſiſſet

cessisset humanissima Celeberrimi Domini LEIBNITII invitatio, N.LXXV. laborem solutionis amplius subterfugere non potui. Postquam enim hic Vir, litteris die 13 Septembris ad me datis, significasset se solvisse Problema, juxtaque desiderare ut & alii tentarent: ad ejus sollicitationem aggressus sum quod alias intactum reliquissem, idque optato protinus successu: solutionem enim sexto Octobris jam habui, & ab illo tempore Amicis ostendi. Cur autem non potius ad *Acta* communicarim, causa est, quod cum terminum solutionis in exterorum gratiam ad Pascha usque præsentis anni prorogatum intelligerem; ego interea speculationem ad alia quoque difficiliora Problemata nunc una proponenda promovere statuissem. Priusquam vero ad solutionem præsentis Problematis accedam, sequens præmitto *Lemma*.

Si curva ACEDB [*Fig.* 1] talis sit, quæ requiritur; hoc est, per quam descendendo grave brevissimo tempore ex A ad B perveniat, atque in illa assumantur duo puncta quantumlibet propinqua C & D: Dico, portionem curvæ CED omnium aliarum punctis C & D terminatarum curvarum illam esse, quam grave post lapsum ex A brevissimo quoque tempore emetiatur. Si dicas enim, breviori tempore emetiri aliam CFD, breviori ergo emetietur ACFDB, quam ACEDB; contra hypothesin.

Esto igitur in plano utcunque ad horizontem inclinato [nec enim verticale sit, necesse est] curva desiderata ACB [*Fig.* 2] per quam descendens grave ex A breviori tempore perveniat ad B, quam per aliam quamcunque in eodem plano positam; & sint in illa sumpta ubivis duo puncta C & D infinite propinqua, ductæque intelligantur recta horizontalis AH, ejusque perpendicularis CH, & huic normalis DF, bisectaque CF in E, compleatur parallelogrammum DE ducta recta EI. Quæritur in hac punctum G, id est, inclinatio particularum curvæ CG, GD ad se invicem, quæ faciat, ut tempus descensus per CG + tempus descensus per GD [quod sic denoto tCG + tGD, intellige semper post lapsum ex A] sit minimum. Ad hoc indagandum, intelligatur in recta EI aliud punctum L, sic ut GL sit incom-

para-

N.LXXV. parabiliter minor ipsa EG; ductisque CL, DL, super C & D descripta concipiantur arcuum elementa LM, GN; erit, ex natura minimi, tCL + tLD = tCG + tGD; adeoque tCG — tCL = tLD — tGD, [a] quo posito, sic arguo:

CE:

(a) Notabile est in primis istud Problema, quod primum fere dedit occasionem Geometris cogitandi de hujusmodi quæstionibus, in quibus non investigatur in data curva maximum aliquod, minimumve; sed curva desideratur quæ sit ipsa maximum aut minimum, hoc est, hanc habeat curvaturam quæ proposito alicui fini optime conveniat. Quoniam autem Synthesin meram, particularem, nec ad similes casus facile applicandam, hic protulit Noster, æquum est ut Analysin magis generalem proponamus, rem Geometris notissimam, sed Tyronibus, quorum in gratiam scribimus, forte utilem. Igitur, post Lemma Auctoris nostri, quo docet conditionem maximi minimive qua tota curva gaudet, etiam singulis ipsius particulis infinite parvis competere, & istud ostendendum erat, quod assumit; si curva ACGD [*Fig.* A,] atque ejus particula CGD tempore brevissimo percurratur, vel, generatim, omnium optime præstet aliquem effectum, esse, sumta GL incomparabiliter minori ipsa EG, tCG + tGD = tCL + tLD; ubi tCG, non modo tempus descensus per CG, sed effectum quemcunque qui præstatur per CG denotare potest. Scil. Si CλD, ClD, CLD, CGD, CgD, CγD repræsentent omnes curvas possibiles a C ad D ductas, inter quas desiderata sit CGD; patet, si maxima sit effectus propositi quantitas in CGD, eandem crescere debere eundo a CλD ad CGD, & decrescere pergendo a CGD ad CγD. Ergo in CGD neque crescet, neque decrescet, sed stabit. Idem erit igitur effectus per CGD, & ipsi vicinissimam CLD; hoc est, erit tCG + tGD = tCL + tLD, vel tCG — tCL = tLD — tGD.

Hoc posito, sit $A = t$CG, & $dA = t$CG — tCL; nec non $\alpha = t$GD, & $d\alpha = t$LD — tGD, & erit $dA = d\alpha$. Sed, ut habeatur dA, A non est simpliciter differentianda, sed ita, ut maneant constantes x [AH], dx [HP vel CE], y [HC], s [AC]. Nam cum CL transit in CG, solæ CL, [ds], EL [dy] mutantur. Ista crescit incremento LG [ddy]; illa augmento GM [dds] $= d\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dyddy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ [est enim dx constans] $= dyddy : ds$. Igitur si A sit functio ipsarum x, dx, y, dy, s, ds, ejus differ. dA, induet hanc formam $Bddy + Cdds = Bddy + Cdyddy : ds = (B + Cdy : ds)\, ddy$. Pariter, ut habeatur $d\alpha$, attendendum est quid maneat, quid mutetur, quando GD transire ponitur in LD. Manent autem AP [ξ], PQ = LO = GK [$d\xi$]. Sed PG [ν] decrescit, atque DK [$d\nu$],

quod

N.LXXV.

$$\begin{array}{l} CE : CG = tCE : tCG \\ CE : CL = tCE : tCL \end{array} \Big\} \text{ ex natura descens. grav.}$$

$$\text{Ergo } CE : CG - CL\,[MG] = tCE : tCG - tCL$$

$$\text{Sed } MG : GL = EG : CG \;[\text{ob sim. tr. } MLG, CEG]$$

$$\text{Quare: } CE : GL = EG \times tCE : CG \times (tCG - tCL)$$

EF:

quod evadit D O, crescit quantitate G L [ddy]; ACG [σ] reducitur ad ACL & minuitur lineola GM [$dyddy : ds$], GD [$d\sigma$] vero, quod fit D L, augetur incremento L N [$dd\sigma$] $= d\sqrt{(d\xi^2 + dv^2)} =$ [ob $d\xi$ constans] $dv\,ddv : d\sigma = dv\,ddy : d\sigma$. Ergo $d\alpha$ habebit hanc formam $-\varphi dv + \beta ddv - \gamma d\sigma + \kappa dd\sigma = -\varphi ddy + \beta ddy - \gamma dyddy : ds + \kappa dvddy : d\sigma = (-\varphi + \beta - \gamma dy : ds + \kappa dv : d\sigma)\,ddy$. Hoc si æquale ponatur ipsi dA, erit, utrinque dividendo per ddy, $B + Cdy : ds = -\varphi + \beta - \gamma dy : ds + \kappa dv : d\sigma$, vel, transponendo $\varphi + \gamma dy : ds = \beta - B + \kappa dv : d\sigma - Cdy : ds$. Est autem $\beta - B = dB$ & $\kappa dv : d\sigma - Cdy : ds = d(Cdy : ds)$. Nam B, C, dy, ds, auctæ suis incrementis, fiunt β, γ, dv, $d\sigma$. Igitur $\varphi + \gamma dy : ds = d(B + Cdy : ds)$. Unde hæc fluit Regula. Differentietur quantitas proposita tGD, α, vel tCG, A, perinde enim est, ponendo x, dx, dy, & ds constantes, ac faciendo ipsius y differentiale $= 1$, ipsius vero s differentiale $= dy : ds$, & habebis $\varphi + \gamma dy : ds$. Iterum differentietur A, ponendo x, dx, y & s constantes, ac faciendo ipsius dy differentiale $= 1$, & ipsius ds differentiale $= dy : ds$, habebisque $B + Cdy : ds$. Pone igitur differentiale prius ipsius A æquale differentiæ more vulgari sumptæ posterioris differentialis, & habebis æquationem ad Curvam. In hujus autem Regulæ usu hoc animadverti sane meretur, quod si ipsius A differentiale prius sit $= 0$, id quod accidit, quoties expressionem A non ingrediuntur quantitates y & s; tum quoniam $d(B + Cdy : ds) = 0$, erit $B + Cdy : ds$ differentiale posterius æquale ponendum quantitati constanti: quo casu, Regula mira facilitate negotium absolvit.

Hanc Regulam exemplis nonnullis illustremus. Ac primo, quæritur curva celerrimi descensus. Hic, quoniam tempus est ut spatium ds directe & velocitas $\sqrt{x}$ inverse, tC G, vel A, exprimetur per $ds : \sqrt{x}$. Hanc autem expressionem cum non ingrediantur variabiles y & s, ejus differentiale prius erit $= 0$. Igitur quantitati constanti æquandum est differentiale posterius, in quo x constans, ds crescere per incrementum $dy : ds$ ponitur. Unde fit $dy : ds\sqrt{x} =$ constanti $= 1 : \sqrt{a}$, quæ æquatio, multi-

N.LXXV.

Pariter

$$\begin{array}{llll} EF:GD & = & tEF : tGD & \} \text{ ex natura} \\ EF:LD & = & tEF : tLD & \} \text{ desc. gravium} \end{array}$$

$$\text{Ergo } EF:LD - GD\,[LN] = tEF : tLD - tGD$$

$$\text{Sed } LN : LG = GI : GD \text{ [ob sim. tr. LNG, GID]}$$

$$\text{Quare } EF\,[CE] : LG = GI \times tEF : GD \times (tLD - tGD)$$

ideo-multiplicando & quadrando, fit $ady^2 = xds^2 = xdy^2 + xdx^2$, aut $xdx^2 = (a - x)\, dy^2$, atque $dy = dx\sqrt{x : (a - x)}$ quæ est æquatio ad Cycloidem.

2°. Quæritur Solidum minimæ resistentiæ. [Vid. Num. LVI, Not. i, pag. 569]. Resistentia quam patitur solidum genitum ex rotatione figuræ planæ circa axem, est ut $\int (xdx^3 : ds^2)$, [Vide ibid. Notam h, pag. 569], cujus differentiale prius $= 0$. Igitur differentiale posterius, quod est $\frac{2xdx^3dsdy : ds}{ds^4} = \frac{2xdx^3dy}{ds^4}$, æquetur quantitati constanti $2a$, & habebimus $xdx^3dy = ads^4$, ad naturam curvæ exprimendam.

3°. In hisce exemplis differentiale prius quantitatis A evanescebat. En alterius generis exemplum. Quæritur curva ejus naturæ ut $\int y^n ds$ sit maximum. Est igitur $A = y^n ds$. Hujus differentiale prius est $ny^{n-1}ds$; posterius $y^n dy : ds$. Ergo $ny^{n-1}ds = d\frac{y^n dy}{ds} = (ny^{n-1}dsdy^2 + y^n dsddy - y^n dydds) : ds^2$, vel $ny^{n-1}ds^3 - ny^{n-1}dsdy^2 = y^n dsddy - y^n dydds$. Pro ddy scribe $dsdds : dy$, id enim postulat dx constans, & erit $ny^{n-1}ds^3 - ny^{n-1}dsdy^2 = y^n ds^2dds : dy - y^n dydds = (y^n ds^2dds - y^n dy^2dds) : dy$, vel [quia $ds^2 - dy^2 = dx^2$], $ny^{n-1}dsdx^2 = y^n dx^2dds : dy$, aut denique $ny^{n-1}dyds - y^n dds = 0$. Hæc autem potest integrari, si per ds^2 divisa ponatur. Nam ipsius $(ny^{n-1}dyds - y^n dds) : ds^2$ integrale est $y^n : ds$, quod si ponatur æquale constanti $a^n : dx$, habebimus $y^n dx = a^n ds$, æquationem ad curvam.

ideoque $EG \times \iota CE : CG \times (\iota CG - \iota CL) = GI \times \iota EF : GD \times (\iota LD - \iota GD)$ N.LXXV

& *permut.* $EG \times \iota CE : GI \times \iota EF = CG \times (\iota CG - \iota CL) : GD \times (\iota LD - \iota GD)$

$= [$ ex nat. minimi, ut dictum $] = CG : GD$

Sed $EG \times \iota CE : GI \times \iota EF = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}}$, ex nat. desc. gr.

Quare $\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD.$

Ubi in transitu considerandum proponimus Celeberrimo Domino NIEUWENTIIT usum differentio-differentialium [quæ ipse immerito explodit] in eo, quod assumere coacti fuimus particulam GL ipsis EG, GI infinite parvis infinities adhuc minorem; absque quo, non video quomodo ad solutionem Problematis via patuisset. Sunt enim EG, GI elementa abscissarum AH, quemadmodum CG, GD elementa ipsius curvæ, & HC, HE ipsæ ejus applicatæ, earumque elementa CE, EF; adeo ut Problema ad puram Geometriam redactum huc redeat, ut inveniatur curva, quæ elementa sua habeat composita ex elementis abscissarum directe, & radicibus applicatarum inverse: qua quidem proprietate *Isochronam* illam *Hugenianam*, nunc & *Oligochronam* futuram, tritam nempe notamque Geometris *Cycloidem*, gaudere deprehendo; quod in *Fig.* 3, ubi ACP semi-Cycloidem, CM, GN duas ejus tangentes, RQP semi-circulum genitorem refert, ita porro demonstro:

$GD : GI = GN : GX^{*} = VP : VX = VR : RX = \sqrt{RP} : \sqrt{RX} [\sqrt{HE}]$

$GI : EG = . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; GI : EG$

$EG : CG = CS : CM^{*} = QS : QP = RS : RQ = \sqrt{RS} [\sqrt{HC}] : \sqrt{RP}$

* ex nat. Cycloid.

Ergo $GD : CG = \sqrt{RP} \times GI \times \sqrt{HC} : \sqrt{HE} \times EG \times \sqrt{RP}$

$= GI \times \sqrt{HC} : EG \times \sqrt{HE} = \frac{GI}{\sqrt{HE}} : \frac{EG}{\sqrt{HC}}.$ *Q. E. D.*

Quod si nunc determinanda sit Cyclois, quæ transeat per data puncta A & B, describenda est super basi horizontali AH quo-

N.LXXV. vis circulo genitore Cycloïs AT, quæ ductam rectam AB, & productam, si sit opus, secet in T; quemadmodum enim recta AT est ad rectam AB, sic diameter circuli genitoris Cycloidis AT est ad diametrum genitoris quæsitæ AB ([b]). Alterius generis nec minus elegans Problema foret, si jam porro quæreretur, quænam ex infinitis Cycloidibus [aut saltem Circulis, Parabolis aliisve curvis] per A transeuntibus, ac super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Qui speculationem de maximis & minimis promovere volet, tentabit ([c]). Nobis sufficiat proposuisse.

Atque ita curva hæc, quæ tot Mathematicorum ingeniis exercita fuit, ut nihil in illa eruendum restare videretur, nova proprietate conspicuam sese nobis sistit, quam velut perfectionum suarum colophonem, quasi nihil futuris sæculis debitura, sub finem adhuc præsentis adipisci voluit, postquam initio ejusdem natales, ac medio dimensiones omnes cum aliis præclaris affectionibus accepisset.

Cæterum monendum est, quod iisdem insistendo vestigiis, pari facilitate reperiri possit curva, quam mobile per medium inæqualis densitatis vel raritatis latum minimo tempore percurrat, quæ quidem convenienter principio *Leibnitiano* Mense Junio 1682 ([d]) demonstrato, eadem reperiatur necesse est cum *Curva Refractionis*, quam HUGENIUS in Tractatu *de Lumine* pag. 44. contemplatur, & cujus identitatem cum illa, quam primo consideravit Celeberrimus Dnus. LEIBNITIUS mense Septembre 1692, ([e]) pag. 446, nosque mense Junio 1693, pag. 254, construximus ([f]), conscio *Fratre*, jam olim deprehendi ([g]).

Sed per has speculationes ad alia quoque difficiliora Problemata

([b]) Quia scil. omnes Cycloïdes sunt inter se similes.

([c]) Vide Num. LXXVIII.

([d]) Radium scil. luminis via facillima a puncto ad punctum ferri; hoc est, via, quæ tempore minimo percurratur.

([e]) N°. LV. pag. 548.

([f]) N°. LVI. pag. 570.

([g]) Vid. Num. CIII. Art. XIV.

mata patet acceſſus, qualia ſunt, quæ de figuris Iſoperimetris formari poſſunt. Quæritur, exempli gratia, quænam ex iis omnium ſit capaciſſima [vulgo creditur eſſe circulus, & recte, ſed ſine demonſtratione;] Quænam centrum gravitatis areæ & peripheriæ ſuæ habeat a baſi remotiſſimum, quam *Frater* obſervavit eſſe Funiculariam, ſed ex diverſo fundamento &c. Hæc itaque & talia per Methodum *Maximorum* ei reſolvenda proponimus. Præſertim vero, ſi vicem reddere volet, ſequens generale tentabit: Quæritur ex omnibus Iſoperimetris ſuper communi baſi BN conſtitutis illa BFN [*Fig.* 4] quæ non ipſa quidem maximum comprehendat ſpatium, ſed faciat, ut aliud curva BZN comprehenſum ſit maximum, cujus applicata PZ ponitur eſſe in ratione quavis multiplicata vel ſubmultiplicata rectæ PF, vel arcus BF; hoc eſt, quæ ſit quotacunque proportionalis ad datam A & rectam PF, curvamve BF? Huic, ne detrectare poſſit, adjungimus alterum quod de infinitis Cycloidibus ſupra motum fuit, majoremque cum ſuo affinitatem habet. Et cum iniquum ſit, ut quis ex labore, in alterius gratiam & cum proprii temporis diſpendio rerumque ſuarum damno, ſuſcepto nihil emolumenti percipiat, prodit nonnemo, pro quo caveo, qui ſoluturo *Fratri*, utra laudes promeritas, honorarium quinquaginta imperialium decrevit; hac tamen lege, ut intra tertium ab hujus publicatione menſem ſe ſuſcepturum promittat, ipſaſque ſolutiones finito anno, utcunque licet per quadraturas exhibeat. Hoc enim elapſo ſi nemo dederit, meas exhibebo. (*) N.LXXV.

Hæc itaque occaſione Problematis Phyſico-mathematici a *Fratre* menſe Junio primum propoſiti hac vice dicta ſufficiant. Quæ ibidem de complanatione ſuperficierum Conoidicarum attigit, cum me propius ſpectarent, jam menſe Octobri * pertractavi. Nobiliſſimum TSCHIRNHAUSIUM uterque eodem menſe Junio notavimus †. Unicum igitur in Schediaſmate *Fraterno* ſupereſt, quod, ne quid intactum prætereamus, enucleandum reſtat;

 metho-

(*) Vide Num. LXXXII. * N°. LXXIII. † N°. LXIX.

N.LXXV. methodus videlicet, quam celavit, inveniendi curvam ex sola data relatione ipsorummet curvæ punctorum ad se invicem. Quærenda sit, exempli gratia, curva AEC [*Fig.* 5.] talis, ut projecta utcunque ex dato puncto D recta DC, secante curvam in C & E, rectangulum CDE æquetur constanti spatio, puta unitati, quod primum est exemplum *Fratris*. Ad datam positione rectam DG ordinatim applicentur EF, CG in angulo arbitrario, & sit DE $= x$, EF $= y$, DC $= z$ & CG $= t$, erit, per hypothesin, CDE, seu $xz = 1$, & $x = z^{-1}$; dein propter sim. Tr. DEF & DCG, EF seu $y = tx : z = tz^{-2}$. Fundamentum solutionis: Talis supponatur æquatio, seu relatio inter x & y, ut substitutis ipsarum valoribus modo inventis, similis vel eadem inter z & t relatio resultet, quæ inter x & y; quod hic ita fit: Pono $y = ax^m + bx^n$, erit, facta substitutione, $tz^{-2} = az^{-m} + bz^{-n}$, sive $t = az^{-m+2} + bz^{-n+2}$; quæ ut assimiletur priori $ax^m + bx^n$, comparo az^{-m+2} cum bx^n, & bz^{-n+2} cum ax^m, ac reperio utrobique $b = a$, nec non $n = 2 - m$; unde concludo, naturam curvæ quæsitæ esse $y = ax^m + ax^{2-m}$, vel, quod eodem modo ostendetur, $y = ax^m + ax^{2-m} + bx^n + bx^{2-n}$.

Haud absimiliter solvuntur duo sequentia, quæ habet, Problemata pag. **266**, quorum posterius in Programmate suo generaliter ita proponit, ut loco utriusque segmenti sumatur quæcunque ipsorum potestas quæ sit m. Huic curva satisfacit [1], quæ expri-

(1) Nisi fallor, ista fuit Auctoris nostri Analysis. Quoniam $x^m + z^m = 1$, erit [multiplicando per $x^m - z^m$,] $x^{2m} - z^{2m} = x^m - z^m$, vel $z^m - z^{2m} = x^m - x^{2m}$. Pone $y^r = ax^p + bx^q$, & quoniam eadem est inter t & z relatio, quæ est inter y & x, erit quoque $t^r = az^p + bz^q$. Denique, quia $x : y = z : t$, vel $x^r : y^r = z^r : t^r$, aut, æquando media extremis, $t^r x^r = z^r y^r$; erit [substitutis valoribus ipsorum y^r & t^r,] $az^{p-r} + bz^{q-r} = ax^{p-r} + bx^{q-r}$. Comparetur hæc æquatio cum prima $z^m - z^{2m} = x^m - x^{2m}$, & invenietur $a = 1$, $b = -1$, $p - r = m$, vel

exprimitur per $y = x(x^m - x^{2m})^n$. Quæ vero ultimo subjungit pag. 267 (k) sed absque solutione; his curvæ satisfaciunt mechanicæ, quarum natura est $y = x(a + \int(dx : xlx))^n$ pro *fig.* 2; & $by + cyy + cy^3$, &c. $= (a + \int(dx : xlx))^n$ pro *fig.* 3, [intellige per lx logarithmum ipsius x]. Quanquam tacere non possum, assumi hic aliquid dubiæ & suspectæ veritatis; videlicet, portiones semper esse unius ejusdemque numero curvæ, quæ eadem æquatione denotantur. Dari enim possunt exempla in contrarium, saltem in curvis mechanicis, ubi hoc non contingit, eademque æquatio diversas numero curvas designat, quod vel ex his ipsis exemplis liquet; quandoquidem hæ æquationes $y = x(a + \int(dx : xlx))^n$ &c. non magis quadrant pro hypothesi $xzz = 1$, quam pro quavis alia xz^3, aut xz^4, aut $xz^p = 1$; quibus tamen hypothesibus omnibus unam eandemque curvam satisfacere implicat. Hoc itaque ulteriori Lectorum scrutinio perpendendum relinquimus.

Pene hæc absolveram, cum præferrentur ad nos *Acta* mensis No-

vel $p = m + r$, & $q - r = 2m$, vel $q = 2m + r$. Igitur æquatio assumpta $y^r = ax^p + bx^q$ abit in hanc $y^r = x^{m+r} - x^{2m+r}$, aut $y^r = x^r(x^m - x^{2m})$ vel radicem r extrahendo, $y = x(x^m - x^{2m})^{1:r}$, aut, faciendo $\frac{1}{r} = n$, $y = x(x^m - x^{2m})^n$. Sed facile apparet particularem esse solutionem, quæque non sine aliqua sagacitate, ad alios casus similes applicari poterit. Universalior est Celeb. NEWTONI Solutio (*Acta Erud.* 1697, Mai. pag. 223) quam illustrarunt Viri Celeb. HERMANNUS, *Comm. Acad. Petrop.* Tom. IV, pag. 40, CLAIRAUT & FONTAINE, *Act. Acad. Paris.* ad ann. 1734, pag. 196, & 527, Edit. Paris. pag. 268, & 724, Ed. Amst.

(k) Quærebatur curva ejus proprietatis, ut ducta a dato puncto recta qualibet curvam in duobus punctis secante, solidum sub uno segmento & alterius quadrato constans esset. Sed observarunt Erud. Galli sub finem notæ præcedentis laudati, hujusmodi conditionibus nullam curvam satisfacere. Quare non satis capio, quid sibi cum solutione sua velit Noster, & ipse ejus insufficientiam satis animadvertisse videtur.

N.LXXV. Novembris in quibus Nobilis Auctor *Meditatorum Geometricorum* *, eodem menſe Anni 1695 publicatorum, motis ſibi ſcrupulis nonnullis ſatisfacere ac ſua vindicare ſatagit, eoque ardentius in nobis deſiderium accendit videndi, penitiuſque introſpiciendi tam præclara inventa. Dixi enim me nullatenus dubitare quin, pro excellenti quo pollet acumine, quicquid pollicitus eſt præſtare poſſit; atque optare tantum, ut ſpeciminum loco talia promat, quæ etiam iis, quibus de vaſtiſſimo Viri ingenio aliunde non conſtat, perſuadere queant; quo nomine ipſum iterata vice & perhumaniter pulſandum cenſemus. Nam quod proprietatem ſpectat, quam focis curvarum attribuit, cum ea quibuſvis punctis, adeoque non focis, qua focis, competat, difficulter quis capiat, quid hæc ad naturam focorum, aut curvarum per focos cognoſcendam conducat. Quemadmodum etiam intellectu haud facile exiſtimo, quomodo quæ *figur.* 1 & 3 † de Ellipſi & Parabola oſtendit, ad omnes alias etiam diſſimiles & diverſorum generum curvas applicari poſſint, cum illa duntaxat ejuſdem generis & ſpeciei curvis quadrent, ac præſertim poſterius illius tantum generalioris conſectarium ſit, quod jam Anno 1692 ** exhibui. Et quod ultimo docet de abſcindendis ex quavis curva portionibus in data ratione; hoc plane fallere dixi in Parabola, quod etiam agnoſcere videtur Acutiſſimus *Auctor*; aut ſi dubitet, ego paratus ſum demonſtrare: unde, ſi nihil aliud, ſaltem hoc novo exemplo roborari opus haberet.

* N°. LXXVIII.
† N¹. LXVIII.

** N°. XLIX. pag. 501.

N°. LXXVI.

N°. LXXVI.

JACOBI BERNOULLI SOLUTIO

DIFFICULTATIS CUJUSDAM,

Circa naturam Flexus contrarii.

DIxeram in Meditatione de natura osculi, Mense Martio 1692, pag. 116 *, Quod in *omni Flexu contrario Circulus osculator infinite magnus, adeoque Curvedo Linea nulla.* Hoc enim ex notione flexus contrarii, & illa naturæ lege, qua constanter saltum abhorret, satis, puto, per se manifestum. Illustrissimus tamen Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS ingeniose mihi objecit casus quosdam particulares, ubi contrarium evenit, & circulus osculator infinite parvus est; ut in curva GAg [*Fig.* 1.] cujus natura est $aax^3 = y^5$, & quæ in vertice A habet flexum contrarium, tametsi radius osculantis circuli ibidem sit nullus, quippe quæ ex evolutione curvæ IAi per ipsum verticem A transeuntis describitur. In quo sane Vir laudatissimus quiddam valde singulare detexit; cum hoc assertionem meam dictamque naturæ legem prorsus evertere videatur. Stante enim hoc Axiomate *Natura non facit saltum, sed etiam in minimis agit gradatim*, difficulter concipi potest, quomodo partes curvæ, uno sensu inflexæ, sensu contrario flecti & incurvari possint, nisi prius amissa curvedine situm inter se directum acquirant. Ergo ubicun- *Acta Erud. Lips. 1697. Sept. p. 410*

* N°. XLVII. pag. 480, 481.

Num. LXXVI. que id accidere videtur, credendum est, in illo puncto virtualiter contineri omnes curvedinis gradus intermedios; quod sic explico. Loco curvæ $aax^3 = y^5$, concipio hanc $aax^3 = y^5 - bby^3$, quæ curva hujusmodi plexus format, quales in *Fig.* 2 repræsentantur, eritque posita AH $= x$, & HG $= y$, applicata in vertice AC $= b$, & applicata in extrema ora sinus ACS, scilicet ST $= b\sqrt{\frac{3}{5}}$ (a). Radius circuli osculatoris [facta insuper $ayy - abb = s^3$, $5yy - 3bb = tt$, & $5yy - 9bb = uu$] universaliter reperitur $(9s^4 + t^4)\sqrt{(9s^4 + t^4)} : 6asuuy$ (b). Unde discimus, primo, radium osculi fore infinitum, si vel s, vel u, vel y sit $= 0$, id est, sive y sit $= 0$, sive $= b$, sive $= 3b : \sqrt{5}$. Secundo, aliis vero in casibus semper finitum, ut in puncto S, cum $y = b\sqrt{\frac{3}{5}}$, quo casu radius hic [posito $\frac{2}{5}abb = z^3$] fit $= \sqrt{\frac{3}{10}}\, az$. Tertio, eundem fore positivum, si vel ambæ s, & uu sint negatæ, hoc est, si sit $y < b$; vel affirmatæ ambæ, id est, si $y > 3b : \sqrt{5}$. Quarto, negativum autem, si existente s affirmata, uu maneat negata, id est, si y sit $> b$, & $< 3b : \sqrt{5}$. E quibus porro colligimus, curvam in parte ASC, & EFG [supposita in E applicata $y = 3b : \sqrt{5}$] versus axem cavam

(a) Nam, in puncto S ordinata tangens est; igitur $dx = 0$. Differentietur itaque æquatio $a^2x^3 = y^5 - bby^3$, tractando x ut constantem, & habebis $0 = 5y^4dy - 3bbyydy$, aut, dividendo per $yydy$, $5yy = 3bb$, atque $y = b\sqrt{\frac{3}{5}}$.

(b) Æquationis $aax^3 = y^5 - bby^3$, vel $x = a^{-\frac{2}{3}}(y^5 - bby^3)^{\frac{1}{3}}$, differentiale est $dx = \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}(y^5 - bby^3)^{-\frac{2}{3}}(5y^4 - 3bbyy)dy = (5yy - 3bb)yydy : 3(ayy - abb)^{\frac{2}{3}}yy$, seu faciendo $5yy - 3bb = tt$, & $10ydy = 2tdt$, nec non $ayy - abb = s^3$, atque $2aydy = 3ssds$, est $dx = ttdy : 3ss$, & $ddx = (6sstdt - 6ttsds)dy : 9s^4 = (6s^3tdt - 6ttssds)dy : 9s^5 = (30s^3ydy^2 - 4attydy^2) : 9s^5 = (30s^3 - 4att)ydy^2 : 9s^5 = (10ayy - 18abb)ydy^2 : 9s^5 = 2auuydy^2 : 9s^5$ [faciendo $uu = 5yy - 9bb$]. Est etiam elementum curvæ $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(t^4dy^2 : 9s^4 + dy^2)} = dy\sqrt{(9s^4 + t^4)} : 3ss$. Igitur cum radius osculi sit [Vid. Num. LVIII. pag. 578] $= dz^3 : dyddx$, invenietur, substitutis his valoribus $((9s^4 + t^4)\sqrt{(9s^4 + t^4)}dy^3 : 27s^6) : (2auuydy^3 : 9s^5) = (9s^4 + t^4)\sqrt{(9s^4 + t^4)} : 6asuuy$.

cavam eſſe, in parte CDE convexam; & puncta A, C & E eſſe puncta flexuum contrariorum, ibique nullam curvedinem eſſe; in puncto vero aliquo duobus flexibus intercepto, ut & alio quodam ultra flexum extremum E, puta in punctis B, D & F curvedinem eſſe maximam, ac proinde curvam a G verſus A ordine deſcribi alterna convolutione & evolutione curvarum IKLMNOPQRrqponmlki. Jam ſi b ſenſim intelligatur minui, ac tandem evaneſcere, ut loco æquationis $aax^3 = y^5 - bby^3$ reſultet $aax^3 = y^5$, manebunt quidem radii circulorum oſculatorum in punctis A, C & E infiniti; ſed radius puncti S fiet nullus quippe $= \sqrt{\tfrac{3}{50}} az$; quapropter, cum hæc omnia puncta tum coaleſcant in unum punctum A, ſequitur, in hoc puncto radium circuli oſculatoris eſſe ſimul & o & ∞; adeoque punctum illud A eminenter in ſe continere omnes curvedines a maxima ad minimam, omneſque evolutas KLMN &c. nmlk in unam rectam, axem videlicet curvæ AH, coincidere. Ex quo tandem illud evincitur, quod in *Fig.* 1, Evoluta curvæ GAg proprie non ſit ſola curva IAi, ſed una cum aſſumpto axe HAh, ita quidem ut gignatur per convolutionem & evolutionem hoc ordine factam IAHhAi, radiuſque circuli oſculatoris in extremitatibus tantum puncti A [ſi ita loqui fas eſt] nullus ſit, in parte vero intermedia infinitus. Num. LXXVI.

Explicationem noſtram confirmat inſuper hoc, quod circulus ſuper quolibet puncto axis infiniti AH per A deſcriptus, adeoque & ipſa linea recta MN, ob axem AH curvæ in A perpendicularem, curvam ibidem tangit, eandemque ob flexum contrarium ſimul ſecat; quod cum, nemine nunc refragante, ſignum habeatur oſculi, ſequitur infinitos hos circulos curvam in A oſculari, omneſque proin curvedinis gradus eminenter in hoc puncto contineri. Id quod hac vice oſtendendum ſuſcepi, ad aſſertionem meam olim editam cum Illuſtriſſimi D. *Marchionis* obſervatis utcunque conciliandam. Habui quidem hanc ſpeculationem jam dudum, ſed neglecta jacuit, jacuiſſetque diutius, niſi animadverſionem Viri perilluſtris nuperrime in *Supplementorum* To-

Num. LXXVI. mo III, Sectione II, pag. 78, ex *Commentariis Mathematico-Physicis Parisiensibus* recensitam, atque etiam in ejus *Analysi infinite-parvorum* pag. 19, publicatam vidissem.

N°. LXXVII.

JACOBI BERNOULLI ADDENDA AD CONSTRUCTIONEM PROBLEMATIS *BEAUNIANI.* *

Act. Erud. Lips. 1697. Sept. p. 412

DIxi tum, quod si curva data AC [Vide ibidem *Fig.* 1.] sit ex genere Paraboloidum, denotante v æquationis $a\,dy = y\,dx \pm x^v\,dx$, numerum quemcunque integrum & positivum, curva quæsita ED obtineri potest absque quadraturis, per solam Logarithmicam; sed non adjeci, curvam hanc omnino quoque posse esse algebraicam. Itaque nunc dico amplius:

1. Quod eo casu semper duæ satisfaciunt curvæ, Mechanica & Algebraica. (a)

2. Idque

* N°. LXXII.

(a) Mechanica nempe, quando in æquatione ultima F [Vide Num. LXXII, Not. c, pag. 734, 735.] ponitur t variabilis. Tunc enim æq. (F) $a\,dt + t\,dx + 1.2.3.4.5\,a\,dx = 0$, integrata dat $t = -1.2.3.4.5\,a - Nx$; ubi Nx, quantitatem transcen-

2. Idque non tantum, cum curva AC est ex numero Paraboloidum, sed etiam quotiescunque talis, ut ejus applicata BC exprimatur per quotlibet potestates integras & positivas ipsius x, hoc est, si terminus $x^v dx$ quotcunque membris constiterit; veluti si sit $ady = ydx \pm x^t dx \pm x^t dx \pm x^v dx$, &c. (b) Num. LXXVII.

3. Quod algebraica ejusdem perpetuo gradus futura est cum data AC.

4. Hinc si AC recta est, angulum constituens cum axe AB, seu $v = 1$, & ED recta esse poterit [quod jam olim etiam, cum Problema *Beaunianum* inter nos reviviscerет, animadversum mihi fuit]. Si AC est Parabola communis, ipsa ED quoque

talis

cendentem, numerum scil. cujus x est logarithmus, denotat, adeoque curvam mechanicam arguit. Quod si in eadem æquatione ponatur t constans & $dt = 0$, habebimus $t = -1.2.3.4.5a$: unde regrediendo ad æquationem primam $ady + ydx - x^5 dx : a^4 = 0$, inveniemus $y = x^5 : a^4 - 5x^4 : a^3 + 4.5x^3 : a^2 - 3.4.5x^2 : a + 2.3.4.5x : a - 1.2.3.4.5a$, quæ curvam geometricam repræsentat.

(b) Si, per methodum in Nota c, N°. LXXII expositam, gradatim reducatur æquatio $ady - ydx + Ax^v dx + Bx^{v-1} dx + Cx^{v-2} dx \ldots \ldots + Zdx = 0$, devenietur tandem ad æquationem hujus formæ $adt - tdx + (Z + 1.aY + 1.2.a^2 X + 1.2.3a^3 V \ldots\ldots + 1.2.3 \ldots va^v A)dx$; in qua potest poni $dt = 0$, & erit constans $t = Z + 1.aY + \ldots\ldots + 1.2.3 \ldots va^v A$. At si ponatur t variabilis, erit $dx = adt : (t - Z - 1.aY - \ldots - 1.2.3 \ldots va^v A)$, & integrando $x = \log.(t - Z - 1.aY \ldots - 1.2.3 \ldots va^v A)$ vel $t = Z + 1.aY + \ldots + 1.2.3 \ldots va^v A + Nx$. Unde erit $y = Ax^v + (B + vaA)x^{v-1} + (C + (v-1)aB + (v-1)va^2 A)x^{v-2} + (D + (v-2)aC + (v-2)(v-1)a^2 B + (v-2)(v-1)va^3 A)x^{v-2} \ldots \ldots + (Z + 1.aY + 1.2.a^2 X + 1.2.3.a^3 V + \ldots + 1.2.3 \ldots va^v A)$, quæ est æquatio ad curvam algebraicam gradus v. At si huic valori ipsius y adjicias Nx, habebis æquationem ad curvam mechanicam. Sic in exemplo Auctoris nostri post §. 5, $ady - ydx + x^3 dx : aa - 3xxdx : a + bxdx : a = 0$. Pone in formula generali $v = 3$, $A = 1 : aa$, $B = -3 : a$, $C = b : a$, & invenies $y = x^3 : aa + (-3 : a + 3 : a)x^2 + (b : a - 2.3 + 2.3)x + (0 + b - 1.2.3a + 1.2.3.a) = x^3 : aa + bx : a + b$, cui, si placet, addatur Nx: prorsus ut docet Auctor noster.

Num. LXXVII. talis erit; sed si AC est Parabola cubica, erit saltem ED una ex curvis secundi generis &c.

5. Quod dictum de æquatione $ady = ydx \pm x^v dx$, idem quoque intelligendum de æquationibus differentio-differentialibus, $aaddy = ydx^2 \pm x^v dx^2$; $a^3dddy = ydx^3 \pm x^v dx^3$, aliisque altiorum graduum in infinitum, quibus singulis [sumptis dx æqualibus] in casu exponentis v integri & positivi, transcendentes pariter & algebraicæ curvæ satisfacere possunt. (c)

Unicum exemplum esto loco omnium: Sit curva data AC vel IC [ibidem *Fig.* 2, vel 3,] cujus applicata $BC = x^3 : aa - 3xx : a + bx : a$, hoc est, sit æquatio construenda $ady = ydx - x^3dx : aa + 3xxdx : a - bxdx : a$. Dico, si in recta infinita BG, seu ex G puncto logarithmicæ, seu ex B puncto tantum axis, abscindatur sursum quantitas algebraica $x^3 : aa + bx : a + b$; fore, ut obtineatur utrovis modo punctum in optata

(*) Id unico exemplo ostendisse sufficiat. Proponatur æquatio $aaddy - ydx^2 + Ax^3dx^2 + Bx^2dx^2 + Cxdx^2 + Ddx^2 = 0$. Pone $y = Ax^3 + p$, aut $dy = 3Ax^2dx + dp$, ac $ddy = 6Axdx^2 + ddp$ & æquatio mutabitur in $addp - pdx^2 + Bx^2dx^2 + (C + 6aaA)xdx^2 + Ddx^2 = 0$. Fac $p = Bx^2 + q$, unde erit $ddp = 2Bdx^2 + ddq$, & æquatio abibit in $aaddq - qdx^2 + (C + 6aaA)xdx^2 + (D + 2aaB)dx^2 = 0$, quæ, posito $q = (C + 6aaA)x + r$, ac $ddq = ddr$, abit in hanc $aaddr - rdx^2 + (D + 2aaB)dx^2 = 0$, vel faciendo $(D + 2aaB) = E$, in $aaddr - rdx^2 + Edx^2 = 0$, quæ jam resolvenda venit. Manifestum autem est poni posse $ddr = 0$, atque erit constans $r = E = D + 2aaB$. Igitur æquatio $y = Ax^3 + Bx^2 + (C + 6aaA)x + (D + 2aaB)$, satisfacit. Sed ponatur r variabilis, & multiplicando per $2dr$ singulos terminos æq. $aaddr - rdx^2 + Edx^2 = 0$, ea fiet integrabilis, $2aadrddr - 2rdrdx^2 + 2Edrdx^2 = 0$. Ejus enim integralis [addita constante $ccdx^2$] est $aadr^2 - rrdx^2 + 2Erdx^2 + ccdx^2 = 0$, quæ dividendo ac radicem extrahendo induit hanc formam $dx = aadr : \sqrt{(rr - 2Er + cc)}$, quæ rursus integrata, erit [addita constante e] $x + e = aa. \text{Log.} (r - E + \sqrt{(rr - 2Er + cc)})$, unde, scribendo Nx pro numero cujus Logarithmus est $x + f$, habetur $r = E + \frac{1}{2}Nx + (EE - cc) : 2Nx$. Est itaque $y = Ax^3 + Bx^2 + (C + 6aaA)x + E + \frac{1}{2}Nx + (EE - cc) : 2Nx$, quæ non differt ab æquatione algebraica, nisi in duobus terminis ultimis.

ta curva ED; quæ propterea priori casu transcendens fiet, posteriori algebraica, & ejusdem generis cum data AC vel IC. Num. LXXVII.

Ex quibus omnibus, nescio an observatis hactenus, præclare confirmatur ejus veritas, quod ad Problemata Groningani Programmatis nuperrime * notavi, fieri scilicet posse, ut una eademque æquatio differentialis differentes numero graduque curvas designet. Hic enim exempla produxi infinitarum talium, quæ curvis etiam toto genere diversis quadrant.

* N°. LXXV, pag. 777.

N°. LXXVIII.

JACOBI BERNOULLI DEMONSTRATIO SYNTHETICA PROBLEMATIS

De infinitis Cycloidibus, absque adminiculo infinite parvorum;

Item Constructio aliorum huic affinium a se propositorum mense Maio *Anni* 1697. *

Cum sub finem Anni *1696* solutione mea Problematis de curva celerrimi descensus, quam omnibus nunc constat esse Cycloidem, *Lipsiam* paranda occuparer; animum subiit aliud, huic quidem quoad materiam affine, sed quoad applica- *Act. Erud. Lips. 1698. Maii p. 223.*

* N°. LXXV. p. 774.

Num. LXXVIII plicationem methodi *de Maximis & Minimis* plane diversum; quo videlicet porro quæritur, quænam ex infinitis Cycloidibus illa sit, per quam descendens grave ad datam quandam positione lineam citissime pertingat. Et quoniam ex consideratione similitudinis Cycloidum solutioni viam patere illico videbam, indeque animadvertebam modum operandi in omnibus aliis curvis similibus eundem existere, imo non ad descensum tantum celerrimum, sed ad plurimas alias curvarum functiones applicari posse; quemadmodum si quæratur ex infinitis curvis similibus illa, cujus inter commune principium & datam positione lineam interceptus vel arcus, vel area, vel nata conversione arcus superficies, aut spatii conversione solidum sit minimum &c. constitui Problema, non minus utile quam elegans, publice proponere, ut & alii ejus contemplationi vacare, mecumque in partem solutionis venire possent.

Ad imitationem itaque *Fratris*, qui in Programmate suo Problemati de curva celerrimi descensus, alia minus principaliora adjunxerat, primario meo de Figuris Isoperimetris Problemati ipsi vicissim proponendo alterum hoc secundarium subjeci, sed duobus tantum verbis, & in casu duntaxat simplicissimo lineæ rectæ verticalis, nec nisi Cycloidis, Circuli, Parabolæque facta mentione, studioque etiam suppressa voce curvarum *similium*, tum quod persuasum haberem, qui in una quæsitum præstiterit, in omnibus pariter illud præstiturum esse, tum quoque ne fundamentum solutionis nimis aperte darem. Factum autem est, hoc non obstante, ut, præter *Fratrem*, Vir Illustrissimus Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS adyta Problematis optime penetraret, solutionemque non tantum hujus, sed & aliorum hujus occasione a *Fratre* Mense Augusto *1697*, *Diarii Gallici* * propositorum, nupero *Actorum* Januario exhiberet. Ego itaque, ne actum agam, nec tamen etiam nihil inventi mihi afferam, cum totum jure potuissem, illa tantum, quæ ab Illustrissimo Viro Fratreque meo intacta relicta sunt, delibare breviter; ac primo quidem Proble-

* Vide Num. sequentem.

Problematis a me in Cycloide propositi demonstrationem syntheticam citra adjumentum infinite parvorum, in gratiam eorum qui horum calculum vel ignorant vel improbant, exhibere animus est; quod faciam suppositis tantum vulgo notis *Lemmatibus*, Num. LXXVIII.

1°. Quod arcus circuli major ad sinum suum majorem habeat rationem, quam minor ad suum.

2°. Quod Tangens major sit arcu suo.

PROPOSITIO.

Si super eadem basi horizontaliter constituta AR *duæ consistant Cycloides* AFC, ABP, [Fig. 1] *quarum altera* AFC, *datum perpendiculum* ZB *ad angulos rectos secat in* C, *ac dimittantur super illis duo gravia ex communi principio* A, *illud quod per* AFC *descendit breviori tempore ad perpendiculum appellet.*

DEMONSTRATIO.

Sunto axes Cycloidum ZC, RP; semicirculi genitores ZLC, RTP, quorum ille radio GL in duos quadrantes sit divisus. Fiant AR, AZ, AH proportionales, ducanturque rectæ HF, FDS, CI, BE, illa perpendicularis, hæ parallelæ basi, nec non ZDI & huic parallela FM, ut ex figura liquet: erunt AR & AZ, AZ & AH, RP & ZC, RTE & ZLD partes Cycloidum similes, adeoque proportionales. Quare

1°. *Hypothesis.* Si $AH > AZ$. $LD : GS < LZ : GZ$ [*Lem.* 1], & permutando $LD : LZ < GS : GZ$, componendoque $DLZ : LZ < SZ : GZ$; sumptis consequentium duplis $DLZ : CLZ < SZ : CZ = SD : CI < SD : CD$ [*Lem.* 2]; inverse & permutatim $CLZ : CD > DLZ : SD$, & tandem per conversionem $CLZ : DLZ > DLZ : DLZ - SD$, hoc est, ex natura Cycloidum $AZ : AM < AM : AH$; unde $\sqrt{AZ} : \sqrt{AH}$ [$= \sqrt{RP} : \sqrt{CZ}$] $< AM$ [DLZ,] $: AH = ETR : AZ =$

Num. LXXVIII. ETR : CLZ. Ergo $ETR : \sqrt{RP} > CLZ : \sqrt{CZ}$. Sunt autem hæ quantitates, ut tempora defcenfuum per AB & per AC, demonftrante HUGENIO in Tractatu *de Pendulis*, & nuper id quoque affumente Illuftriffimo HOSPITALIO. Tempus igitur per AB majus eft tempore per AC. *Q. e. d.*

2°. *Hypothefis.* Si $AR < AZ$. $ZM = FD = CD > DS = HM$; cum igitur hoc cafu fiat $AH > AZ$, erit AM major media arithmetica, eoque fortius media geometrica inter AZ & AH; unde ftatim in ipfis terminis habetur $AZ : AM < AM : AH$, e quo cætera deducuntur ut prius.

Cæterum generaliter obfervabam, in omnibus ejufmodi quæftionibus, ubi ex infinitis curvis fimilibus aliqua invenienda eft, quæ functionem quampiam optime præftet, quod duarum curvarum quarum interfectione quæfitum determinatur, altera femper poffit effe *Linea*, quam voco, *Functionis*, adeoque nunc mechanica, nunc algebraica, dum altera perpetuo eft algebraica: quod hujus vices ipfa femper recta præftare poffit; quo cafu altera, utut plerunque a *linea functionis* diverfa, ab ejus tamen defcriptione dependet: quod ambæ denique datæ cuidam e curvis fimilibus fic adaptari queant, ut earum ordinatæ vel inter fe fint parallelæ, vel hujus fiant tangentes, aut perpendiculares, aut alio aliquo modo illi applicentur. (*) Exempla funto:

I. *Ex*

(*) Longe alia eft harumce quæftionum folvendarum ratio, quando propofitæ curvæ, inter quas illa quæritur cujus functio quæpiam maxima vel minima eft, funt inter fe fimiles; alia, quando diffimiles. Ratio diferiminis patebit, fi fingamus rectam pofitione *FB*, [Fig. A] ad quam terminari ponuntur curvæ propofitæ *KδΔ*, *KdD*, *KB*, &c. motu parallelo ferri ab *FB* in *ED*, *ed*. Facile enim concipiemus aliam effe curvam *KB* cujus functio maxima eft vel minima, quando hæc recta in *FB* exiftit, aliam curvam *KD* vel *Kδ*, quando ifta fitum obtinet *ED*, vel *eδ*. Simul intelligitur lineam *AδDB*, quæ per omnia puncta maximæ minimæve functionis tranfit, rectam effe, quando curvæ *Kδ*, *KD*, *KB* fimiles funt; curvam ubi diffimiles. In eo igitur cafu unum id requiritur, ut inveniatur pofitio rectæ *ADB*, vel angulus *FAB*; in ifto, curva *ADB* defcribenda eft.

Primum cafum unice attigit Nofter;

I. *Ex infinitis Circulis per* A *transeuntibus & centra habentibus in horizontali* AB, *illum invenire, per quem descensus sit celerrimus ex puncto* A *ad datum perpendiculum.* [Fig. 2.] Num. LXXVIII.

ster, si forte excipias specimen aliquod posterioris, quod N°. CIII, Art. 4 videatur. Generaliorem tentabimus solutionem, post breve aliquod in Auctoris inventa commentarium.

Sint itaque primum curvæ KD, KB [Fig. B] similes & circa datum punctum A similiter positæ, atque ad datam positione rectam ED terminatæ, inter quas illa seligenda sit KD, cujus functio quæpiam proposita sit *maximum minimumve*. Ex iis quælibet KB ad arbitrium sumatur, quæ principalis dicetur; & ducta intelligatur recta ADB, quæ per omnia puncta δ, D, B, maximæ vel minimæ functionis transit. Nunc, cum similes ponantur curvæ KD, KB, similes erunt functiones illarum, & erunt inter se functiones istæ fKD, fKB, ut potestates ejusdem dimensionis rectarum AD, AB: hoc est, si functio proposita sit linearis, seu primi gradus, erit $fKD : fKB = AD : AB$; si functio sit superficialis aut secundi gradus, erit $fKD : fKB = AD^2 : AB^2$; si solida vel gradus tertii, erit $fKD : fKB = AD^3 : AB^3$; si sit gradus n, erit $fKD : fKB = AD^n : AB^n$. Sumantur curvæ KB abscissæ AF [x] ab origine A in recta AEF, applicatæ FB [y] sint parallelæ rectæ positione datæ ED; dicaturque AE, a; & functio ipsius KB, seu fKB, f. Et si ea sit gradus n, erit $fKD : fKB$ [f] $= AD^n$: $AB^n = AE^n$ [a^n] : AF^n [x^n]. Igitur $fKD = a^n f : x^n$. Hæc autem maxima minimave ponitur. Hujus itaque differentiale a^n ($x^n df$ $- n x^{n-1} f dx$) : x^{2n} æquandum nihilo, unde est $x^n df = n x^{n-1} f dx$, vel, dividendo per x^{n-1}, $x df = n f dx$, aut $f = x df : n dx$. Invenietur itaque situs rectæ AB, quæ omnia puncta δ, D, B maximi minimive determinat, quærendo ubinam in curva principali, functio proposita f sit $= x df : n dx$. Id vero possumus assequi mediantibus duabus curvis, altera CHb, quæ *linea functionis* dicitur, cujus ordinatæ FH, fb proportionales sint functionibus pertinentibus ad curvas KB, KBb; altera LHl, cujus ordinatæ FH, fl sint æquales fractionibus $x df : n dx$. Hæc igitur algebraica est; ponitur enim $df : dx$ quantitas algebraica. Sed potest etiam æquatio $x df = n f dx$, converti in hanc $\frac{1}{n} x = f dx : df$, ex qua patet, subtangentem FT [$f dx : df$] lineæ functionis, esse ad abscissam ejus AF [x] in puncto maximi, ut 1 ad n. Quæ proprietas maxime universalem suppeditat constructionem. Descripta nimirum curva MN, cujus ordinatæ FN sint æquales subtangentibus FT lineæ functionis CH, [a qua proinde curvæ MN descri-

Num. LXXVIII. CONSTRUCTIO. Datus sit semicirculus AQB divisus in duos quadrantes ANC, BNC, in cujus circumferentia sumpto indefinite puncto Q agantur rectæ QP, QB, quarum illa parallela est radio NC, hæc ipsum secat in T: & fiat Linea Functionis ASX, nempe talis, ut ejus ordinata PS tempus descensus per AQ repræsentet, hoc modo: Super diametro circuli AB erigatur quadrans curvæ Lemniscatæ ARB [vide *Acta Lips.* 1694, pag. 337, + & 1695, pag. 543. *] cujus nodus A, e quo subtendatur curvæ recta AR media proportionalis inter AB & 2PQ, ac sumatur PS = arcui AR pro sinistro, aut ARB + BR pro dextro circuli quadrante. Quo facto, fiat curva algebraica AVX, cujus applicata PV quarta sit proportionalis ad rectas AR, AB & 2NT; hæc priorem intersecabit in puncto aliquo X; unde demissa in AB perpendiculari XM erit, ut AM ad AB, sic distantia perpendiculi a puncto unde grave dimittitur, ad diametrum circuli quæsiti. (b)

II. *Positis*

descriptio pendet], ducta insuper recta *AN* quæ cum *AF* angulum comprehendat *FAN* talem ut sit *AF* ad *FN*, ut *n* ad 1, ea occurret curvæ *MN* in puncto *N*, per quod acta *NFB* positione datæ *DE* parallela, determinabit punctum *B*, rectamque *AB*. Id quod synthetice demonstrare facillimum esset.

Sed elegantior plerumque nascitur Problematis constructio, si functiones curvæ principalis, non ipsius applicatis, sed ipsius tangentibus applicentur; quemadmodum ostendemus infra [Not. d]. Ordo enim postulat, ut solutionem jam expositam binis exemplis, quæ Noster adducit, illustremus.

* N°. LX. pag. 609, 610; & N°. LXVI. pag. 649, 650.

(b) In isto exemplo, curvæ sunt circuli, quorum principalis AQB, qui, posito AN = 1, definitur æquatione $yy = 2x - xx$. Functiones sunt tempora descensus per arcus AQ, quæ tempora analytice exprimuntur per $\int(ds:\sqrt{y})$. Hujus functionis gradus n est $\frac{1}{2}$. Nam ipsius ds dimensio est 1, ipsius $\sqrt{y}$ dimensio $\frac{1}{2}$. Ergo ipsius $ds:\sqrt{y}$ dimensio $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Igitur, in hoc casu speciali, æquatio generalis $f = x\,df : n\,dx$ reducitur ad $\int(ds:\sqrt{y}) = 2x\,ds : dx\sqrt{y}$; cujus utrumque membrum sic construit Noster. Quia $yy = 2x - xx$, erit $ds = dy : \sqrt{(1 - yy)}$ & PS $= \int(ds:\sqrt{y}) = \int(dy : \sqrt{(y - y^3)})$. Sed [N°. LXIV. Nota f. pag. 649] $\frac{1}{2} a\int(adz : \sqrt{(aaz - z^3)})$ exprimit arcum Lem-

II. *Positis, quæ prius, invenire Circulum, cujus inter punctum A & datum perpendiculum interceptus arcus sit minimus.* [Fig. 2]. Num. LXXVIII.

CONSTRUCTIO. Fiat linea functionis, nempe Linea Sinuum ASX, sumpta ubique PS = arcui AQ: tum describatur curva algebraica AVX, facta PV = NT, & ex puncto intersectionis X demittatur perpendicularis XM, eritque ut supra, AM ad AB, sicut distantia perpendiculi a puncto A ad diametrum circuli quæsiti. (c).

Nota tamen, Problema simplicius quodammodo construi intersectione solius lineæ rectæ, & lineæ functionis, si hujus ordinatæ in tangentes datæ curvæ projiciantur. (d) Vide generalem

 con-

Lemniscatæ, cujus semiaxis $= a$, & cui subtenditur ex nodo recta $= \sqrt{az}$. Pone $a = 2 =$ AB & $z = 2y = 2$PQ, eritque arcus lemniscatæ, cujus semiaxis AB, & cui ex nodo subtenditur AR $= \sqrt{4y}$, media proport. inter 2, & $2y$, arcus, inquam, erit $\frac{1}{2}\sqrt{2}\int(4dy : \sqrt{(8y - 8y^3)}) = \int(dy : \sqrt{(y - y^3)}) =$ PS, plane ut vult Noster. Nec minus liquet esse PV $= 2xds : dx\sqrt{y} = 2x : y\sqrt{y}$, [cum sit $ds : dx = 1 : y$]. Nam NT : BN [1] = PQ : BP = AP [x] : PQ [y], ob sim. Tr. BPQ, QPA. Ergo NT $= x : y$, &, cum sit AR [$\sqrt{4y}$] : AB [2] = 2NT [$2x : y$] : PV, erit PV $= 4x : y\sqrt{4y} = 2x : y\sqrt{y}$. In curvarum ASX, AVX concursu X est igitur $\int(ds : \sqrt{y}) = 2x : y\sqrt{y} = 2xds : dx\sqrt{y}$. Ergo XM determinat abscissam AM curvæ principalis, cui respondet arcus per quem celerrimus fit descensus.

(c) Hic curvæ propositæ sunt rursus circuli, sed functiones sunt ipsi arcus s, atque ideo sunt lineares & est $n = 1$. Æquatio igitur fundamentalis $f = xdf : ndx$, abit in $s = xds : dx$. Itaque linea functionis habet ordinatas PS æquales arcubus AQ. Altera AVX, ordinatas PV habere debet $= xds : dx = x : y =$ NT [Vide Not. præced.]

(d) Ratio projiciendi functionem in tangentes curvæ principalis hæc est. Sit BG [Fig. B] tangens, terminata in G ad rectam AGg ipsi ED positione datæ parallelam, eritque $BG = xds : dx$. Nam sim. Tr. BGg, $Bb\mathfrak{C}$, dant $\mathfrak{lC}$ vel Ff [dx] : Bb [ds] $= Bg$ vel AF [x] : BG. Ergo cum sit $f = xdf : ndx = \frac{df}{nds} \times \frac{xds}{dx} = \frac{df}{nds} \times BG$, erit $BG = nfds : df$. Abscindantur itaque ex singulis tangentibus BG curvæ principalis KB partes $BG = nfds : df$, & curva KOG quæ per omnia puncta G transit, ejus erit naturæ, ut rectam AGg ipsi ED positione datæ parallelam secet in quodam puncto G,

Num. LXXVIII. conſtructionem infra in ſolutione ſex Problematum Fraternorum. N°. LXXX.

III. *Ex infinitis Curvis ſimilibus, & circa punctum* A *axemque communem* AC *ſimiliter conſtitutis, quarum una data ſit* AB, *invenire aliam* AD *occurrentem recta poſitione data* DE *in* D, *e quo demiſſa in axem perpendiculari* DM, *vel comprehenſum ſpatium* ADM, *vel nata converſione curva circa axem ſuperficies, vel natum converſione ſpatii ſolidum, ſit maximum minimumve* (e). [Fig. 3].

Constructio. Sumto indefinite in curva data AB puncto B, ducatur tangens BG, axi perpendicularis BC, & hinc tangenti perpendicularis CL; quo facto functio primæ quæſtionis, hoc eſt, ſpatium ABC dividatur per ½CL; functio ſecundæ ſive ſuperficies ſphæroidis geniti converſione curvæ AB, per ſemicircumferentiam radii BC; functio tertiæ ſeu ſolidum ſpatii ABC rotatione effectum, per rectangulum ſub dicta ſemicircumferentia & triente CL: quotienti ſemper abſcindatur ex tangente æqualis BG, erit G ad curvam quandam AGH, quam ſecet recta AG datæ rectæ DE parallela in G. Ex G ducatur GB, tangens datam curvam, ſit punctum contactus B; tum juncta AB, quæ datam DE ſecet in D, fiat curva AD ſimilis ipſi AB. Hæc erit optata. (f).

G, unde ducta *GB* tangens curvam *KB* determinabit punctum *B*, rectamque deſideratam *AB*. Sit ex. gr. fKB ipſe arcus $KB = s$, unde fit $n = 1$ & $df = ds$, capienda eſt $BG\ [nfds : df] = 1 sds : ds = s$. Igitur *KOG* eſt curva quæ ipſius *KB* evolutione deſcribitur. Vide Num. LXXX.° Probl. 6.

(e) Facile conſtat eſſe $CL = ydx : ds$, & cum notum ſit eſſe ſpatium $ADM = \int ydx$, ſuperficiem vero natam converſione curvæ circa axem, poſita cy circumferentia radii y [BC], eſſe $\int cyds$, quæ duæ functiones ſunt ſecundi gradus; denique ſolidum rotatione ſpatii ADM genitum eſſe $\int \frac{1}{2} cyydx$, quæ functio eſt tertii gradus: ſequitur BG $[nfds : df = f : \frac{1}{n}(df : ds)]$ capiendam eſſe in primo caſu $= f : \frac{1}{2}(ydx : ds) = f : \frac{1}{2} CL$, in ſecundo $f : (\frac{1}{2} cyds : ds) = f : \frac{1}{2} cy$; in tertio $f : \frac{1}{3}(\frac{1}{2} cyydx : dx) = f : \frac{1}{2} cy \times \frac{1}{3} CL$, ut habet Auctor noſter.

(f) Sint curvæ *KD*, *KB* [Fig. A] diſſimiles, adeoque *ADB* non jam

jam amplius recta, sed curva. Hæc vero describenda est.

1. Detur primum natura Curvatum KD, KB, & functio fKD [f], utraque algebraice expressa per constantes quascunque, & variabiles x, y, a, quæ ultima parametrum designet in unaquaque curva KD constantem, sed de curva in curvam variabilem, adeout hæc pro curva $K\Delta$ sit a, pro KD, $a + da$. Differentientur tam f quam æquatio curvæ, sintque hæc $Adx + Bdy + Cda = 0$, illa $df = Ddx + Edy + Fda$. Quod si x constans ponatur, habebimus $Bdy + Cda = 0$, vel dy, quæ hic repræsentat $\Delta D = - Cda : B$; nec non df [$fKD - fK\Delta$] $= Edy + Fda = Fda - CEda : B$, quod cum sit $= 0$ in casu maximi, erit, dividendo per da, $F = CE : B$, vel $BF = CE$, unde, eliminando a, ope æquationis ad curvas KD, habebitur æquatio ad curvam ADB; in qua si fiat insuper $x = AF$ [c], invenietur $y = FB$, unde dabitur punctum quæsitum B.

2°. At si f detur transcendenter, per constantes & per variabiles x, a; si sit v. g. $f = \int Adx$, ubi A componitur ex a, x, & constantibus, tunc functio maxima vel minima est, cujus differentia [$fKD - fK\Delta$], posita x constante, æqualis est nihilo. Sed ille tota erraret via, qui putaret differentiam hanc sumi posse, faciendo $df = Adx$, & inde concludent $A = 0$. Etenim Adx non est $fKD - fK\Delta$, sed $fKD - fKd$. Hic igitur adhibenda methodus differentiandi de curva in curvam magnis viris G. G. LEIBNITIO & Joh. BERNOULLIO usitatam, nec Nostro prorsus incognitam, ut ex N°. CIII Art. V, constare potest. Hujus fundamentum est, quod differentia duarum quantitatum æqualis sit summæ differentiarum partium. Sic $fKD - fK\Delta$ composita intelligitur ex omnibus differentiis partium, qualis est $fDd - f\Delta\delta$. Habetur autem $fDd - f\Delta\delta$, si elementum functionis, quod est Adx, differentietur, manentibus x, & dx, sed fluente a. Sit differentiale hoc $Bdadx$. Illud nunc integrandum est, manente a & da, sed fluente x, ut habeatur differentiarum illarum summa a K ad D. Erit igitur $\int(fDd - f\Delta\delta) = da\int Bdx$, quæ debet esse $= 0$. Igitur $\int Bdx = 0$. Ergo, pro qualibet curva KD, fiat alia AIE talis ut ordinata ejus sit semper $= \int Bdx$, & ubi hæc curva attingit rectam AF, velut in E, agatur ED applicatis parallela, quæ curvam KD secabit in puncto D pertinente ad curvam quæsitam ADB. Num. LXXVIII.

3°. Detur f per constantes, & per variabiles a, x, & y, differentietur que f, posita x manente & fiat $df = 0$. Si sit f quantitas algebraica, hujus differentiale habebit hanc formam $Bda + C\delta y$ [δy designat differentiale ΔD ipsius y, transeundo de curva in curvam]. Si sit $f = \int Adx$ transcendens, differentietur de curva in curvam, & erit $df = \int(Bdadx + C\delta ydx)$. Est igitur vel $Bda + C\delta y$, vel $\int(Bdadx + C\delta ydx) = 0$. Inde vero nihil lucramur, nisi sciamus quid sit δy. Id vero innotescit æquationem curvæ

Num. LXXVIII. væ KD differentiando de curva in curvam. Sit illa transcendens $dy = pdx$ [nam si algebraica poneretur, ope illius eliminando y, Adx componeretur ex meris a, x, & constantibus, resque reduceretur saltim ad casum præced.], & ponamus primum p componi ex a, x, & constantibus. Differentietur pdx, x manente; sitque diff. $qdadx$, quæ integretur, manente a, fluente x, habebiturque ΔD [δy] $= da\int qdx$. Supra autem habebamus vel $Bda + C\delta y = 0$, vel $\int(Bdadx + C\delta y dx) = 0$. Erit itaque vel $Bda + Cda\int qdx = 0$, vel $\int(Bdadx + Cdadx\int qdx) = 0$, aut dividendo per da, $B + C\int qdx = 0$, vel $\int Bdx + \int(Cdx\int qdx) = 0$. Fiat itaque pro qualibet curva KD alia AIE cujus ordinata sit vel $B + C\int qdx$, vel $\int Bdx + \int(Cdx\int qdx)$, & ubi hæc rectam AF secat in E, agatur ED, quæ in curva KD designabit punctum D pertinens ad curvam quæsitam ADB. Denique, ponamus in æquatione $dy = pdx$, p dari per constantes & per variabiles a, x, y. Differentietur pdx, x manente, sitque differ. $qdadx + r\delta ydx$. Igitur $d\delta y = qdadx + r\delta ydx$; quæ æquatio integranda est, manentibus a & da, fluentibus vero x, dx & y, dy. Id fieri potest, ponendo $\delta y = mdn$, atque $d\delta y =$ [$mddn + dmdn$] $= qdadx + r\delta ydx =$ [$qdadx + rmdndx$.] Pone $mddn = qdadx$; atque $dmdn = rmdndx$, vel $dm : m = rdx$ & erit Log. $m = \int rdx$, vel m numerus cujus logarithmus est $\int rdx$. quæ quantitas datis a, x, & y, data est. Igitur ob $ddn = qdadx : m$, erit $dn = da\int(qdx : m)$. Est igitur $\delta y = mdn = mda\int(qdx : m)$ data per a, x, y & da. Supra autem inveneramus vel $Bda + C\delta y = 0$, vel $\int(Bdadx + C\delta ydx) = 0$. Erit itaque vel $Bda + Cmda\int(qdx : m) = 0$ vel $\int(Bdadx + Cmdxda\int(qdx : m)) = 0$, aut dividendo per da, vel $B + Cm\int(qdx : m) = 0$, vel $\int(Bdx + Cmdx\int(qdx : m)) = 0$. Fiat ergo pro qualibet curva KD alia AIE, cujus applicata sit vel $B + Cm\int(qdx : m)$ vel $\int(Bdx + Cmdx\int(qdx : m)) = 0$, prout $\int$ datur vel algebraice, vel transcendenter, & ex E puncto in quo illa secat rectam AF, agatur ED applicatis parallela, ea curvam KD attinget in puncto D, quod est ad curvam desideratam ADB.

Et ista quidem, paulo forsan abstractiora mererentur quæ exemplis illustrarentur. Sed deterrent tædia calculi & istius notæ nimia longitudo.

N°. LXXIX.

N°. LXXIX.

PROBLEMES A RESOUDRE.

VOICI quelques Problèmes *De Maximis & Minimis*, que Monsieur BERNOULLI, Professeur à Groningue, propose aux Géométres, qui croyent avoir des méthodes pour toutes les questions de cette nature.

Journal des Savans 1697. 33e. Journal du 16 Aoust. p. 394. Ed. de Paris, p. 636. Ed. de Holl.

I. Deux points étant donnés sur une superficie convexe, on demande une maniére d'y décrire géométriquement, d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte; supposé que cette surface soit géométrique, telles que celles de la Sphère, du Cone, du Cylindre, dans lesquelles le Problème est fort facile, de quelque maniére que les points soient situés; mais dans les Conoïdes, & dans les Sphéroïdes, il devient très difficile. C'est pourquoi l'on propose, pour exemple, la superficie du Conoïde parabolique, dans laquelle il faille tirer la ligne la plus courte, qui joint deux points situés, non pas dans le même Méridien, [ce qui seroit encore facile, puisque la ligne recherchée seroit la portion du même Méridien comprise entre ces deux points;] mais situés dans des Méridiens différens. J'appelle ici *Méridien* toute parabole tirée du sommet du Conoïde jusqu'à sa base.

II. Toutes les ellipses possibles, ACB, ACB, ACB, &c. [*Fig.* 1] étant décrites sur l'axe AB donné de grandeur, & en ayant retranché des segmens égaux CDB, CDB, CDB, &c. on demande lequel de ces segmens a le point C le plus proche du point B; c'est-à-dire, qu'il faut déterminer l'ellipse ACB, dans laquelle la droite CB soit la plus courte.

III. Les mêmes choses supposées, on demande la nature & les touchantes de la courbe CCC.

IV. Sur l'axe BA [*Fig.* 2] donné de position étant décrites toutes les courbes d'une même espèce, par exemple, toutes les paraboles BC, BC, BC, &c. Et en ayant coupé des arcs égaux BC, BC, BC, &c. on

Num. LXXIX. on demande le point C le plus proche du point B; c'est-à-dire, qu'il faut déterminer lequel de ces arcs a la plus courte soutendente BC.

V. Les mêmes choses supposées, on demande la nature & les touchantes de la courbe CCC.

VI. Une ligne droite DD étant donnée de position, laquelle rencontre les courbes BC aux points D; on demande le plus petit de tous les arcs BD.

N°. LXXX.

JACOBI BERNOULLI *SOLUTIO* SEX PROBLEMATUM FRATERNORUM,

In Ephem. Gallic. 26 Aug. 1697, *propositorum.*

PROBLEMA I.

Acta Erud. Lips. 1698. Mai. p. 227.

I*N superficie dati Conoidis, vel Sphæroidis, exempli gratia Parabolici, inter duo data puncta geometrice describere lineam omnium in illa superficie sic ductarum brevissimam* [Fig. 1].

SOLUTIO. Notanda primum ambiguitas in voce *geometrice*, quæ procul dubio in causa fuit, cur Illustrissimus Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS in solutionibus suis mense Januar. *Alterum* exhibi

hibitis hoc Problema prorsus neglexerit. Si hac voce talis constructio poscatur, qua indefinite omnia puncta curvæ inveniantur per meras quantitates ordinarias, vel algebraicas; Dico, Problema in ipso Cono Cylindroque non minus difficile, imo impossibile, atque in cæteris Conoidibus Sphæroidibusque. Sin vero & illa constructio *geometrica* esse concedatur, in qua quantitates quoque transcendentes seu quadraturæ, quæ, ipso Celeberrimo Dno. LEIBNITIO adstipulante, non minori jure *geometricarum* quantitatum nomine veniunt, adhibentur; Problema in omnibus pariter Conoidibus ac Sphæroidibus æque ac in Cono Cylindrove, est facillimum. Num. LXXX.

Esto enim curva quæcunque ABC, cujus tantum tangens dari concedatur, sitque basis ejus CD $= a$, applicata quædam arbitraria basi parallela BG $= c$, alia indeterminata MN $= x$, tangens per x data $= t$; rotetur autem curva ABC circa axem AD, & gignat Conoides ABCFDA, cujus polus A, meridianus ABC, æquator CF, eique parallelus per M transiens MH. Tum sumpto æquatoris arcu CF $= \int (actdx : xx\sqrt{(xx - cc)})$, transeat per F meridianus AHF, secabit hic parallelum MH in puncto aliquo H curvæ cujusdam BH, quæ talis, ut quælibet ejus portio omnium aliarum in eadem superficie ductarum & iisdem punctis interceptarum curvarum sit brevissima ([a]). Ipsa autem longitudo curvæ BH $= \int (tdx : \sqrt{(xx - cc)})$.

Iiiii 2 *Applica-*

([a]) Auctoris analysin vide N°. CIII, Art. 6. Notemus tamen, per transennam, solutionem Problematis generaliorem, pro qualibet data superficie curva, deduci posse ex methodo generali investigandi curvas, quæ maximum minimumve constituunt, proposita N°. LXXVI, Nota a, pag. 780. Sed prius dicendum est superficierum curvarum naturam exprimi posse æquationibus tres indeterminatas involventibus, quemadmodum lineæ curvæ per æquationes quas ingrediuntur duæ indeterminatæ repræsentari solent. Nam si ad tria plana A, B, C sese mutuo ad datos angulos v. gr. rectos intersecantia [qualis est situs trium hedrarum angulum cubi solidum capientium] ex singulis superficiei propositæ punctis agantur rectæ duobus planis parallelæ, sic ut illæ quæ ad planum A ducuntur, quasque dicemus x, sint planis B &

Num. LXXX.

Applicatio constructionis ad Conum. [Fig. 2 & 3.]

Sit Conus ACFD facta conversione Trianguli rectanguli ACD circa cathetum AD; ponatur hoc Triangulum seorsim super recta

& C parallelæ, & illæ [y] quæ ad planum B, sint planis A & C parallelæ; illæ vero [z] quæ ad planum C, sint parallelæ planis A & B, patet omnino determinari punctum quodcunque superficiei propositæ, determinatis tribus rectis x, y, z, ad illud pertinentibus: exprimi, igitur, superficiei naturam per æquationem tres indeterminatas x, y, z involventem. Et, si descripta intelligatur in ea superficie linea quæpiam, rectæ z ex singulis ejus punctum in planum C demissæ, ibi delineabunt lineam, quam *projectionis* vocant, cujusque natura, per æquationem ex x, y, & constantibus compositam exprimitur. Ibi enim omnes z evanescunt. De hujusmodi lineis in superficie curva depictis eximium scripsit Tractatum Vir Cl. *Alexis* CLAIRAUT. Paris. 1731. *Recherche sur les Courbes à doubles courbures.*

Itaque ubi proponitur ducenda linea brevissima quæ in data superficie curva describi possit, proprie quæritur qualem illa efficiat projectionis lineam. Facile autem intelligitur, hujus lineæ in superficie curva descriptæ elementum esse $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, positis scil. angulis planorum A, B, C, rectis. Est enim elementum illud hypothenusa trianguli rectanguli, cujus latus unum dz, aliud elementum lineæ projectionis, quod est $\surd(dx^2 + dy^2)$. Igitur A, seu functio quæ minima esse debet, est $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, & differentiando, ratione in N°. LXXV indicata, hoc est, manentibus x, y, & dx, sed fluentibus dy & dz, erit $dA = (dyddy + dzddz) : \surd(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (dyddy + dzddz) : A$. Quid vero sit ddz sic investigo. Differentietur æquatio ad superficiem, manente x, & fiat $dz = pdy$, ubi p datur per x, y, & constantes, ac rursus differentiando, manentibus x & y fiet $ddz = pddy$: quo substituto fit $dA = (dyddy + pdzddy) : A = (dy + pdz)\, ddy : A$. Differentietur nunc $\alpha = \surd(d\xi^2 + dv^2 + d\zeta^2)$ manente $d\xi$, sed crescente dv per augmentum $ddv = ddy$, & $d\zeta$ per incrementum $dd\zeta = ddz = pddy$, eritque $d\alpha = (dvddv + d\zeta dd\zeta) : \surd(d\xi^2 + dv^2 + d\zeta^2) = (dvddy + pd\zeta ddy) : \alpha = (dv + pd\zeta)\, ddy : \alpha$. Igitur cum sit, ex natura minimi, $dA = d\alpha$, erit dividendo per ddy, $(dy + pdz) : A = (dv + pd\zeta) : \alpha$ vel $dy : A - dv : \alpha + p\,(dz : A - d\zeta : \alpha) = 0$, hoc est $d\left(\frac{dy}{A}\right) + p\, d\left(\frac{dz}{A}\right) = 0$,

vel $d\left(\frac{dy}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}\right) + pd\left(\frac{dz}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}\right) = 0$,

quæ

cta infinita GD; centroque C radio CA describatur quadrans circuli KIG, & radio minori CD circulus PRQ; tum sumto in latere coni puncto utcunque B, transferatur AB in CS, & ducatur SL parallela ipsi SK secans rectam KL ipsi CD parallelam in L, ac denique per punctum L intra asymptotos CD, CK trajiciatur Hyperbola LO: quo facto, per punctum quodvis O in Hyperbola acceptum duæ ducantur rectæ asymptotis parallelæ OI, OT, quarum illa quadrantem KIG secet in I, hæc latus coni AC in T; arcuique quadrantis KI ex circumferentia minoris circuli PRQ, id est, basis coni CF, resecetur hinc inde æqualis arcus PR seu CF, qui nonnunquam totam circumferentiam excedit; ac tandem in latere coni per F transeunte sumatur $AH = CT$; eritque H punctum optatæ curvæ BH $= \sqrt{(CT^2 - CS^2)}$; adeoque nequit esse [quod quis suspicari posset] aliqua sectionum conicarum, cum harum nulla rectificationem admittat: tota vero curva conum serpentis in modum ambit, duoque coni latera a supremo curvæ puncto B, utrinque æquidistantia sibi asymptota habet; subinde & unum tantum, cum curva coni superficiem aliquoties exacte circumit: circumit autem semel, ubi latus coni AC radii basis DC duplum est, bis ubi quadruplum, ter ubi sextuplum &c. Effici præterea potest facile, ut curva per duo quævis data puncta transeat, prout supremum ejus punctum B in alio aliove latere coni, propiusque vel remotius ab ejus vertice assumitur. ([b]). Num. LXXX.

Iiiii 3 SCHO-

quæ æquatio, si constans ponatur $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, reducitur ad $ddy + pddz = 0$. Vide ejusdem Celeb. CLAIRAUT Differt. in *Actis Acad. Reg. Scient. Parif.* ad annum 1733, pag. 186, Ed. Par. p. 258, Ed. Amst. Hæc autem æquatio, licet simplicissima, cum sit differentialis secundi gradus, non poterit ad primum revocari, nisi in specialibus quibusdam casibus; de quibus videsis Cel. EULERI Schediasma, in *Comm. Acad. Petrop.* Tom. III, pag. 110: præsertim vero Cel. *Joh.* BERNOULLI Dissertationem de eodem argumento, quæ mox, cum omnibus ejus Operibus, lucem visura est.

([b]) Videatur Num. CIII, Art. 7 & 8. Sed cum ibidem Noster hoc utatur principio, superficiem conicam posse in planum extendi, cumque

Num. LXXX. Scholion. Quia constructio hæc requirit, ut ex circulis utcunque inæqualibus KG, PQ æquales abscindantur arcus KI, PR, quod supponit anguli sectionem in data ratione; hæc vero generaque res fit in Cono recto facillima; miror ipsum in hujus superficie per ambages & Hyperbolam præstitisse, quod nullo negotio peragitur, posito hoc Lemmate.

In circulis inæqualibus æquales arcus assignare. Sint dati duo circuli ABD, abd [Fig. A] inæquales: & in illo datus arcus AB, cui æqualis capiendus est ad in isto. Fac angulum aCd, qui sit ad datum ACB, ut radius CA ad radium Ca. Dico factum. Nam, ob similes sectores ACB, aCb est $ab : AB = Ca : CA$ = [per constr.] $ACB : aCd$ = [VI. 33.] $ab : ad$. Quare $AB = ad$.

Patet itaque solutionem pendere a sectione anguli in data ratione, atque ideo Problema esse transcendens, ubi radii CA, Ca sunt incommensurabiles; geometricum, ubi sunt commensurabiles; geometricum, stylo Veterum, hoc est planum, si radius CA sit vel multiplus quivis radii Ca, vel ejus submultiplus denominatus a quolibet termino hujus progressionis duplæ 2, 4, 8, 16, &c.

Quibus positis, si detur conus rectus AVL [Fig. B], cujus basis ABL, & in eo signentur duo puncta E, F, per quæ ducenda sit linea brevissima EGF in coni superficie: centro v, radio $va = VA$ lateri coni, describatur circulus $al\acute{a}$, in cujus peripheria sumatur arcus $al\acute{a}$ æqualis peripheriæ baseos coni $ABLMA$, & erit, ut notum est, sector $abl\acute{a}va$ = superf. conicæ AVL, atque ipsi circumplicatus eam teget. Agantur itaque latera duo VA, VD per data puncta E, F, & capiatur arcus ad = arcui AD, nec non $ve = VE$ & $vf = VF$, ducaturque recta ef. Hæc, quoniam est in plano brevissima, in circumplicato sectore, hoc est, in coni superficie erit quoque curva brevissima. Id ergo unice requiritur, ut absque circumplicatione, quæ mechanica esset solutio, rectæ ef circumplicatæ puncta in coni superf. designentur. Proponatur punctum g. Age radium vgb, arcui ab cape æqualem AB, & in latere VB sume partem $VG = vg$, habebisque punctum G curvæ desideratæ EGF.

Pone punctum G esse verticei V proximum, hoc est, pone g esse centro v proximum, in quod nempe cadit perpend. vg ex centro; patet esse $ge = \surd(ve^2 - vg^2)$, atque etiam erit $EG = \surd(VE^2 - VG^2)$.

Quod si lineam, ultra puncta E, F producere velis, prolonganda modo est ef recta in fh, & simili modo ad coni superficiem referenda in FH. Pars vero EI, ultra punctum E, respondebit rectæ $\acute{e}i$, quæ determinatur, capiendo $v\acute{e} = ve$, & faciendo ang. $\acute{d}\acute{e}i = vef$. Nam circumplicatione sectoris $al\acute{a}va$, cadit va

generaliter non nisi per quantitates transcendentes absolvitur; constat, quod dixi, curvam *geometrice*, id est, algebraice non esse descriptibilem. In superficie cylindrica puncta curvæ reperiri possunt continua arcus bisectione ([c]), sed inventio omnium indefinite punctorum pariter sectionem arcus in data ratione vel ejus rectificationem supponit. Num. LXXX.

Atque hæc de primo Problemate dicta sufficiant: cætera supra laudatus Vir Illustrissimus D. *Marchio* HOSPITALIUS nupero Januario plene & eleganter soluta dedit. Sed quia observo, paulo generaliora a Fratre proponi potuisse ([d]), ea sequentem in modum formo ac solvo.

PRO-

va super *vé*, & *e* super *é*, atque *éi* prolongatio est ipsius *fe*.

Ducti itaque radii *vl*, *vm* paralleli rectis *eb*, *éi*, respondebunt lateribus coni *VL*, *VM*, quæ sunt curvæ *IGH* asymptota. Parallelæ enim *vl*, *eb*; *vm*, *éi* non concurrunt. Ergo nec in superficie coni concurrent *VL*, *EFH*; *VM*, *EI*.

Verum, notandum est, ut omnis vitetur æquivocatio, licet curvæ *IGH* pars *EGF* inter *E*, *F* puncta sit brevissima, non tamen semper sequi ipsam *IGH* esse inter *I*, *H* puncta brevissimam. Fieri enim potest, ut ab altera parte verticis coni alia ducatur *INH* brevior, scil. si in sectore *alέva*, recta *inb* puncta *i*, *b* conjungens, brevior sit summa rectarum $il + eb$.

Quod si desideratur linea $I\epsilon\gamma\varphi H$ quam linea *IGH* in basin projecta describit, ea facile construitur. Nam demissa $G\gamma$ in basi signat punctum γ, dividens radium *CB*, ita ut sit $CB : C\gamma = VB : VG = vb : vg$. Sumatur itaque in circulo baseos, arcus $AB = ab$, & capiatur $C\gamma$ ad *CB*, ut *vg* ad *vb*, eritque punctum γ in desiderata $I\epsilon\gamma\varphi H$.

([c]) Et idem quoque præstare licet simplici arcus bisectione, quotiescunque latus coni radii baseos erit multiplus, aut etiam subduplus, subquadruplus, suboctuplus, &c. [Vide Not. præc.]

([d]) Generaliter Problema proponi sic potuisset; *Propositis infinitis curvis* BC, BL, *ordinatim positione datis, aliam reperire* CL *quæ a singulis auferat arcus* BC, BL, *quorum functiones quæpiam sint æquales.* Id vero ex principiis N°. LXXVIII, Nota f, p. 793, 794, positis sic solvi potest. Si BD vocetur x, DM, dx, DG, y, GK, dy, GC, δy, KC, dy; & æquatio curvarum BC, BL, sit $dy = pdx$, ubi p datur per constantes & variabiles x, y, & a parametrum in unaquaque curva eandem, sed de curva in curvam variabilem; sitque ipsius

Num. LXXX.

PROBL. II & III.

Axi ET *insistant infinita curvæ* BL, BF *genere eædem, hoc est, quarum ordinatæ* ML, MF *constanter sint proportionales; sitque alia curva* CL *ex prioribus spatia auferens* BLM, BCD, *tum inter se, tum dato spatio æqualia. Quæritur, quæ sit natura curvæ* CL, *quæ ratio ducendi ejus tangentes, & quodnam in illa punctum alteri ubivis dato puncto proximum?* [Fig. 4].

SOLUTIO. Esto data ex infinitis una BL, datumque in curva CL ubivis punctum C, e quo demissa in axem applicata CD, quæ secet

ipsius pdx, manente x, differentia $= qdadx + r\delta y dx$; ostensum est fore $\delta y = mda\int(qdx:m)$ ubi m designat numerum cujus $\int rdx$ est Logarithmus. Ponamus brevitatis causa $n = m\int(qdx:m)$, aut $\delta y = nda$. Et cum sit ex hypoth. fBC $= f$BL, erit fBL $- f$BG $= f$BC $- f$BG. Sed, posita fBL $= \int Adx$, erit fBL $- f$BG $= Adx$; & fBC $- f$BG $= \int(Bdadx + C\delta y dx)$, [existente nimirum $Bda + C\delta y$ differentia ipsius A, quæ prodit manente x] $= da\int(Bdx + Cndx)$, substituendo nimirum nda pro δy. Habemus itaque $Adx = da(\int Bdx + \int Cndx)$, vel $da = Adx : \int(Bdx + Cndx)$; atque GC $= \delta y = nda = nAdx : \int(Bdx + Cndx)$. Igitur KC $= dy = \delta y - dy = nAdx : \int(Bdx + Cndx) - pdx$. Nec non

$$DT = ydx : dy = y : \left(\frac{nA}{\int(Bdx + Cndx)} - p\right)$$

Habemus igitur rationem ducendi tangentes curvæ CL, aut, quod idem est, habemus curvæ æquationem differentialem $dy = nAdx : \int(Bdx + Cndx) - pdx$. Ubi notare possumus in hoc Problemate illud contineri, quod propositum fuit & solutum N°. LXXVIII, Nota f. Nam ubi curva CL applicatam tangit, ibi eam secat curva BC cujus functio maxima est, vel minima. Fiat igitur dy infinita, & habebitur $\int(Bdx + Cndx)$ vel $\int(Bdx + Cmdx\int(qdx:m)) = 0$, ut ibi.

Sed hujusmodi solutiones generales fatendum est esse nimis abstractas, nec facile in usum convertendas. Quare utilius est ad speciales casus descendere, inter quos eminent casus curvarum ejusdem generis, quæ nempe habent ordinatas constanter proportionales, & casus curvarum similium. In illis, si functiones sint areæ, in his areæ vel arcus curvarum, qui sunt casus hic propositi, res tam facile succedit, ut ne calculo quidem opus sit, sed brevissima sufficiat synthesis.

secet datam curvam in G, ducatur tangens GE: super DE constituatur Rectang. EH æquale spatio dato BCD; fiatque CH: HD = DE : DT; juncta CT curvam CL tanget in C (e). Num. LXXX.

Nota ratione ducendi tangentes, natura curvæ latere nequit: estque semper, quod hic specialiter annoto, reducibilis ad casum Problematis *Beauniani* generalius concepti (f) mense Decembri 1695 *, adeoque construibilis per Logarithmicam, vide, Mense Julio, 1696 †. Punctum curvæ CL proximum ipsi B quodnam sit, generaliter ostendit Vir perillustris, poteftque nullo negotio ad aliud quodvis datum punctum accommodari (g).

PRO-

(e) Agatur EN ipsi CD parallela, quam secent in N & O, rectæ per L & G ductæ ipsi DE parallelæ. Et cum ponatur constans ratio ordinatarum DC, DG erit spat. BCD, vel ipsi æquale BLM, ad BGD, ut DC ad DG, ac convertendo BLM: LMDG = DC : CG. Est autem, ex constr. BLM = DHIE, & LMDG, seu, quod ipsi æquale sumitur rect. MG = GKNO [I. 43]: Est igitur DHIE : GKNO = [DH: GK] = DC : CG, aut *altern.* DH : DC = GK : CG, vel *conv.* DH : CH = GK : CK = GK : LK + LK : CK = LM : EM + TM : LM = TM : ME, vel TD : DE. Ergo DH : CH = TD : DE.

(f) Sit DC = y, ED = s, functioni ipsius y datæ ex natura curvarum BC, BL: sit z abscissa curvæ quæsitæ CL; atque ideo subtangens TD = $ydz : dy$. Pone etiam spatium datum DHIE = cc, atque erit DH = $cc : s$, & CH = $y - cc : s$, & proportio DH : CH = TD:DE, dabit hanc æquationem $dz = ccsdy : (syy - ccy)$, quam non opus est ad Problema *Beaunianum* reducere; nam facile construitur, cum indeterminatæ sponte sint separatæ: est enim s functio ipsius y.

* N°. LXVI. pag. 663.

† N°. LXXII. p. 731, & LXXVII. pag. 782.

(g) Illud nempe punctum curvæ CL dato puncto proximum est, in quod cadit perpendicularis ex dato puncto in curvam demissa. Ad hoc vero punctum, ut facile liquet, est dz ad dy, ut $y - f$ ad $z - g$, positis f & g ordinata & abscissa puncti dati. Quamobrem, si in æquatione mox inventa $dz : dy = ccs : (syy - ccy)$, pro $dz : dy$ substituatur $(y - f) : (z - g)$, habebitur $z - g = (y - f)(syy - ccy) : ccs$, qua determinatur relatio ipsarum z & y in puncto quæsito.

Num. LXXX.

PROBL. IV. & V.

In eadem figura, sunto BC, BL *infinitæ curvæ similes seu specie eadem, e quibus curva* CL *auferat arcus æquales* BC, BL: *Quæritur natura curvæ* CL, *ejus tangens in puncto* C, *& punctum curvæ dato cuipiam puncto proximum?* [Fig. 4.]

Solutio. Exemplum proponit Frater in Parabolis. Huic sæpe laudatus Dnus. *Marchio* ita satisfacit, ut ducta per C Parabola BC, ejusque tangente CE, faciat CE — BC : BC = BD : BT. Addo, si in hac proportione duntaxat BD vertatur in BE, constructio generaliter ad omnes curvas similes sese extendet; unde & componendo semper erit CE : BC = ET : BT (h). Quemadmodum etiam si curva CL talis esse ponatur, ut ex curvis similibus areas abscindat æquales BCD, BLM, reperitur Triang. CDE : spat. BCD = ET : BT (i); quæ Theoremata observari merentur. De natura curvæ CL, punctoque in illa alteri cuidam proximo eadem tenenda, quæ in Problemate præcedenti.

PRO-

(h) Si curvæ BL, BC sint similes & circa punctum B similiter positæ, sitque BGL = BC; erit, producta BL donec in Q occurrat curvæ BCF, BL : BQ = BGL, seu BC : BCQ, & *convert.* BL : LQ = BC : CQ, atque *alt.* BL : BC = LQ : CQ = [ducta BV ipsi QCE parallela] = BL : BV. Est igitur BV = BC. Ergo cum sit EC : BV = ET : BT, erit EC : BC = ET : BT.

(i) At si BCD = BLM; erit BCQR : BLM vel BCD = BQ^2 : BL^2 & *divid. invert.* CQRD : BCD = $BQ^2 - BL^2$: BL^2 = (BQ + BL) (BQ — BL) : BL^2 = [quia BQ, BL vix differunt] 2BL. LQ : BL^2 = 2LQ : BL. Pariter ECD : EQR = EC^2 : EQ^2, & *div.* ECD : CQRD = EC^2 : $EQ^2 - EC^2$ = EC : 2CQ. Unde *compos. rationib.* est ECD : BCD = 2LQ. EC : 2CQ. BL = EC : BL + LQ : CQ = EC : BL + BL : BV [ob sim. Tr. QLC, BLV] = EC : BV = ET : BT, id est, ECD : BCD = ET : BT.

PROBLEMA VI.

Sint infinitæ curvæ similes BH, DL, *circa idem punctum* A *similiter constitutæ, quas trajiciant duæ rectæ positione datæ* AH, ED, *quarum altera* AH *transeat per* A: *Quæritur arcuum ambabus rectis interceptorum maximus minimusve?* [Fig. 5].

Solutio. Data sit una curvarum similium BH secans rectam positionem datam AH in H, alterique positione datæ ED ducatur per A parallela AG. Evolvatur curva HB, principio evolutionis facto in H, & gignat curvam HG, quæ rectam AG secet in G; filum autem evolvens, dum describit G punctum, sit GB tangens curvam in B. Jungatur AB secans rectam ED in D, ac per D transeat portio curvæ DL similis portioni BH, erit arcus DL omnium rectis AH, ED interceptorum maximus minimusve (k).

COROLLARIUM. Patet hinc insignis evolutionum usus; nondum quod scio consideratus, nempe: si sit Curva quævis HB, ejus evolutione descripta HG, filum evolvens BG, atque

(k) Hæc constructio jam analytice demonstrata est N°. LXXVIII, Nota d, pag. 792. En synthesin. Arcus DL omnium similium rectis AH, ED interceptorum minimus est si vicinissimo dl sit æqualis. Agantur ADB, Adb, & BF ipsi ED parallela, eritque $\delta l : \beta b = A\delta : A\beta = \delta d : \beta b = dD : bB = AD : AB = DL : BH$. Ergo $\delta l + \delta d\ [ld] : \beta b + \beta b\ [bb] = DL : BH$.

Constabit igitur esse $dl = DL$, si probavero $bb = BH$. Id vero sic ostenditur. $BH : \beta b = AB : A\beta$. *Convertendo* $BH : BH - \beta b = AB : B\beta = AB : b\beta + b\beta : B\beta = AB : b\beta + BG : AB$ [ob sim. Tr. $Bb\beta$, ABG] $= BG : b\beta$. Ergo $BH : BH - \beta b = BG : b\beta$. Sed ex natura evolutionis $BG = BH$. Igitur $b\beta = BH - \beta b$, & $BH = b\beta + \beta b = bb$. Ergo etiam $DL = dl$. Igitur arcus DL inter similes rectis rectas AH, ED interceptos est minimus.

Et similiter ostendemus, ducta IM rectæ AC parallela, esse $ib = IH$, atque ideo $BI = bi$. Est igitur arcus BI omnium similium rectis BF, IM interceptorum minimus, maximusve, ut habet Noster in Coroll. sequenti.

Num. LXXX. ex punctis H & G inflectantur rectæ HA, GA concurrentes in quolibet puncto A, & posteriori per B agatur parallela recta infinita BF, erit evoluta BH omnium circa idem punctum A similiter descriptarum ac rectis AH, BF interceptarum curvarum maxima minimave. Quin & amplius, si accipiatur in curva HG quodvis aliud punctum C, quod filum evolvens IC dum describit, tangit curvam BH in I; atque ex I. recta agatur in IM ductæ CA parallela, erit arcus BI omnium rectis IM, BF interceptorum maximus minimusve.

N°. LXXXI.

JACOBI BERNOULLI SOLUTIO PROBLEMATIS FRATERNI

in Actis *mensis Maii 1697 propositi, De Curva infinitas Logarithmicas ad angulos rectos secante.*

Acta Erud. Lipf. 1698. Mai. p. 230. PRoblema de curva invenienda, quæ infinitas lineas ordinatim positione datas tangit, jam Mense Octobri 1694 * solutum dedimus. Quæstio hic est de tali, quæ datas omnes ad angulos rectos

* N°. LXII. pag. 618. seq.

rectos fecet. ([a]) Dependet autem Problema a methodo tangentium inverfa, ut nullam generalem folutionem admittat, eftque pro varia datarum pofitione miræ diverfitatis; neque gradus vel Num. LXXXI.

Kkkkk 3 fpecies

([a]) Has curvas, quæ aliarum ordinatim pofitione datarum feriem ad rectos angulos fecant, vocant Geometræ *Trajectorias orthogonales*, nomine ipfis indito a Celeb. *Joh.* BERNOULLI. Id argumentum is tam fubtiliter & accurate pertractavit in *Actis Erud.* 1720, Mai. pag. 223, & *Supplem.* Tom. VII, Sect. 7. pag. 303, & Sect. 8. pag. 337, ut exhauftum videatur. Inde ea quæ ad iftius Numeri intelligentiam faciunt excerpemus.

Poftquam univerfaliffimam dedit Trajectoriarum formulam, qualis quidem dari poteft, ad fpeciales cafus delabitur; qui tamen ita funt comparati ut unufquifque infinita fub fe genera comprehendat. Hic autem tres eorum præcipue funt recenfendi.

I. Ubi Trajectoria quæritur quæ curvam eandem, fed motu parallelo latam femper ad angulos rectos fecat. Sit [*Fig.* A] *AMm* curva data, cujus abfciffa AP [x], applicata PM [y], earum elementa Qm, dx; QM, dy. Ea fi fluere ponatur fecundum axem AR, & perveniat in BNn, ibique fecetur ad rectos angulos SNn a Trajectoria SN, cujus abfciffa AR [z] & applicata RN [y], erit $ON = dy$, $OS = -dz$, quia crefcente y decrefcit z. Jam, ob rectum angulum SNn, eft $ON^2 = SO \times On = SO \times Qm$ [funt enim æquales On, Qm] vel analytice $dy^2 = -dzdx$. Datur autem dx in y & dy, quia data eft curva AMQ: fitque $dx = Ydy$, [Y functionem ipfius y qualemcunque defignante]. Igitur $dy^2 = -Ydzdy$, vel $dz = -dy:Y$, quæ eft Trajectoriæ SN æquatio. Videantur exempla Notis b, c, d, e.

II. Ubi curvæ ad rectos angulos fecandæ funt ejufdem generis, hoc eft, quarum ordinatæ ad eandem abfciffam funt inter fe in ratione data. Quales funt AMm, BNn, fi affumpta ad libitum abfciffa CL [y], applicatæ LM [x], LN [z] datam habeant rationem $1:g$, defignante g quantitatem quandam, in eadem curva BNn conftantem, variabilem vero, ubi de curva in curvam tranfieris. Igitur LN [z] $= gx$, & $On = gdx$. Sed OS, [dz] elem. ordinatæ LN, quatenus ad Trajectoriam pertinet, eft $= -dz$, atque $NO = dy$. Igitur, cum fit $ON^2 = SO \times On$, erit $dy^2 = -gdxdz$. Datur autem, quia data eft curva *principalis* AMm, dy in dx, fitque $dy = Xdx$: erit $XXdx^2 = -gdxdz$, vel $XXdx = -gdz = -zdz:x$, quoniam $g = z:x$. Habemus itaque $XXxdx = -zdz$; quæ æquatio algebraice, fi $XXxdx$ integrari poffit, fin minus, tranfcendenter exprimit relationem ipfarum x, z; LM, LN. Affumpta igitur ad libitum abfciffa CL, & fic determinata ordinata

Num. LXXXI. ſpecies curvarum eſt caracter facilitatis vel difficultatis Problematis, cum nonnunquam in algebraicis res difficulter, in tranſcendentibus contra facile ſuccedat.

Exempla promiſcue algebraicarum & tranſcendentium curvarum in quibus ſolutio facilis.

I. *Si eidem axi inſiſtant infinitæ Parabolæ æqualium parametrorum, ſed diverſorum verticum, ſive* [quod eodem recidit] *ſi ex infinitis una ſuper plano ſuo ita protrudatur, ut ſingula ejus puncta rectas deſcribant axi parallelas*, erit curva, quæ infinitas illas

ta LM, habebitur LN, atque punctum N Trajectoriæ quæſitæ. Exempla vide Notis f, h.

III. Ubi curvæ ſecandæ ſunt ſimiles. Sint AMm, DEF [Fig. B] curvæ ſimiles & circa punctum A ſimiliter poſitæ, inter quas eligatur principalis AMm; ductiſque rectis AME, AmF deſcribantur arculi MI, EG. Sitque AM, x; Im, dx; AE, vel AG, y; GH, $-dy$, quia creſcente x in curva principali, decreſcit y in Trajectoria KEH. Quia data eſt curva AMm, arcus MI dabitur in x & dx; ſit ille Xdx, &, ob curvas ſimiles AMm, DEF, habebimus $EG = Xydx : x$, & $GF = ydx : x$. Igitur cum ſit, angulo FEH exiſtente recto, $EG^2 = FG \times GH$, ſeu $XXyydx^2 : xx = -ydxdy : x$, erit $XXdx : x = -dy : y$, quæ æquatio, ſi $\int (XXdx : x)$ ad logarithmos reduci poſſit, algebraice; ſin minus, tranſcendenter dabit relationem ipſarum x, y; AM, AE. Aſſumpta igitur ad libitum AM, dabitur AE, & punctum E Trajectoriæ KEG.

Vel, ſi curvæ principalis AMm habeatur natura expreſſa per æquationem inter coordinatas AP [x], PM [y], ſitque DEF curva inter ſimiles talis ut ductis AME, AmF, ſint $1 : a = AM : AE = AP$ [x] : AN [ax] $= PM$ [y] : NE [ay]. Jam ſi ſit K punctum Trajectoriæ KEH viciniſſimum puncto E, & variantibus a & x, differentientur AN, [ax], & NE [ay], invenientur $TK = -adx - xda$, & $ET = ady + yda$. Præterea, cum ſit, ob ang. rectum KEF, KT [$-adx - xda$] : TE [$ady + yda$] $= TE : TF =$ [ob ſimil. curv. AMm, DEF] $= MQ$ [dy] : Qm [dx], erit $-adx^2 - xdadx = ady^2 + ydady$, unde fit $-da : a = (dx^2 + dy^2) : (xdx + ydy)$, quæ æquatio algebraice, ſi $(dx^2 + dy^2) : (xdx + ydy)$ poſſit reduci ad logarithmos, aut tranſcendenter ſaltem, dabit relationem ipſius a ad ipſas x & y. Aſſumpta igitur ad libitum x [AP], quo ipſo datur PM, habebitur a. Producatur itaque AM in E, donec ſit $AE : AM = a : 1$, & habebitur punctum E Trajectoriæ deſideratæ.

las Parabolas ſeu unicam ita motam perpetuo ad angulos rectos ſecat, Logarithmica, cujus ſubtangens æquatur ſemiparametro Parabolæ ([b]). Et viciſſim, ſi Logarithmica dicta ratione ſuper axe promoveatur, curva quam continuo ad rectos ſecat angulos, eſt Parabola ([c]). Ita ſi Parabola cubica ſuper axe propellatur, quam ad rectos ſecat, eſt Hyperbola; ſi altiores Parabolæ, ab altioribus gradatim Hyperbolis normaliter ſecantur, & viciſſim &c. ([d]). Num. LXXXI.

II. *Si infinitæ æqualium parametrorum Parabolæ axibus parallelis inſiſtant, & vertices habeant in linea his axibus perpendiculari*, ſive, *Si Parabola ita feratur, ut ſingula ejus puncta rectas deſcribant axi perpendiculares*; Curva quam infinitæ, vel unica ſic mota normaliter interſecat, Parabola eſt cubicalis ſecundi generis, cujus latus rectum ad Parabolæ parametrum eſt, ut novem ad ſexdecim. Si alia Paraboloidea ita ferantur, aliis itidem Paraboloideis normaliter ſecantur, & vice verſa &c. ([e]).

III. *Si*

([b]) Hoc exemplum ad Caſum I, Notæ præced. pertinet. Parabolæ æquatio eſt $ax = yy$, ſeu $adx = 2ydy$, aut $dx = 2ydy : a$. Igitur $Y = 2y : a$, & æquatio ad Trajectoriam $[dz = -dy : Y,]$ erit $dz = -ady : 2y = -\frac{1}{2}ady : y$ ad logarithmicam.

([c]) Æquatio ad logarithmicam eſt $dx = ady : y$. Ergo $Y = a : y$. Igitur æquatio ad Trajectoriam $[dz = -dy : Y]$, fit $dz = -ydy : a$, vel $z = -yy : \frac{1}{2}a$, aut $-\frac{1}{2}az = yy$, ad Parabolam.

([d]) Sit generaliter $a^{m-1}x = y^m$ ad Parabolas cujuſcunque gradus, ſeu $dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$: erit $Y = my^{m-1} : a^{m-1}$. Ergo dz $[= -dy : Y] = -\frac{1}{m}a^{m-1}y^{1-m}dy$, ſive $z = -\frac{1}{m(2-m)}a^{m-1}y^{2-m}$ aut denique $y^{m-2}z = \frac{1}{m(m-2)}a^{m-1}$ ad infinitas hyperbolas.

([e]) At ſi ſit $a^{m-1}y = x^m$, vel $x = a^{1-1:m}y^{1:m}$, aut $dx = \frac{1}{m}a^{1-1:m}y^{1:m-1}dy$, erit $Y = \frac{1}{m}a^{1-1:m}y^{1:m-1}$, & $dz = [-dy : Y] = ma^{1:m-1}y^{1-1:m}dy$, atque

Num. LXXXI. III. *Si infinita Paraboloidea ejusdem gradus* [*cujus index sit* m] *sed diversorum laterum rectorum, circa eundem axem & verticem consistant;* Curva quæ has omnes normaliter trajicit, constanter est Ellipsis, cujus centrum in communi vertice, latus transversum in axe, ejusque ratio ad latus rectum, ut 1 ad m. (f).

IV. *Si infinitæ æqualium subtangentium Logarithmicæ super totidem axibus parallelis consistant, transeantque per commune punctum* B; *Quæritur curva eas omnes normaliter intersecans*? [Fig. 1].

Constructio. Esto una earum data FBf cum suo axe AG, inque hunc demissa perpendiculari BA, sumptoque quolibet in Logarithmica puncto F, agantur ad axem perpendicularis FG, tangens FL, & huic parallela BM, ac insuper ad partes Logarithmicæ ab axe remotiores statuatur in axe recta AN arbitrariæ longitudinis, major tamen subtangente GL: quo facto, sumatur inter duplam subtangentem & excessum quo NG superat AM, media proportionalis, eique in recta BA æqualis abscindatur BI seorsum deorsumve, prout punctum F supra infrave B assumptum fuerit, ac denique ex I ducatur IH parallela axi secansque applicatam GF in H; erit H punctum in optata curva CHD, cui similes & æquales in cæteris rectarum BA, BC sese decussantium angulis constitui possunt.

Nota.

atque $z = \frac{m}{2 - 1:m} a^{1:m - 1} y^{2 - 1:m}$, vel $z^m = (\frac{mm}{2m-1})^m a^{1-m} y^{2m-1}$, aut tandem $(\frac{2m-1}{mm})^m a^{m-1} z^m = y^{2m-1}$. Quod si ponas $m = 2$, erit $\frac{9}{16} azz = y^3$.

(f) Pertinet hoc exemplum ad Casum 2. Sit æquatio Parabolarum $a^{m-1} y = x^m$ vel $dy = ma^{1-m} x^{m-1} dx$, erit $X = ma^{1-m} x^{m-1}$. Ergo [$XXxdx =$] $mma^{2-2m} x^{2m-1} dx = -zdz$, & integrando $\frac{1}{2} ma^{2-2m} x^{2m} = \frac{1}{2} cc - \frac{1}{2} zz$ [$\frac{1}{2} cc$ est constans addita ad complendam æquationem,] seu, pro x^{2m} scribendo $a^{2m-2} yy$, $myy = cc - zz$, æquatio ad ellipsim, cujus axis major $2c$, latus rectum $= 2cm$.

Nota, Maxima curvæ altitudo $BD = \sqrt{(2GL \times (AN - GL))}$. Num. LXXXI.

Si $GM = AN$, cadit IH in BC, fitque maxima curvæ latitudo. (g).

V. *Quæritur denique Linea* [quod est speciale exemplum *Fratris*] *quæ omnes Logarithmicas super eodem axe & per idem punctum ductas ad angulos rectos secat?* [Fig. 2].

CONSTRUCTIO. Esto axis communis Am, punctum intersectionis Logarithmicarum B, earum una data FBf; demissa in axem perpendiculari BA, per punctum F utcunque acceptum in Logarithmica agantur rectæ FT, FN secantes rectam BA in T & N, quarumque illa axi parallela sit, hæc tangat Logarithmicam [prætereaque supra T, siquidem punctum N inferius sit ipso T, abscindatur TN æqualis inferiori TN;] quo facto, diametro AN, nempe $AT + TN$, describatur semicirculus APN, cui occurrat recta FT in P; sumptaque arbitraria quadam constan-

(g) Sint BH, Bh [Fig. B] Logarithmicæ duæ vicinissimæ, quarum axes AD, ad, quas secet ad rectos angulos Trajectoria Hh. Hujus abscissa BC sit $= x$, ordinata $CH = y$, atque $BA = a$. Et ex natura Logarithmicæ erit $BC [x] = \log. (HG : BA) = \log. (a-y):a$, aut $(a-y):a$ = numero, cujus x est logarithmus, id quod designabimus sic, Nx. Est igitur $a = y : (1 - Nx)$, & $y = a - aNx$, atque $IK = -adxNx$. Ergo $Ib [dy] = IH^2 : IK = -dx^2 : adxNx = -dx : aNx = \frac{-dx}{yNx : (1-Nx)}$, vel $-ydy = dx - dx : Nx$, sive $ydy = -dx + dx:Nx$. Erit igitur integrando $\frac{1}{2}yy = c - x - 1 : Nx$, [$c$ est constans addita ad æquationem complendam]. Ergo y media proportionalis inter 2, & $c - x - 1 : Nx$, hoc est inter duplam subtangentem Logarithmicæ cujuspiam, quæ subtangens GL pro unitate sumi potest, & excessum quo $AG = c - x$, [sumta $AN = c$], superat AM, quæ cum sit tertia proportionalis ad HG, BA, & GL, erit $= GL \times BA : HG$, hoc est $1 : Nx$, cum sit $GL = 1$, & $HG : BA = Nx$.

Est autem maxima curvæ altitudo, seu y maxima, quando $x + 1 : Nx$ minima est; hoc est, quando $x = 0$, & Nx atque $1 : Nx = 1$; tuncque fit $yy = 2c - 2$. Maxima vero curvæ latitudo est, quando $c = x + 1 : Nx$, quando $AN = GM$. Nam, ubi $c < x + 1 : Nx$, y imaginaria est.

Num. LXXXI. ſtante L, abſcindatur in BA ex puncto T recta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 \pm L^2)}$, & jungatur RP; [vel, ſi punctum T ſuperius ſit ipſo B, deſcripto ſuper TR ſemicirculo, applicetur illi prius TP, ac tum demum jungatur RP;] junctæ in recta FT æquales hinc inde abſcindantur TS, TS; eruntque puncta S, S ad curvam quandam $mCMCm$, quæ omnes Logarithmicas circa punctum B conſtitutas ad angulos rectos ſecabit, ut requirebatur.

Nota. Sumpta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA^2 + L^2)}$, occurret curva axi in puncto m, ut ſit $Am = L$: ſed ſumpta $TR = \sqrt{(\frac{1}{2}TA - L^2)}$, tranſibit inter puncta A & B, nec ad axem pertinget.

Maxima curvæ latitudo $BC = \sqrt{(\frac{1}{2}BA^2 \pm L^2)}$. (h).

Atque horum omnium ſolutio facilis admodum fuit: dari autem poſſunt aliæ curvarum poſitiones, quæ Problema magis arduum reddunt, & vel in ſimplici Parabola ad caſus methodi tangentium inverſæ nondum exploratos deducunt; veluti, *Si quæratur Curva, quæ omnes Parabolas ſuper eodem axe extructas, lateraque ſua recta reſpectivis verticum a puncto fixo diſtantiis æqualia habentes, ad rectos angulos trajicit* (i) &c. Cui addi poteſt &

(h) Pertinet exemplum iſtud ad caſum 2 Notæ a: ſunt enim curvæ genere eædem. Sit $AT = y$, $TF = x = ly$, poſita $BA = 1$, & erit $y = Nx$, atque $dy = dxNx$. Igitur $X = Nx$ & æquatio $XXxdx = -zdz$ fit $zdz = -Nx^2 . xdx$, vel integrando $\frac{1}{2}zz = \pm\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}Nx^2 - \frac{1}{2}xNx^2 = \pm\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}yy - \frac{1}{2}xyy$. Ergo z [TS] $= \sqrt{(\frac{1}{2}yy \pm cc - xyy)} = \sqrt{(\frac{1}{2}AT^2 \pm L^2 - TP^2)}$ [eſt enim $TP^2 = AT \times TN = xyy$, cum ſit $TN = xy$, tertia nempe proport. ad ſubtangentem $= 1$, $AT = y$, & $TF = x$] $= \sqrt{(TR^2 - TP^2)} = PR$.

Maxima curvæ latitudo eſt, ubi $dz = 0$. Ergo ubi $ydy - yydx - 2xydy$ ſeu $dxNx^2 - dxNx^2 - 2xdxNx^2 = 0$, hoc eſt ubi $x = 0$, ſcil. in BC, ibique illa eſt $\sqrt{(\frac{1}{2}yy \pm cc)} = \sqrt{(\frac{1}{2}BA^2 \pm L^2)}$; necnon ubi $Nx = y = 0$, ſcil. in Am, ibique illa, vel $= 0$, ſi ſumatur $+cc$ [$+L^2$], vel imaginaria $\sqrt{-cc}$, ſi ſumatur $-cc$ [$-L^2$].

(i) Solvitur iſtud Problema per caſum 3 Notæ a. Sit curva principalis Parabola, cujus parameter $= 1$, æquatio $yy = x - 1$, & reducetur formula $-da : a = (dx^2 + dy^2) : (xdx + ydy)$ ad $-da : a = (4yy + 1)dy : (2y^3 + 3y) = dy : 3y + \frac{10}{3}yydy : (2y^3 + 3y) = dy : 3y + \frac{5}{6} \times 4ydy : (2yy + 3)$ quæ integrabilis eſt, & dat $lC - la$

& hoc: *Quæritur Curva, quæ Parabolam, aut aliam datam Curvam super plano suo circa datum punctum in orbem conversam in angulo dato secat*; ([b]) quemadmodum constat, rectam ita conversam circa extremitatem suam in angulo recto secari a circulo, in obliquo a Logarithmica spirali. Num. LXXXI.

$la = \frac{1}{3} ly + \frac{5}{6} l(2yy+3)$, aut regrediendo ad numeros $C: a = \sqrt[6]{((2yy+3)^5 yy)}$. Assumpta igitur y ut libet, dabitur a, & ejus ope curva describitur, vel etiam ejus æquatio algebraica potest inveniri.

([b]) Sit [*Fig.*C] centrum conversionis C, ex quo describatur Circulus AGH, in quo assumatur punctum fixum A; Trajectoria MBb, ipsa vero curva in orbem conversa sit BF, a cujus puncto quovis B ducatur BC, [y] & ad hanc normalis CD [s] tangenti BD occurrens in D. Sit $AC = 1$, tangens anguli dati $bBD = t$, posito sinu toto $= 1$; estque tangens anguli $CBD = s:y$. Igitur tangens anguli $CBb = (ty - s):(ts + y) = bI:IB = bI:dy$. Ergo $bI = (ty - s)\,dy = (ts + y)$. Sed Cb [y] $: bI$ [$(ty - s)\,dy:(ts + y)$] $= Ce$ [1] $Ee = (ty - s)\,dy:(tsy + yy)$. Igitur $AE = \int((ty - s)\,dy:(tsy + yy))$. Assumpta itaque ad libitum CB [y], dabitur arcus AE, atque sic punctum B trajectoriæ quæsitæ. Si datus angulus fuerit rectus, tunc ejus tangens t infinita evadit. Quare arcus AE simpliciter sumendus est $= \int(tydy:tsy) = \int(dy:s)$. Non differt hæc solutio ab ea quam dedit Cel. *Joh.* BERNOULLI in *Act. Erud.* 1698, Oct. pag. 474.

N°. LXXXII.

LETTRE

DE MR. BERNOULLI,

Professeur de Groningue, à Mr. VARIGNON.

Du 15. *Octobre* 1697. *

Sur le Probléme des Isoperimetres.

Journal des Savans 1697. 39. Journal du 2°. Dec. p. 458. Edit. de Paris, pag. 737. Edit. de Holl.

IL y a près de trois mois que je vous fis part de quelques nouveaux Problémes, proposés par mon Frére dans les *Actes de Leipsic*, au mois de Mai dernier. Il les a, dit-il, imaginés à l'occasion de celui que j'avois proposé sur la plus vite descente des corps pesans, lequel a été assez favorablement reçu, tant ici (*Hollande*) qu'aux pays étrangers; témoins les excellentes solutions, qui en ont été données par les plus savans Géométres de ce tems (*), & qui toutes s'accordent merveilleusement avec la mienne.

Vous vous souviendrez, qu'en vous communiquant ces nouveaux Problémes, je vous dis en même tems que j'en avois trouvé les solutions, le même jour que le mois de *Mai* de ces *Actes* m'étoit tombé entre les mains, & de plus qu'elles étoient infiniment plus generales que les conditions de ces Problémes ne le demandoient. Je ne me serois peut-être pas attaché si-tôt à cette recherche, si je n'y eusse été comme obligé par un défi, qu'une loüable émulation, qui est entre mon Frére & moi, lui a fait me faire nommément à moi & en particulier.

* On trouve un Extrait de cette Piéce en Latin, dans les *Actes de Leipsic* 1698. Janv. pag. 52.

(*) Mrs. LEIBNITS, NEWTON, De l'HOPITAL, BERNOULLI.

culier. Un Inconnu même, dont mon Frére est le garant, y ajoute Num. LXXXII.
une promesse de 50 impériales, ou écus blancs, pourvû que j'accepte publiquement ce défi dans trois mois, & que je donne les solutions requises avant la fin de cette année. Je ne manquai donc pas, dès le lendemain du jour que ces Problémes vinrent à ma connoissance, de donner avis à Messieurs les Collecteurs des *Actes de Leipsic*, que j'en avois déja trouvé les solutions, les priant d'en avertir le Public ([b]). Je ne manquai pas non plus d'envoyer incontinent mes Solutions à Mr. LEIBNITZ, & de les lui remettre comme en dépôt, avec l'analyse qui m'y avoit conduit; sûr que je ne pouvois mieux m'adresser en ce rencontre qu'à ce Géométre incomparable. Je le suppliai de vouloir bien être nôtre Juge, ne doutant nullement que mon Frére ne s'en rapporte très volontiers à lui. Mr. LEIBNITZ y consentit, pourvuque de part & d'autre on en soit content. Tout ce que je viens de dire, se trouve inseré dans l'*Histoire des Ouvrages des Savans*, au mois de *Juin*, où je donne aussi mes remarques sur les diverses solutions de mon Probléme de la plus vite descente, qui ont paru dans les *Actes de Leipsic*.

Cependant, comme le tems s'en va expirer, & que je n'entends plus rien de l'Inconnu prometteur, j'ai jugé qu'il ne faloit plus attendre sa réponse, de peur qu'il ne laissât couler tout doucement le tems préfix, & qu'il ne me chicanât ensuite sur mon retardement.

Voici donc, Monsieur, mes solutions: Je m'assure que vous les trouverez dignes d'être communiquées au Public; & ce d'autant plus que mon Frére fait une estime singuliére de ses Problémes, tant pour leur subtilité, que pour leur difficulté. Avant que de les proposer, parlant de figures isopérimétres, il dit ([c]) qu'on croit communément, mais sans démonstration, [*vulgo creditur, & recte, sed sine demonstratione*] que le Cercle est la plus grande de toutes les figures d'un même circuit: mais il n'a pas pris garde, que PAPPUS l'a très-bien démontré dans les *Collections Mathématiques*, Liv. 5. Prop. 10. Je ne m'arrêterai donc pas à le prouver. Je dirai seulement en passant, qu'il y a long-tems que je fis part à Mr. LEIBNITZ d'une méthode que mon Frére me demande à cette occasion, comme s'il étoit le premier qui fût tombé sur cette spéculation, qui est de trouver la Courbe funiculaire, ou de la chainette, par la considération *de Maximis & Minimis*, en ne faisant reflexion que sur ce que le centre de gravité de la chaine doit descendre le plus bas qu'il est possible. Il suffit que Mr. LEIBNITZ en soit témoin; des raisons particuliéres m'empêchent de publier ma méthode.

 Venons

([b]) Ce qu'ils firent, dans les *Actes* de 1697, Octob. pag. 485.
([c]) Ci-dessus N°. LXXV. pag. 775.

Num. LXXXII. Venons au fait. La premiére question est telle : *D'entre toutes les Courbes isopérimétres constituées sur un axe déterminé BN*, [Fig. 1] *on demande celle, comme BFN, qui ne comprenne pas elle-même le plus grand espace; mais qui fasse qu'un autre compris par la Courbe BZN soit le plus grand, après avoir prolongé l'appliquée FP, de sorte que PZ soit en raison quelconque multipliée, ou sous multipliée, de l'appliquée PF, ou de l'arc BF; c'est-à-dire, que PZ soit la tantiéme proportionelle que l'on voudra d'une donnée A, & de l'appliquée PF, ou de l'arc BF.* Le sens de cette question est de *déterminer la Courbe BFN entre une infinité d'autres de même longueur qu'elle, dont les appliquées PF ou les arcs BF élevés à une puissance donnée, & exprimés par d'autres appliquées PZ, fassent le plus grand espace BZN.*

J'ai plus d'une solution de ce Probléme : mais je ne mettrai ici que la plus simple; elle suffit. Soit l'exposant de la puissance, n; une droite arbitraire, a; PF, ou BG, x; BP, ou GF, y; que l'on prenne GF, ou $y = \int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$. Je dis que le point F sera à la courbe requise BFN, tellement que faisant PZ en raison de la puissance n de l'appliquée PF, l'espace BZN sera le plus grand de tous ceux qui se pourroient ainsi former par d'autres courbes constitués sur BN, & de même longueur que BFN (a).

D'où il est manifeste, que si $n = 1$, la courbe BFN sera la demi-circonference d'un cercle; car y, ou $\int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ deviendra $= \int(x dx : \sqrt{(aa - xx)}) = a - \sqrt{(aa - xx)}$. Or c'est justement ce qui doit arriver, la courbe BZN étant, dans ce cas, la même que BFN.

En faisant $n = 2$, c'est-à-dire, PZ comme les quarrés de PF, la Courbe BFN est celle que représente un linge pressé d'une liqueur, & que mon Frére attribuë aussi à son Elastique.

Que si $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, si les PZ sont en raison sous-doublée des PF, alors BFN sera la Roulette ou Cycloïde ordinaire. De sorte que voilà encore une très-belle proprieté de cette fameuse Courbe, contre l'attente de ceux qui croyoient, qu'après la découverte de la plus vite descente que nous y venons de faire, il n'y restoit plus rien à découvrir. Ce n'est pas encore tout : J'ose avancer, & au premier loisir que j'aurai, je le ferai voir par un échantillon qui ne déplaira pas aux Géométres, que nonobstant toutes les recherches, & le rigoureux examen, que les plus habiles ont fait de cette Courbe depuis tant d'années,

(a) Voiez sur ceci les Num. suivans, & sur tout le XCIII. & le XCVI.

nées, elle a encore bien des proprietés très-confidérables qui leur font échappées. (d) Num. LXXXII.

Au refte, je remarque en general, que toutes les fois que n eft une fraction dont le numerateur eft l'unité, & le dénominateur un nombre pair quelconque, la courbe B F N fe pourra toujours conftruire par la quadrature du Cercle; & fi le dénominateur eft un nombre impair quelconque, alors la courbe B F N fera tout à fait algébraïque: (e) par exem-

(d) Mr. BERNOULLI veut parler ici de la Quadrature d'une infinité de Segmens & de Zones de Cycloide quarrables. Sur quoi voiez le N°. XCII & fuiv.

(e) Si l'on fait $a^n = c$ & $x^n = z$, on trouvera que $\int(x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$ fe reduit à $\frac{1}{n}\int(z^{1:n} dz : \sqrt{(cc - zz)})$ $= m\int(z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$, en faifant $m = 1 : n$. Or $m\int(z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$ eft $= - z^{m-1}\sqrt{(cc - zz)}$ $+ (m-1)cc\int(z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)})$. On peut s'en affurer par la differentiation, ou par cette analyfe. Pour integrer $z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$, je le confidére comme le produit de ces deux fracteurs $t = - z^{m-1}$ & $ds = - z dz : \sqrt{(cc - zz)}$. Puis donc que $\int t ds = ts - \int s dt$, auffi $\int(z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}) = - z^{m-1}$ $\sqrt{(cc - zz)} + (m-1)\int(z^{m-2} dz \sqrt{(cc - zz)})$. Mais ce dernier terme eft égal à $(m-1)\int((cc - zz) z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)})$ ou à $(m-1)cc\int(z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)}$ $-(m-1)\int(z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$. Donc $\int(z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}) =$ $- z^{m-1}\sqrt{(cc - zz)} + (m-1)$ $co\int(z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)}) -$ $(m-1)\int(z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$, & en tranfpofant $m\int(z^m dz : \sqrt{(cc - zz)})$ $= - z^{m-1}\sqrt{(cc - zz)} + (m-1)$ $cc\int(z^{m-2} dz : \sqrt{(cc - zz)})$. Ainfi l'intégration de $z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$ fe reduira toûjours à celle de z^{m-2} $dz : \sqrt{(cc - zz)}$, où l'expofant de z hors du figne eft diminué de deux unités. En continuant cette dégradation de l'expofant, on le reduira à la fin à l'unité s'il eft impair, ou à zero, s'il eft pair: c'eft-à-dire, que l'intégration de $z^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$ dépend de $\int(z dz : \sqrt{(cc - zz)})$, ou de $\int(dz : \sqrt{(cc - zz)})$. Or $\int(z dz : \sqrt{(cc - zz)})$ eft intégrable & $= - \sqrt{(cc - zz)}$. Mais $\int(dz : \sqrt{(cc - zz)})$ exprime le raport qu'a au raion un arc de cercle, dont le raion eft c & le finus z. Donc fi m eft pair, c. a. d. fi n [$= 1 : m$] eft une fraction dont le numerateur eft l'unité & le dénominateur un nombre pair, l'intégration de $mz^m dz : \sqrt{(cc - zz)}$, ou de $x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ dépend de la quadrature du cercle: Mais cette quantité peut s'intégrer abfo-

Num. LXXXII. exemple, si $n = \frac{1}{3}$, ou si PZ est en raison soustriplée de PF, l'on aura $y = 2a - (2a^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}) \sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

Avant que de passer outre, il ne sera pas hors de propos de donner ici une solution infiniment plus generale que ne requiert le Probléme; en supposant que PZ, au lieu de n'être que comme une puissance donnée de PF, soit maintenant composée comme l'on voudra, de PF & de données; comme si l'on décrit une courbe donnée quelconque BH sur l'axe BG, parallele à PF, & qu'appliquant PZ = GH on veuille que l'espace BZN soit le plus grand: Je dis, que pour construire la courbe BFN il faut prendre GF, ou $y = \int (b\,dx : \sqrt{(aa - bb)})$; j'appelle b l'intégrale ou la somme des GH $dx : x$ (f). D'où il est évident, pour ce qui est de l'arc BF, qui fait l'autre partie du Probléme, que quand même PZ ou GH seroit non seulement comme une puissance donnée de l'arc BF, mais aussi composé que l'on voudra de cet arc, de PF, & de données; on aura toujours une équation differentielle, si ce n'est pas du premier, au moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la courbe BFN.

Je ne puis passer sous silence une très-belle proprieté que j'ai rencontrée sur nôtre courbe considerée en general. C'est que le rayon FS de la développée, ou du cercle baisant, est toujours à la portion FR comprise entre la courbe & sa base, comme b est à PZ ou GH (g). Et par conséquent, dans le cas simple qu'on me propose, lorsque PZ ou GH $= x^n$, on aura toujours FS à FR en raison constante, savoir FS : FR $= 1 : n$. Il est aussi à remarquer, que dans la même courbe, où $\int x^m dx$ est un *Maximum*, $\int (dt : x^m)$ sera un *Minimum*, je prends dt pour l'élement de la courbe. C'est ce qui fait que m étant $\frac{1}{2}$, la courbe BFN, comme nous avons remarqué ci-dessus, doit être la même que celle de la plus vite descente; puisque dans celle-ci $\int (dt : \sqrt{x})$ est un *Minimum* par sa nature.

Mais

absolument si m est impair, c. a. d. si n [$= 1 : m$] est une fraction dont le numerateur est l'unité, & le dénominateur un impair.

(f) L'Auteur a corrigé ceci dans le N°. LXXXIV. Il veut qu'on lise, *J'appelle b les ordonnées GH; & pour ce qui est de l'arc BF*, &c.

(g) Dans le N°. LXXXIV, l'Autheur remarque qu'il faut lire, *comme b est à GT, aiant tiré BT parallele à la tangente en H, ou si l'on aime mieux, comme la soutangente de la Courbe BH est à l'abscisse BG.*

Mais en voilà assez, Monsieur, sur le premier Probléme (h). L'autre consiste à *déterminer la Cycloïde, qui entre toutes celles qu'on peut décrire d'une même origine & sur une même ligne horizontale, ait cet avantage, que sa portion comprise entre l'origine & une verticale donnée soit parcouruë dans le moindre tems possible, c'est-à-dire, en moins de tems que toute autre portion des autres Cycloïdes, pareillement comprise entre l'origine & la verticale donnée.* Num. LXXXII.

Il semble par la maniére de parler de mon *Frére*, que c'est pour la solution de ce seul Probléme, [quand même je n'aurois pas resolu le premier,] que nôtre Inconnu me promet le prix de 50 écus; car c'est en me proposant ce Probléme-ci, qu'il dit, *prodit Nonnemo, pro quo caveo, qui soluturo Fratri ultra laudes promeritas honorarium 50 imperialium decrevit.* Ainsi il faut qu'il l'ait jugé difficile. Cependant, si je me contentois de répondre simplement à la question, je le pourrois faire en trois mots; car il est visible que la solution de ce Probléme n'est qu'un petit Corollaire, qui se tire immédiatement de ce que j'ai dit de la courbe Synchrone (i), dans le mois de *Mai* des *Actes* dont il s'agit ici. Je dis donc, pour découvrir ce mystére, que *la Cycloïde décrite par un cercle, dont la circonférence soit égale au double de la distance entre l'origine & la verticale donnée, satisfait à la question.* Mais pénétrons plus avant. Si au lieu d'une verticale on suppose une ligne droite quelconque donnée de position, ou même une ligne courbe; le Probléme n'en deviendra pas plus difficile; puis qu'il est visible par la nature de ma *Synchrone*, que la Cycloïde cherchée sera toujours celle qui rencontre à angle droit la ligne donnée de position. Pour en trouver présentement le cercle generateur, il n'y a qu'à décrire au hazard un cercle qui touche l'horizontale au point où elle est coupée par la droite donnée de position; faire ensuite, comme l'arc de ce cercle retranché du côté de l'origine des Cycloïdes par la ligne donnée de position, est à son diamétre, ainsi la partie de l'horizontale interceptée entre l'origine & l'intersection soit à une quatriéme: Cette quatriéme sera le diamétre du cercle generateur de la Cycloïde cherchée. C'est ainsi que mon *Frére*, voulant me proposer cette question comme difficile, y devoit substituer toute ligne droite donnée de position, au lieu de la verticale, pour me la faire dans toute son étenduë: Je m'étonne que sa méthode ne le lui ait pas suggeré.

(h) On trouvera les Démonstrations de tout ceci dans les N°. XCIII, & XCVI.

(i) C'est celle qui retranche d'une infinité de Cycloides décrites d'une même origine, des arcs isochrones, c'est à dire, qui feroient parcourus dans des tems égaux.

Num. LXXXII. On voit donc que je lui ai plus que suffisamment répondu, & qu'ainsi je pourrois finir ici. Mais comme j'ai trouvé encore une autre solution de ce dernier Probléme, laquelle s'étend non seulement aux Cycloïdes, mais aussi à toutes les courbes semblables, & semblablement posées; il me prend envie de la communiquer encore, & ce d'autant plus que mon *Frére* paroit en parler comme d'une chose désesperée, jusqu'à ne vouloir pas même la tenter, se contentant de l'avoir seulement proposée: *Qui speculationem*, dit-il, *de Maximis & Minimis promovere volet, tentabit; nobis sufficiat proposuisse.* Il donne pour exemples les Cercles, ou les Paraboles à substituer à la place des Cycloïdes de ce Probléme. Pour moi, je l'énonce & le resouds generalement ainsi. *Soient AGB, AHD, &c.* [Fig. 2] *des Courbes données semblables & semblablement posées; GC une droite donnée de position: On demande par laquelle de ces Courbes, un corps pesant, commençant à descendre de leur origine commune A, arrive dans le moindre tems à la droite donnée GC.*

SOLUT. Ayant choisi une des courbes semblables pour constante, comme AGB, on nommera l'ordonnée BL, y; la courbe AGB, z; ensuite on tirera à chaque point B une touchante BR, que l'on prendra $= \frac{1}{2}\sqrt{y}\int(dz:\sqrt{y})$; en sorte que les extrémités R de toutes ces touchantes décriront une courbe nouvelle AOR; laquelle étant décrite, il faut tirer une ligne droite AR parallèle à GC; du point R, auquel elle coupe la Courbe AOR, on ménera une droite RB qui touche la Courbe AGB au point B, duquel si l'on tire la droite AB qui coupe GC en D, & que l'on fasse sur AD une Courbe AHD semblable à AGB; Je dis que la Courbe AHD sera celle par laquelle le corps descendant parviendra le plus vite à la droite GC (k).

En certains cas particuliers le Probléme devient fort facile. Par exemple, si les courbes AGB, AHD, &c. sont des Cercles, alors la construction s'en fait fort aisément par la rectification d'une courbe que mon *Frére* comparoit autrefois à un *nœud de ruban*, dont nous nous étions servi pour la construction de l'Isochrone paracentrique de Mr. LEIBNITZ (l): De sorte que ces deux Problèmes ont entr'eux une dépendance mutuelle; c'est-à-dire, que par la construction de l'un l'on aura celle de l'autre. Si AGB, AHD, &c. sont des Paraboles, le Problème se réduit de même à la rectification d'une Courbe.

J'ai supposé que les Courbes AGB, AHD, &c. étoient semblables: j'ai pourtant aussi une méthode pour quand elles ne le sont pas (m). Mais

(k) Voiez N°. LXXVIII, Note d. (l) Ibid. Note b.
(m) Ibid. Note f.

Mais parce que je n'ai pas encore eu le loisir de la mettre dans tout son jour, & que la construction en devient fort embarassée dans l'exemple le plus simple des courbes dissemblables AGB, AHD; quand même elles ne seroient que des Ellipses constituées sur un axe commun; je la remettrai dans une autre occasion; ceci suffisant tant à mon *Frère*, qu'à l'Inconnu prometteur, pour leur donner une satisfaction qui surpassera sans doute l'attente qu'ils avoient de moi; puisque cette réponse comprend beaucoup plus qu'ils ne me demandoient. Me voilà donc surabondamment quitte: Il ne reste plus qu'à l'Inconnu prometteur de s'aquitter aussi. S'il ne le fait pas, qu'il sçache que c'est aux pauvres plûtôt qu'à moi qu'il fait tort; mon dessein ayant toujours été de leur faire distribuer cet argent, tant à cause que ces solutions m'ont trop peu coûté pour en profiter, que pour lui faire voir que je ne suis point mercenaire, & que la gloire suffit pour m'engager. Num. LXXXII.

P. S. Je viens de recevoir une Lettre de M. le *Marquis de l'*Hospital, par laquelle il me mande qu'il a aussi resolu le second Problème de mon *Frère*, où il s'agit de déterminer la Cycloïde, qui rencontrant une ligne verticale donnée, soit parcouruë dans moins de tems qu'aucune autre, décrite de la même origine & sur la même horizontale.

N°. LXXXIII.

AVIS

Sur les Problémes dont il est parlé dans le Journal des Savans, *du* 2. Décembre 1697.

Journal des Savans 1698. 7°. Journal, du 17. Fevr. p. 78, Ed. de Paris, p. 110, Ed. à de Holl.

Monsieur Bernoulli, Professeur à *Bâle*, Auteur de ces Problémes, prétend que la solution du principal, qui concerne les figures isopérimétres, n'y est pas entiérement conforme

Num. LXXXIII à la vérité. C'est pour cela qu'il veut bien accorder encore quelque temps aux Géométres pour la chercher : Et si enfin personne ne la trouve, il s'engage à trois choses.

1°. A déviner au juste l'analyse qui a conduit son *Frére* à la solution qui se voit dans ce Journal.

2°. Quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes, si on la veut publier.

3°. A donner la véritable solution du Probléme dans toutes ses parties.

Il ajoûte, que s'il se trouvoit quelqu'un, qui s'intéressât assez à l'avancement des Sciences pour proposer quelque prix pour chacun de ces articles, il s'engage à perdre autant s'il ne s'àquitte pas du premier, à perdre le double s'il ne réüssit pas au second, & le triple s'il manque au troisiéme.

N°. LXXXIV.

REPONSE

De Monsieur BERNOULLI, *Professeur de* Groningue,

A l'Avis inseré dans le VII Journal des Savans; du 17 Février 1698.

Journal des Savans 1698. 15°. Journal du 21. Avril, pag. 172, Ed. de Paris, p. 270, Edit. de Holl.

JE vois bien par cet Avis de mon *Frère*, que l'Inconnu *Nonnemi* n'a guére envie de se rendre à la raison ; de peur sans doute d'être obligé de s'aquitter de sa promesse ; autrement il accepteroit l'offre que je

je lui ai faite, de nous en rapporter à la décision de Mr. LEIBNITZ; comme d'un des plus grands Géométres de ce tems; auquel, pour cet effet, j'avois envoyé mes solutions comme en dépôt; & entre les mains de qui on devroit de même remettre le prix, si l'on ne veut passer pour juge & partie tout ensemble. Ou si l'on recuse cet habile Mathématicien, qu'on en dise la raison, & qu'on en nomme un autre; car je suis prêt de subir le jugement de tout homme désintéressé, & versé dans ces matiéres. Sans cela, quoi qu'on objecte, je ne répondrai plus à rien; & je mépriserai constamment toutes les chicanes qu'on me fera, & que je prévois déja bien qu'on me veut faire. Voici cependant ce que je veux bien encore répondre à cet Avis. Num. LXXXIV.

On est muet comme un poisson sur ma seconde solution; ce qui fait déja voir qu'on en est parfaitement content, vû l'extrême application où l'on est à me chicaner. Aussi prends-je ce silence pour les *laudes promeritas*, que mon genereux Promoteur m'a fait espérer pour la solution de ce Probléme, qu'il jugeoit lui-même insoluble. Pour ce qui est de ma premiére solution, savoir celle du Probléme sur les figures isopérimétres, [qu'on dit être le principal, quoique, selon les expressions de mon *Frére* dans les *Actes de Leipsic*, ce soit l'autre qu'il tient pour le plus difficile,] on veut assurer qu'elle n'est pas *entiérement* conforme à la vérité. Mais ce mot, *entiérement*, fait assez voir, qu'on n'oseroit disconvenir qu'elle n'y soit du moins conforme en partie; & un peu plus de bonne foi auroit fait avouer qu'elle y est même conforme dans toute l'étenduë du Probléme proposé; & que s'il s'y est glissé quelque faute, ce n'est tout au plus que dans le surcroit d'étenduë que j'ai donné moi-même à ce Probléme. Pourquoi donc vouloir traiter cette solution de paralogisme? N'étoit-il pas plûtôt à présumer que cette faute ne venoit point du tout du fond de la méthode, mais uniquement de quelque circonstance accidentelle? Effectivement, pour avoir trop hâté, [vû que dès le lendemain du jour que ces Problémes vinrent à ma connoissance, j'envoyai mes solutions à Mr. LEIBNITZ, telles qu'elles ont été inserées depuis dans le Journal du 2 Décembre 1697 *, nonobstant le grand terme qu'on m'avoit donné, & dont j'aurois pu me prévaloir,] pour avoir, dis-je, trop hâté, il se glissa une faute légére, non dans la méthode, ni dans la solution du Probléme proposé, mais uniquement dans l'application de cette méthode au surplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ce Probléme, au delà de ce qu'il en avoit tel qu'on l'avoit proposé: de sorte que cette méprise ne donne atteinte, ni à ma méthode, ni à la solution requise. C'est pourquoi je soutiens encore,

* Ci-dessus N°. LXXXII. pag. 816.

Num. LXXXIV core, que le Probléme, tel qu'il a été proposé par mon *Frére*, (*Déterminer la Courbe entre les isopérimétres constituées sur une base donnée, dont la somme des ordonnées élevées à une puissance donnée, fasse un plus grand*) est entiérement resolu dans le Journal du 2 Décembre 1697, & conformément à tout ce que mon *Frére* demandoit. Ainsi ayant encore, de son aveu tacite, resolu son autre Probléme; auquel des deux qu'il attache le prix de son *Nonnemo*, ce prix me sera toujours dû. Mais je l'ai dit, & je le dis encore, n'étant point un mercenaire, je le céde aux pauvres; & me chicaner sur le surplus qu'on ne me demandoit pas, c'est-à-dire, sur ce que je n'ai pas donné plus qu'on ne demandoit, ce ne peut être qu'un prétexte pour leur refuser cette aumône, ou plûtôt pour leur nier cette dette.

J'en pourrois demeurer là, puisque je n'étois pas obligé à davantage. Mais il manque si peu de chose à ma premiére solution, pour lui donner le surplus d'étenduë, que j'ai librement ajouté au Probléme proposé, que trois mots suffisent pour reparer toute la faute de ma précipitation, tant elle est légére: pag. 462. ligne 7. du Journal du deuxiéme Décembre 1697, * où je dis, *J'appelle b l'intégrale ou la somme des G H dx: x*, effacez cela, & substituez simplement, *J'appelle b les ordonnées GH:* Omettez aussi le commencement de ce qui suit, savoir ces cinq mots, *D'où il est évident que*; car ce qui suit n'a point de connexion avec ce qui précéde, comme je me le persuadois alors, pour y avoir été trop vite. Dans la même page, ligne 18 † à la place de, *comme b est à PZ, ou GH*, mettez, *comme b est à GT, ayant tiré BT parallèle à la tangente en H*; ou si on l'aime mieux, écrivez seulement, *comme la soutangente de la courbe BH est à l'abscisse BG*. Tout le reste va bien: Je défie le plus clairvoyant de m'y marquer la moindre faute.

Je repéterai ici en general la proprieté très-remarquable, dont je n'avois fait mention que pour le cas particulier de mon Frére; ce qui fera voir en abregé, en quoi consiste toute ma solution generale, & d'où mon Frére pourra juger si elle s'accorde avec sa particuliére: c'est que si GH, ou PZ, doit être non seulement comme une puissance donnée de PF, mais aussi composée de PF & de données en quelque maniére que ce soit; alors on peut toujours trouver une même courbe, pour que $\int PZ\,dy$ fasse un plus grand, ou un plus petit; & pour que $\int (dt : PZ)$ fasse réciproquement un plus petit, ou un plus grand. Car j'ai trouvé [ce qui est admirable] que quand le sinus de l'angle mixtiligne BFP est à l'ordonnée GH, ou PZ, en raison constante, alors la courbe satisfait à l'un & à l'autre ††. Or comme j'ai fait voir dans les *Actes*

* Ci-dessus pag. 818. lig. 12. † Ligne 22.
†† Voiez N°. XCIII.

Actes de Leipsic du mois de Mai mille six cent quatre-vingts dix-sept, cette proprieté convient à la Courbe de la plus vite descente, dans toutes sortes d'hypothèses. Donc je puis dire avec raison, qu'ayant resolu generalement le Probléme des *Brachystochrones*, j'ai aussi resolu celui des Isopérimétres, avant que mon *Frére* l'eût proposé. Num. LXXXIV.

Il en est de même de son autre Probléme de la Cycloïde dont la portion, coupée par une verticale donnée, soit parcouruë dans le moindre tems possible; puisque j'ai montré que la solution en suit immédiatement de ma *Synchrone*, & qu'elle n'en est qu'un cas particulier. Il est surprenant que mon *Frére* m'ayant voulu proposer deux des plus difficiles Problémes qu'il pût imaginer, il soit justement tombé sur deux que j'avois déja resolus; & que la solution s'en soit trouvée dans le même mois des *Actes* où il me les a proposés. C'est ce qui me fournit encore une réponse fort succincte aux deux questions qu'il me fait; savoir

1. *Que la premiére question sur les Isopérimétres est resoluë par mes Brachystochrones, & en même tems qu'elles.*

2. *Que la seconde question sur la descente à la verticale donnée par la Cycloïde cherchée, est resoluë immédiatement par ma Synchrone.*

Quant à l'autre partie du Probléme des Isopérimétres, où l'on demande que PZ soit comme une puissance donnée de l'arc BF, [je ne sais si cette partie est jointe à l'autre copulativement, ou disjonctivement; les particules *vel*, *ve*, dont on se sert dans la proposition, paroissant n'exiger de moi que la solution de l'une ou de l'autre:] j'ai dit dans le Journal du 2 Décembre 1697, qu'on aura toujours par ma méthode une équation differentielle, sinon du premier, du moins d'un plus haut degré, qui déterminera la nature de la courbe. Comme je me contentois alors d'avoir trouvé la méthode qui y conduit, je ne me mis guére en peine d'en faire le calcul; mais depuis ayant eu le temps d'y penser, j'ai trouvé cette équation, $v = \int(ddy:(dt^2 - dy^2))$, pour la détermination de la courbe, en prenant dt ou l'élement de la courbe pour constant: j'entends par v non seulement une puissance donnée de t, ou de l'arc BF, mais toute quantité composée de cet arc BF & de données. Si v est $= t$, la courbe se construit fort aisément par le moyen de la Logarithmique *.

Au reste je remarque, que c'est le paralogisme que mon *Frére* a cru voir dans ma méthode, qui a donné lieu aux deux premiers des trois articles de son Avis, & qu'il y a été un peu trop vite. Par le premier de ces Articles il s'engage à *déviner au juste l'analyse qui m'a conduit à la solution de son Probléme sur les Isopérimétres.* Je sais bien qu'il pense que je me suis servi de la méthode des courbes qui se font par la pression

* Voiez N°. LXXXVIII & XCIII.

Num. LXXXIV

fion des fluides, que je confidérois autrefois pour le calcul de la *Voiliére*, comme compofée de deux autres preffions collaterales, favoir d'horizontale & de verticale : qu'il dife de bonne foi, fi je n'ai pas déviné au jufte fa penfée. Mais il fe trompe. Car quoique cette méthode [qui n'eft qu'indirecte], employée adroitement, conduife auffi à la folution requife; j'en ai pourtant d'autres, & même une directe, qui m'ont toutes fourni une même folution. Ajoutez qu'un fi merveilleux accord n'eft pas la feule preuve que j'aye de fa bonté, & que [s'il étoit befoin] je pourrois la prouver encore par une Démonftration Synthétique, faite à la maniére des Anciens, & fur-tout à l'imitation de celle que PAPPUS a donnée pour prouver que le Cercle eft la plus grande des figures ifopérimétres. Je confeille donc fraternellement à mon *Frére* de retracter la gageure qu'il offre pour le premier Article de fon Avis; car il perdroit infailliblement. Il eft de mon devoir de l'en avertir.

Pour ce qui eft du fecond article, j'efpére qu'il aura affez de candeur pour le revoquer de fon propre mouvement, après qu'il aura vu cet éclairciffement. Il n'y a rien à dire fur le troifiéme. Nous en jugerons quand il aura publié la folution qu'il nous promet depuis fi long-temps.

Pour me conformer enfin à l'humeur de mon Inconnu *Nonnemo*, [je ne faurois le nommer autrement, puifqu'il ne veut pas fe découvrir,] qui ne s'intéreffe à l'avancement des Sciences, qu'autant qu'il y a de l'argent à gagner, je m'engage à perdre le quadruple de fa promeffe, fi avant la fin de cette année il me détermine géométriquement, [comme je promets de le faire, s'il ne le fait pas,] *quelle demi-ellipfe, de toutes celles qu'on peut décrire dans un plan vertical fur un même axe horizontal donné de grandeur, eft parcouruë en moins de temps, fuppofé que le mobile commence fon mouvement à une des extrémités de cet axe.* Je permets que mon *Frére* le fecoure *. J'ajoute à ce Probléme les fix autres que j'ai propofés dans le Journal du 26 Août 1697 †, dont Monfieur le *Marquis de l'*HOSPITAL à refolu les cinq derniers, pour les exemples particuliers que j'y donne; mais je demande des folutions generales, fur tout pour les courbes diffemblables, dont il s'agit dans le quatriéme & le cinquiéme. Voilà toute la Replique, que j'ai crû devoir faire à l'Avis de mon *Frére*.

* Voiez N°. LXXXVIII & CIII. Art. 4.
† Ci-deffus N°. LXXIX. Voiez N°. LXXX.

N°. LXXXV.

N°. LXXXV.

AVIS

DE MONSIEUR BERNOULLI,

Professeur des Mathématiques à Bâle,

Sur la Réponse de son Frére *inserée dans le* Journal du 21 Avril 1698.

AVANT que de publier ma Réponse aux solutions de mon *Frére*, je le prie de repasser tout de nouveau sur sa derniére, d'en examiner attentivement tous les points, & de nous dire ensuite si tout va bien; lui déclarant qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétextes de précipitation ne seront plus écoutés.

Journal des Savans 1698. 26. Journal du 26. Mai, pag. 240, Edit. de Paris, pag. 377, Edit. de Holl.

N°. LXXXVI.

RÉPONSE

DE MR. BERNOULLI,

Professeur de Groningue,

A l'Avis inseré dans le Journal du 26 Mai 1698.

Journal des Savans 1698. 24e. Journal du 23 Juin, pag. 284, Edit. de Paris, pag. 446, Edit. de Holl.

JE n'ai que faire de repasser sur mes solutions des Problémes de mon *Frére*: Je sai qu'en penser, & mon temps sera assurément mieux employé à faire de nouvelles découvertes. C'est assez que mon *Frére* reconnoisse enfin que je posséde la méthode, puisque c'est tout ce dont il s'agit ici; la précipitation qu'il croit appercevoir dans ma réponse du 21 Avril dernier, ne faisant, ni pour, ni contre la validité de cette méthode. C'est donc en vain qu'on tâche de se tirer par tous ces détours; & tandis que le *Nonnemo* refusera de se soumettre au jugement d'un tiers, comme il l'a refusé jusqu'ici, nonobstant toutes les assignations que je lui ai données; tout le monde verra bien que c'est cause perdue pour lui. Cependant, pour couper pied à toutes ces chicanes, je soutiens

1. *Que j'ai exactement & légitimement resolu par mes Brachystochrones le Problême des Courbes, dont les ordonnées élevées à une puissance donnée sont un plus grand.*

2. *Qu'entre toutes les Cycloïdes décrites d'une même origine, & sur une base horizontale, celle qui rencontre à angles droits une ligne droite (verticale,) est aussi celle par laquelle le mobile descend le plus vite à cette même ligne droite, en commençant son mouvement à l'origine commune des Cycloïdes.*

C'est là tout ce que ma partie m'a demandé. Ainsi, pour répondre juste, c'est à ces deux propositions précisément qu'elle doit répondre, oui

oui, ou non: c'eſt aſſez; & ſe jetter ſur le ſurplus d'étenduë que j'ai donnée moi-même à ces deux Problémes, c'eſt prendre le change, ou le vouloir donner, puiſqu'il ne s'agit point du tout de ce ſurplus, quoiqu'il ſoit auſſi parfaitement conforme à la vérité. Num. LXXXVI.

Au reſte, puiſque dans ce nouvel *Avis*, on ne fait aucune mention des Problémes que j'ai propoſés à mon *Nonnemo* dans ma *Réponſe* du 21 Avril dernier; j'en conclus qu'il n'oſe riſquer ſeulement le quart de ce que j'expoſe, c'eſt-à-dire, de tout ce que je lui ai laiſſé la liberté de parier. Je lui donne encore cinq ſemaines, à compter du jour que ceci paroitra, pour déclarer s'il veut accepter la gageure. Ces Problémes ſont à la portée de l'eſprit humain, puiſque je les ai reſolus. Ainſi, s'il eſt brave, & auſſi habile qu'il le veut paroître, il doit accepter ce défi, & ne pas reculer.

N°. LXXXVII.

EXTRAIT

D'UNE LETTRE

De Monſieur BERNOULLI *de* Bâle, *

Du 26 Juin 1698.

Contenant l'examen de la ſolution de ſes Problémes, inſérée dans le Journal *du* 2 Décembre 1697.

Journal des Savans 1698. 30e. Journal du 4 Aout, p. 355. Edit. de Paris, pag. 560, Edit. de Holl.

Comme cette Lettre étoit faite dès le temps que l'Avis de Monſieur BERNOULLI, *inſeré dans le Journal du* 17 *Février* 1698, *fut publié, il n'a pas jugé à propos d'y rien changer pour l'autre*

Nnnnn 2

* A Mr. VARIGNON.

Num. LXXXVII *l'autre solution du 21 Avril; se reservant de répondre séparément à cette solution, qu'il dit être contraire à la premiére.*

Lorsque je proposai, dans les *Journaux de Leipsic*, à mon *Frére* quelques Problémes de Géométrie, ce fut principalement dans la vûë, & dans l'espérance qu'il nous en donneroit un jour la solution. Car outre que je considerois, que nous pouvons avoir bonne part à la gloire de ceux qui se rendent habiles dans une Science, dont il n'y a pas long-temps que nous leur avons donné les premiéres ouvertures; j'avois encore des raisons particuliéres pour souhaiter qu'il y pût réüssir, & gagner le petit prix qui y a été joint par un de mes amis. Ce que je dis, Monsieur, pour vous faire comprendre le plaisir que j'ai eu à lire la solution de mes Problémes dans le cahier du Journal que vous avez eu la bonté de m'envoyer, & plus encore à y remarquer d'abord quelque conformité avec la mienne, laquelle me faisoit croire qu'il s'en étoit acquitté en habile homme. Mais que ce plaisir a duré peu! Il a été bien-tôt suivi du chagrin de voir mon attente frustrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les circonstances avec soin, j'ai trouvé que la solution de mon premier & principal Probléme étoit très-défectueuse, & même fausse en tout sens; bien qu'en un cas elle nous fasse trouver par accident la pure vérité. Pour prévenir la surprise qu'un aveu de cette nature pourroit causer, il faut considerer qu'en raisonnant juste sur une hypothèse vraye, l'on arrive toujours à une conclusion vraye; qu'en raisonnant juste sur une hypothèse fausse, l'on arrive toujours à une conclusion fausse; (comme l'on voit par les démonstrations qu'on appelle *ad absurdum*;) mais qu'en raisonnant faussement sur une hypothèse fausse, il se peut faire quelquefois, qu'on arrive à une conclusion vraye; une fausseté, pour ainsi dire, corrigeant l'autre. C'est justement ce que je crois être arrivé à mon *Frére*, qui, selon toutes les apparences, s'est d'abord jetté dans un principe faux, d'où par le moyen d'un Sophisme, il a tiré une solution, qui par un bonheur extraordinaire, ne laisse pas d'être en partie véritable. Quoique je ne parle que par conjectures, [il seroit à souhaiter, pour en juger avec certitude, qu'il nous eut donné l'ana-

l'analyse, ou du moins la démonstration de cette solution, comme j'ai fait celle de son Probléme de la plus vite descente *:] je m'assure pourtant que ces conjectures sont tellement fortes, que vous ayant expliqué la maniére dont je m'imagine qu'il s'y est pris, vous m'avouerez qu'il est comme impossible qu'il se soit servi d'une autre. Num. LXXXVII

Mais quand il n'y auroit rien à redire à la solution en elle-même, je ne trouve pas encore qu'il puisse prétendre au prix qu'on y a joint; d'autant qu'il n'a resolu le Probléme, ni suivant mon intention, ni pleinement, & en toutes ses parties. Vous vous souvenez sans doute, Monsieur, que j'ai proposé mes Problémes, à l'occasion de celui de mon *Frére*, dont j'avois donné la solution par des principes de pure Géométrie; en sorte qu'il est visible que mon intention étoit d'inviter mes Lecteurs à les resoudre par la même voye. Mais il est très-probable, comme je le ferai voir, que mon *Frére* ne s'est servi dans cette recherche que d'un principe étranger & méchanique, qu'il devoit plûtôt prouver que supposer; c'est pourquoi l'on ne sauroit aucunement dire, qu'il ait agi suivant mon intention. A quoi j'ajoûte, que celui qui aspire au prix d'un Probléme, est obligé d'en donner une solution complette, qui satisfasse à tous les points de la question proposée. C'est ainsi que je fis à l'égard des Problémes proposés par mon *Frére* dans son Programme de l'année passée: j'eus soin de les resoudre tous, & en toutes leurs parties, jusqu'à marquer même un endroit où mon Frére pouvoit s'être trompé, en prenant des courbes differentes pour une même †. Et c'est ce qu'on ne peut pas dire de la solution qu'il nous donne à présent de mon Probléme; puisque, quand j'accorderois tout le reste, il ne l'a pas resolu dans la partie qui concerne l'arc BF, ou plûtôt parce qu'il l'a resolu faussement, comme je dirai ci-après.

Mais entrons en matiére, & voyons quelle peut avoir été l'analyse de mon *Frére*. Il dit qu'il avoit trouvé la solution du Pro-

 bléme,

* Ci-dessus N°. LXXV. pag. 770. † Ibid. pag. 777.

Num. LXXXVII bléme, le même jour qu'il vint à sa connoissance; & dans l'*Histoire des Ouvrages des Savans*, au mois de Juin 1697, Art. 2, où il nous annonce sa solution, il restreint ce jour-là à trois minutes. Ce peu de temps me fit aussi-tôt soupçonner, qu'il ne l'avoit cherchée que par quelque principe étranger, ou indirect, & tel qu'il saute naturellement aux yeux; sachant par expérience que celle qui se tire de la pure Géométrie est trop recherchée pour être ainsi trouvée tout d'un coup. Je remarquai aussi, qu'il n'y avoit rien qui se présentât plus naturellement à l'esprit, que ce principe de Méchanique: *Que les corps pesans descendent, jusqu'à-ce que leur centre de gravité soit le plus bas qu'il soit possible*; par exemple, qu'un lambeau de linge BTN soutenu par ses extrémités B, N, & rempli de quelque liqueur jusqu'à sa base BN, ou bien qu'une corde BTN chargée de differens poids dans tous les points de sa longueur, doit prendre une figure telle, que le centre de gravité de cette liqueur, ou de ces poids, descende plus bas qu'il ne feroit dans toute autre. Et c'est à mon avis le principe dont mon *Frére* s'est servi en cette rencontre. Voici comme il l'applique. Il suppose un linge BTN rempli jusqu'à la base BN d'une certaine liqueur, qu'il conçoit être de differente pesanteur spécifique, & telle que le poids de chaque filet PF soit comme GH divisé par BG; d'où il suit, que faisant $BP = y$, $PF = x$, $BF = t$, & GH, ou PZ, $= p$; le poids du petit trapèze PC sera $p\,dy : x$ [je marque la division par : à la façon de Mr. LEIBNITZ, pour la commodité de l'Imprimeur, vous priant de rendre cette Lettre publique,] sa force mouvante, *momentum*, à l'égard de la ligne BN sera $= \frac{1}{2} p\,dy$; & par conséquent la somme de ces forces $= \int \frac{1}{2} p\,dy$; & cette somme devant déterminer la distance du centre de gravité de la liqueur à la base BN, laquelle par l'hypothèse est la plus grande qu'elle puisse être; il conclut que $\frac{1}{2} \int p\,dy$, ou bien son double $\int p\,dy$, c'est-à-dire, la somme des trapèzes QZ, ou l'espace BZN est un *Maximum*, ce que la question demande. Il s'imagine donc que, pour en venir à bout, on n'a qu'à chercher la courbure d'un tel linge, suivant la méthode que j'ai autrefois pratiquée pour la Voilière; ce

ce qui se fait ainsi. Par ma Théorie de la pression des fluides, le poids PC étant $p\,dy : x$, il pousse la portion du linge FC, suivant sa perpendiculaire FD, avec une force FD $= p\,dt : x$, laquelle par la doctrine de la communication des mouvemens se peut resoudre en horizontale FE $= p\,dx : x$, & en verticale ED $= p\,dy : x$. Que toutes ces petites forces verticales, qui agissent sur la partie du linge FT, soient ramassées dans le corps L, & toutes les horizontales en M: Que ces deux corps tendent les deux filets FI, TI, qui touchent le linge en F & T; il faudra les mêmes puissances en F & en T, pour soutenir les corps L & M, qu'il faut pour soutenir le linge FT, & parce que la puissance T demeure constamment la même, en quelque endroit du linge que l'on applique l'autre F, il s'ensuit que la partie de cette puissance, qui est employée à soutenir le corps L $= \int(p\,dy : x)$ somme des forces verticales, qui agissent sur la partie du linge BF, jointe au corps M $= \int(p\,dx : x)$ sommes des forces horizontales qui agissent sur la partie FT, & que la puissance T porte toute seule, fait une somme constante. Ceci étant posé, l'on peut considérer, suivant vôtre beau Théorême, dont je me sers en beaucoup de rencontres très-utilement, que le corps L est à la partie de la puissance T qui le soutient, c'est-à-dire, $\int(p\,dy : x)$ à $1 - \int(p\,dx : x)$, comme le sinus de l'angle FIT ou CFV au sinus de l'angle FIK ou FCV: c'est-à-dire, comme CV à FV, ou dx à dy: proportion qui se reduit justement à l'égalité que mon Frére donne pour la Courbe cherchée, qui est $dy = dx \int(p\,dx : x) : \sqrt{(1 - (\int p\,dx : x)^2)}$ ou [en mettant b au lieu de $\int(p\,dx : x)$] $b\,dx : \sqrt{(1 - bb)}$, & [dans le cas particulier de $p = x^m$] $dy = x^m\,dx : \sqrt{(1 - x^{2m})}$, comme l'on peut voir en ce que par la substitution de ces valeurs les termes de la proportion s'identifient ([a]).

Par un semblable raisonnement on peut prétendre de trouver la

([a]) On peut voir aussi le N°. XLVIII, pag. 483, Note (a,) en remarquant, que ce qui est là nommé p, est ici $p : x$.

Num. LXXXVII la Courbe BTN, dont $\int(dt:x^m)$ est un *Maximum* ou un *Minimum*, en feignant que cette Courbe est représentée par une corde chargée dans tous les points F de petits poids réciproquement proportionels à x^{m+1}; par ce moyen le poids de la portion FC deviendra $dt:x^{m+1}$, la force de ce poids à l'égard de la droite BN, $dt:x^m$, & la somme de ces forces, qui doit marquer la distance du centre de gravité de tous les poids à la droite BN [& par conséquent un *Maximum*] $\int(dt:x^m)$, comme il est requis. Le calcul en est le même que ci-dessus; on doit seulement remarquer, que le corps M étant nul en cette rencontre, la puissance T qui est constante, & que l'on peut nommer $1:m$, est toute employée à soutenir le corps L ou $\int(dt:x^{m+1})$; de sorte que l'on a cette proportion, $\int(dt:x^{m+1}):\frac{1}{m}=dx:dy$. D'où l'on tire encore l'égalité précédente $dy=x^m dx:\sqrt{(1-x^{2m})}$, comme mon *Frére* l'a trouvée (*).

Vous voyez, Monsieur, quelle peut avoir été l'analyse qui l'a conduit à la solution qu'il nous donne de mon Probléme. Il ne faut pas être fort attentif, pour y découvrir deux défauts considérables. Il suppose d'abord, sans fondement, que s'il y a plusieurs figures Isopérimétres chargées de poids en certaine proportion par dedans, ou autour de leurs circonferences, le centre de gravité de ces poids est plus éloigné de l'axe dans celle que les poids auroient

(*) $dx:dy=m\int(dt:x^{m+1})$, en differentiant se reduit à $(dyddx-dxddy):dy^2=mdt:x^{m+1}$; ou, [mettant pour ddy sa valeur $-dxddx:dy$, qui resulte de $dt=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ constante] à $dt^2ddx:dy^3=mdt:x^{m+1}$, soit $dtdxddx:(dt^2-dx^2)\sqrt{(dt^2-dx^2)}=mdx:x^{m+1}$, dont l'intégrale est $-dt:\sqrt{(dt^2-dx^2)}=-x^m$ ou $(dx^2+dy^2):dy^2=x^{2m}$, d'où l'on tire $dy=x^m dx:\sqrt{(1-x^{2m})}$.

roient donné à un linge ou à une corde, que dans toutes les autres. J'avouë que lorsqu'il y a toujours une même quantité de poids, qui agit successivement sur quelque matiére flexible que ce soit, ces poids doivent se ranger de telle sorte que leur centre de gravité se trouve le plus bas qu'il soit possible; mais dans la supposition précédente, la quantité des poids n'est pas la même dans les differentes figures Isopérimétres; ou quand il y en auroit une même quantité, il est impossible que ces poids faisant prendre successivement à la matiére fluide des figures différentes, puissent acquerir ou retenir d'eux-mêmes cette proportion ou disposition qu'on leur suppose. Soient, par exemple, deux figures Isopérimétres BTN & B*btn*N, dont celle-ci renferme un espace B*btn*N plus grand que BTN de tout l'espace B*bn*N, puisqu'on sait que les Isopérimétres ne sont pas égales; qu'on conçoive à la place de la figure BTN un linge rempli jusqu'à la base BN de quelque liqueur ordinaire, & telle que le poids de chaque filet PF soit proportionel à la longueur PF, c'est le seul cas possible dans la nature; que cette liqueur agissant ensuite librement sur le linge, lui fasse prendre la figure B*btn*N: Il est clair, qu'après cela, elle n'ira plus qu'en *bn*, & que par conséquent le centre de gravité de l'espace *btn* doit bien être plus bas que celui de l'espace BTN; mais il n'est nullement évident qu'ajoutant par dessus celui-là la portion B*bn*N, le centre de gravité de tout l'espace B*btn*N soit encore plus bas que celui de BTN, ou de telle autre figure Isopérimétre qu'on voudra. Je soutiens même que cela est faux, & que la figure d'entre les Isopérimétres, dont le centre de gravité est le plus éloigné de l'axe, n'est pas celle d'un linge rempli de liqueur, mais une autre que j'envelope dans cette anagramme, pour donner le loisir à mon *Frére* de la chercher aussi, s'il veut persuader à nos Lecteurs qu'il posséde la véritable méthode pour ces Problémes: $a^{12}\ b^{2}\ c^{3}\ e^{9}\ g^{2}\ hi^{7}\ l^{6}\ m^{3}\ n^{6}\ o^{4}\ p^{7}\ qr^{2}\ s^{2}\ t^{7}\ v^{4}$. (e).

Num. LXXXVI.

(e) Le sens de cette Anagramme est celui-ci: *Illa nempe* [figura] *quæ sinum*

Num. LXXXVII

Cependant quoi que le centre de gravité de l'espace absolu ne soit pas le plus bas dans la figure du linge, on peut du moins conclure que le centre de cette portion, qui est remplie par la masse liquide, doit être plus bas que le centre d'une portion égale qu'on pourroit couper depuis le sommet de telle autre figure isopérimétre qu'on voudra; comme effectivement je le trouve par mon analyse: marque indubitable de sa bonté & de sa justesse. Et c'est avec cette limitation qu'il faut entendre ce que j'ai dit du centre de gravité de la Courbe élastique, dans les *Actes de Leipsic* de l'an 1694. pag. 276. *

Ibid. 31e. Journal du 11 Aoust, pag. 361, Edit. de Paris, pag. 570. Edit. de Holl.

L'autre erreur qui se trouve dans l'analyse précédente de mon *Frére*, n'est pas moins considérable. Elle consiste, en ce qu'il marque la distance du centre de gravité des poids par la somme de leurs forces; & chacun sait que cette distance se détermine par la somme des forces appliquée à la somme des poids, & qu'ainsi elle ne peut se proportionner à la seule somme des forces, que lorsque la somme des poids demeure constamment la même; ce qui n'arrive pas ici, comme je viens de le remarquer.

Voilà donc deux faussetés assez palpables dans un même raisonnement; mais aussi deux faussetés, dont l'une redresse l'autre si heureusement, qu'elles font trouver dans quelques cas la véritable solution; quoique cela ne puisse être que l'effet d'un pur hazard, qui ne donne pas plus de droit à la gloire d'avoir réüssi, qu'auroit celui, qui pour soutenir qu'*un caillou est de la pierre*, le prouveroit par ce raisonnement: *Tout homme est pierre; Tout caillou est homme; Donc tout caillou est pierre.* Marque de cela, c'est que l'on peut proposer tel Probléme, où l'une des faussetés venant à cesser, l'autre nous conduiroit à une conclusion nécessairement fausse: comme si l'on proposoit de trouver entre une infinité de Courbes Isopérimétres BTN, BtN, &c. [qui seroient toutes chargées dans leurs circonferences, en sorte que le poids

num anguli tangentis & applicatæ cubo applicatæ proportionalem habet: par où l'on désigne la courbe dont l'équation est $dy = x^3 dx : \surd(a^6 - x^6)$.

* N°. LVIII. pag. 599.

poids de chaque portion FC fût comme la portion correſpondante de la baſe PQ] celle qui a le centre de gravité de ces poids le plus éloigné de l'axe; car en ce cas on trouve que la chainette eſt une parabole, ainſi que je l'ai dit dans les *Actes* de 1691 au mois de Juin, pag. 288 †, au lieu que la courbe cherchée doit être un cercle; parce que la ſomme des poids étant ici comme la ſomme des PQ ou comme la baſe BN, & par conſéquent la même dans toutes les Courbes Iſopérimétres, la diſtance du centre de gravité des poids à la baſe eſt véritablement proportionelle à la ſomme de leurs forces, c'eſt-à-dire, à $\frac{1}{2}\int x\,dy$, laquelle on ſait n'être la plus grande que dans le Cercle. Num. LXXXVII

Mais quoiqu'il en ſoit de tout ceci, il eſt ſûr que la ſolution de mon *Frére* généralement parlant eſt fauſſe; ſur tout, que celle qui regarde l'arc BC, l'eſt même dans tous ſes cas: ce qui me confirme entiérement dans la perſuaſion où je ſuis, que l'analyſe, qui l'y a conduit, ne peut être differente de celle que j'ai rapportée, & qui fait trouver ſi juſtement ſa ſolution. Tout le monde ſait, qu'il eſt aſſez ordinaire qu'on arrive à une même vérité par différentes voyes; parce que la vérité n'eſt qu'une, & toujours ſimple: mais le faux étant infini en nombre, il eſt moralement impoſſible qu'on arrive à une même fauſſeté par deux raiſonnemens auſſi plauſibles & auſſi apparens que celui-là. Et c'eſt cette conſidération qui a donné lieu au premier des trois articles du mois de Février dernier de ce Journal où je me ſuis engagé à deviner l'analyſe de mon *Frére* *. Vous jugerez, Monſieur, ſi je puis avoir bien rencontré.

Au reſte, il y auroit lieu de s'étonner, ſi une analyſe, auſſi défectueuſe que celle-là, n'étoit pas ſujette à pluſieurs contradictions: Auſſi l'eſt-elle à plus d'une. Premiérement j'obſerve que, ſi au lieu de ſe repréſenter la Courbe, dont $\int x^m dy$ eſt un *Maximum*, comme un linge, & celle dont $\int (dt : x^m)$ eſt un *Minimum*, comme une corde, l'on peut tourner la choſe, en ſe ſervant de la conſidéra-

Ooooo 2

† N°. XLII, pag. 449. * Ci-deſſus N°. LXXXIII, pag. 822.

Num. LXXXVII ſideration de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci ; & alors on trouvera des ſolutions très-differentes de celles qu'on a trouvées. J'obſerve auſſi que la raiſon du choix de mon *Frére*, qui a préféré le linge pour la premiére, a été, ſans doute, parce qu'il a vu que, s'il faiſoit autrement, la ſolution qu'il trouveroit ne l'accommoderoit pas pour le cas de $m = 1$, auquel on fait que la courbe doit être un cercle. Je ne parle point ici de ce que ſuivant cette analyſe, la qualité $\int(dt : x^m)$ de la courbe cherchée devroit plûtôt être un *plus grand*, qu'un *plus petit* ; je remarque ſeulement que cette courbe ſe peut encore trouver, ſi on la conſidére comme un rayon de lumiére, qui paſſe par un milieu inégalement tranſparent, & dont la rareté à la hauteur BG eſt comme GH ; mais qu'elle ne s'accorde avec celle qui ſe trouve par la conſidération de la corde, que lorſque GH eſt comme une ſimple puiſſance de BG ; ce qui eſt peut-être cauſe que mon *Frére*, après avoir donné la Courbe dont $\int pdy$ eſt un *plus grand*, généralement pour tous les rapports de GH à GB, ou de p à x, n'oſe faire la même choſe de $\int(dt : p)$, & qu'il ſe contente de nous dire ſimplement quelle eſt la courbe dont $\int(dt : x^m)$ eſt un *plus petit* ; bien que cette précaution ait été aſſez ſuperflue, & qu'il eût pû nous donner hardiment tout ce qu'il a trouvé ſur cette derniére ſuppoſition, l'analyſe qui s'y fonde étant tout autrement évidente que celle qui prend la courbe pour une corde. Il faut cependant avouer qu'elle n'eſt pas plus propre que les autres pour faire trouver la courbe dont $\int t^m dy$ eſt un *plus grand*, ou un *plus petit* ; puiſque l'on conçoit aiſément que les longueurs BF de différentes Iſopérimétres, qui correſpondent à une même hauteur BG, étant differentes, il faudroit que les GH qui y ont raport, & qui marquent la rareté du milieu, fuſſent auſſi differentes à la même hauteur BG ; ce qui eſt abſurde. Enfin, Monſieur, cela eſt ſi clair, qu'il n'y a pas lieu de douter que mon *Frére* n'ait bien vu & bien connu tout cela. Mais le moyen d'y remédier ? Il s'étoit déja précipité de publier par tout qu'il avoit trouvé la véritable ſolution, & il n'y avoit plus moyen de s'en dédire ; le

temps

temps pressoit, le terme alloit expirer, & il n'en avoit pas trouvé de meilleure. Il faloit donc publier celle qu'on avoit, malgré l'inévidence & toutes les contradictions qui s'y rencontrent. Num. LXXXVII.

Deux autres Anagrammes, dont peut-être on donnera un jour la clef.

$a^{44}\ b^{8}\ c^{25}\ d^{20}\ e^{65}\ f^{3}\ g^{4}\ h^{2}\ i^{58}\ l^{22}\ m^{32}\ n^{32}\ o^{17}\ p^{19}\ q^{8}\ r^{30}\ s^{39}\ t^{42}\ v^{54}\ x.$

$a^{45}\ b^{8}\ c^{16}\ d^{10}\ e^{50}\ f^{3}\ g^{7}\ h^{2}\ i^{40}\ l^{7}\ m^{15}\ n^{33}\ o^{7}\ p^{13}\ q^{4}\ r^{18}\ s^{33}\ t^{40}\ u^{30}\ x^{4}.$

NB. Touchant le sens de ces deux Anagrammes, voiez le N°. CIII, Articles 4 & 5.

N°. LXXXVIII.

AVIS

SUR LA REPONSE

Inférée dans le Journal *du* 23 Juin *dernier* 1698.

JE n'ai jamais cru que mon *Frére* possedât la véritable méthode pour le Probléme des Isopérimétres; mais maintenant j'en doute plus que jamais, vû la difficulté qu'il fait de repasser sur ses solutions. Car enfin pourquoi nous refuser une chose si-tôt faite, si ce n'est qu'il ne se fie pas lui-même à sa méthode? S'il n'*a emploié que trois minutes de temps*, comme il le dit, *pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le mystére*, il y a apparence que la revuë de ce qu'il a trouvé, ne lui en coûtera pas

Ibid. pag. 364, Ed. de Paris, & p. 375, Edit. de Holl.

Num. LXXXVIII. pas davantage: d'ailleurs quand il y en mettroit le double, eſt-ce que ſix minutes, emploiées à cet examen, diminueroient tant le nombre de ſes nouvelles découvertes? Mais quelque peu de peine que cela lui doive donner, je veux bien encore lui faire grace de plus de la moitié, en le priant ſeulement de retoucher ce qui concerne l'arc BF, ou du moins de nous dire, s'il n'y a point de faute d'impreſſion dans ſon égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$. Il ſait que cela fait *une partie de ce que j'ai demandé*, [quoiqu'il le diſſimule,] & qu'ainſi il eſt indiſpenſablement obligé de reformer ſa ſolution, ſi elle eſt fauſſe, comme je le ſoutiens, à moins qu'il ne veuille ſe déſiſter de ſes prétentions. Autrement, ſur quoi veut-il que nos Lecteurs fondent leur jugement, n'aiant vu de lui ni analyſe ni démonſtration? [parce que peut-être il n'en oſe donner.] Je déclare, que bien loin de refuſer dans tout ce differend l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ, je veux encore accepter de bon cœur celui de Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, comme de tous les plus excellens Géométres de ce temps; pourvu qu'ils veuillent ſurſeoir leur jugement, juſqu'à ce que j'aie parlé à mon tour, & que j'aie achevé de répondre aux deux ſolutions que mon *Frére* nous a données dans le Journal.

Je ne dis rien des nouveaux Problémes par leſquels mon *Frére* tâche de faire diverſion dans l'eſprit des Lecteurs; tant parce que n'aiant pas encore ſatisfaction ſur le mien, je ne m'y crois pas obligé, que parce qu'il ſemble n'en vouloir proprement qu'à ſon *Nonnemo*. Je ne ſais ſi celui-ci nous en donnera un jour la ſolution; mais je ſais bien qu'il eſt homme à le faire, & peut-être l'a-t-il fait déja. Du moins, ſi l'on eſt ſage, on en demeurera là, & on ne le pouſſera pas davantage.

N°. LXXXIX.

N°. LXXXIX.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De Monsieur BERNOULLI, Professeur *de* Groningue, *du* 22 Aoust 1698, *Pour servir de Réponse à celle de son* Frére Professeur *à* Bâle, *inserée dans les* Journaux *des* 4 & 11 *du même mois.*

Comme les dates pourroient être ici de quelque consideration, M. V. * *croit devoir avertir qu'il a reçu cette Lettre dès le* 2 *Septembre dernier, & que les vacances du* Journal *n'ont pas permis qu'elle parût plûtôt.* Journal des Savans 1698. 40°. Journal du 8. Dec. pag. 477 Ed. de Paris, & pag. 759 Edit. de Holl.

Il est bien surprenant, qu'en voulant ménager une personne, il se trouve qu'on l'offense. Je croyois n'avoir affaire qu'à un Inconnu; je prenois toutes les mesures possibles pour ne point donner sujet à mon *Frére* de se plaindre de moi; je tâchois de conserver l'union & la charité qui doit être entre deux fréres; & je me trouve malheureusement trompé: l'extrait de sa Lettre, que je reçus hier, me faisant voir, que tant de mesures & tant d'égards pour lui n'ont pu l'empêcher de s'intéresser de toute sa force pour cet Inconnu, & de prendre parti contre moi, mais d'une maniére si chaude & si violente, qu'il n'y a personne qui ne voye qu'au lieu de cette louable émulation dont je me flattois, se

* VARIGNON.

Num. LXXXIX. ce n'est qu'une aveugle envie qui le conduit. C'en est fait, son imagination plus forte & plus vive que celle de ces prétendus sorciers, qui croyent se trouver corporellement au Sabbat, l'a séduit; il se laisse entrainer au torrent de ses vaines conjectures; en un mot, il ne paroit plus donner cours à la raison, ni même en état d'entendre tout ce que je lui en pourrois alleguer. Je l'abandonne donc à ses passions; & je me contenterai de faire voir au Lecteur l'absurdité de ses attaques.

Mon *Frére* avouë qu'il n'a point encore vû mon analyse; cependant il la refute: étrange maniére de refuter! Il s'en forge d'abord une; il me l'attribuë à faux; il y raisonne à perte de vuë; il en déduit des absurdités, des contradictions, & je ne sai quelles niaiseries: il n'en faut pas davantage; il est entêté; il me les impute toutes; ce sont des suites de ma prétenduë Analyse; il en parle dans tout le cours de sa Lettre positivement comme de la mienne, & avec une assurance inconcevable. Quelle témérité! Quelle impudence! de me vouloir imputer à outrance une analyse, qui n'est point la mienne, dont je me défens, & que je désaprouve moi-même. Que veut-il davantage? Voilà toute la force de son attaque abattue: Car je lui nie absolument, que l'analyse, qu'il entreprend de refuter, soit la mienne. Il me semble que j'ai été meilleur prophête que lui, en ce qu'au XV^e^ Journal, pag. 176 * j'ai si bien déviné ses conjectures; mais d'où vient qu'il n'a pas lû cet endroit-là? J'y dis expressément que ma Méthode est directe, géométrique, & telle qu'il la demande; que celle des fluides employée adroitement [& non comme mon *Frére* l'employe] conduit à la même & véritable solution. En vérité, s'il avoit lû sans prévention tout ce que je dis en cet endroit, il se seroit épargné la peine d'écrire tout son galimatias, lequel ne me touche aucunement, & qui n'est pas plus contre moi que contre le grand Turc. Je passe volontiers sous le silence toutes ses grosses expressions, sûr qu'il s'en repentira dès qu'il reviendra à soi. C'est pourquoi je ne m'arrêterai qu'à ce qui m'oblige indispensablement d'y répondre.

On feroit bien mieux de se taire, que de prétendre nous avoir donné quelque ouverture dans cette science. Je crois que ces ouvertures se sont données mutuellement; & si nous voulions entrer en compte, je ne sais à qui on seroit en reste. Je prie seulement mon *Frére* de se ressouvenir à qui il est redevable de la premiére Théorie des chainettes, de laquelle il se sert présentement en Maitre dans toute sa Lettre: les gens qui le savent sauront qu'en penser; ces sortes de reproches sentent trop la vanité.

Mon

* N°. LXXXIV. pag. 825. 826.

Mon *Frére* dit, pag. 830. que *le plaisir qu'il avoit eu d'abord, de voir quelque conformité entre ma solution & la sienne, a été bien-tôt suivi du chagrin de voir son attente frustrée; lorsqu'en ayant examiné toutes les circonstances avec soin, il a trouvé que la solution de son premier & principal Probléme étoit très-défectueuse.* Num. LXXXIX

S'il a eu du plaisir, plûtôt que du chagrin, de voir quelque conformité entre ma solution de son premier Probléme & la sienne, que ne me rend-il donc justice sur ma solution de son dernier Probléme, que j'ai resolu infiniment au delà de sa condition, & même dans les cas qu'il tenoit lui-même pour désesperés? Que ne témoigne-t-il la joye qu'il en a? Qui est-ce qui le rend si muet? Est-ce l'excès du plaisir qui lui lie la langue?

Il est ridicule que mon *Frére* se reserve, pag. 831, dans son intention des conditions qu'il n'a pas exprimées, savoir que *son intention étoit d'inviter les Lecteurs à resoudre ses Problémes, par des principes de pure Géométrie.* Pourquoi n'a-t-il pas ajouté cette condition dès le commencement? Peut-être pour avoir matiére de chicaner ensuite. Si la question est légitimement resolue, que lui importe de quelle méthode on se soit servi? Il a exigé une Solution & non pas une Méthode: ce n'est pas que je n'aye une méthode directe & purement géométrique, qu'il verra un jour; mais il suffit présentement qu'on voye la foiblesse de cette reservation mentale, que les honnêtes gens abhorreront toujours comme des artifices frauduleux. S'il est permis d'en user ainsi, je prouverai sans peine que la solution de ma Brachystochrone, donnée par Monsieur NEWTON, n'est pas légitime; parce qu'il n'y a ni démonstration, ni analyse, parce qu'il l'a tirée peut-être d'un principe méchanique. Il ne me sera pas difficile non plus de faire des conjectures, de forger une analyse fausse; enfin, de démontrer, par l'argument de mon *Frére*, que Monsieur NEWTON n'a rencontré la vérité que par le moyen de deux faussetés qui se redressent mutuellement. Mais je suis de trop bonne foi, pour imputer de telles pauvretés à personne.

Sur la fin de la même page, mon *Frére* se vante qu'*il a resolu tous mes Problémes, & en toutes leurs parties, jusqu'à marquer même un endroit où je pouvois m'être trompé, en prenant des courbes differentes pour une même.* Je le prie de me dire cet endroit, & de me marquer, non où je puis m'être trompé, mais où je me suis trompé en effet. De plus il n'a pas trop à se glorifier, d'avoir satisfait à tous mes Problémes. Dans les *Actes* de *Leipsic*, page 216. an. 1697 (*), il confesse ingénûment, que sa solution d'un de mes Problémes, implique une manifeste contradic-

(*) N°. LXXV. pag. 777.

Num. LXXXIX tradiction : cela s'appelle-t-il resoudre ? S'il n'a point d'autre solution ; je lui en donnerai une légitime, s'il la souhaite, & même par une courbe géométrique ; ou bien qu'il la demande à Monsieur LEIBNITZ, à qui je l'ai communiquée il y a plus d'un an, & qui l'a trouvée fort bonne.

Page 833. Mon *Frére* s'arroge à tort la Théorie de la pression des fluides suivant la perpendiculaire. Il y a long-temps qu'elle a été connuë de Messieurs MARIOTTE, WALLIS, NEWTON, & d'autres, qui ont écrit sur cette matiére ; mais il lui arrive fort souvent de venir *post festum* : C'est ainsi qu'il croyoit être le premier qui pût démontrer, que le Cercle est la plus grande figure de ses isopérimétres, ignorant que PAPPUS l'a déja fait très géométriquement. Il se regardoit aussi comme le premier inventeur des Théorémes pour l'expression des développées dans les Spirales, qu'il se persuadoit m'avoir été inconnus, & long-tems après que Monsieur *le Marquis de* L'HOSPITAL les avoit rendus publics, &c.

Ibid. 41°. Journal du 15 Dec. pag. 481, Edit. de Paris, pag. 765, Edit. de Holl.

Dans l'autre membre de sa Lettre, page 837, mon *Frére* soutient, qu'*il est moralement impossible qu'on arrive à une même fausseté, par deux raisonnemens aussi plausibles & aussi apparens que les siens.* Mais pourquoi n'est-il pas aussi moralement impossible, que je sois arrivé par deux raisonnemens faux à une même vérité ? C'est que le premier l'accommode, pour fortifier ses conjectures.

Je remarque dans ce qui suit, un paralogisme semblable à celui-ci : *Tout caillou est pierre ; Donc toute pierre est caillou* : lors qu'il dit que, *si au lieu de se représenter la courbe dont* $\int x^m dy$ *est un* Maximum, *comme un linge ; & celle dont* $\int (dt : x^m)$ *est un* Minimum *comme une corde, l'on peut tourner la chose, en se servant de la considération de la corde pour celle-là, & du linge pour celle-ci* ; Car il est bien vrai que si $\int (dt : x^m)$ est un *Minimum*, aussi $\int x^m dy$ sera toujours un *Maximum* : mais la converse ne s'ensuit aucunement ; puisque j'ai trouvé par mes analyses directes & indirectes, qu'il y a des courbes où $\int x^m dy$ fait un *plus grand*, sans que pour cela $\int (dt : x^m)$ fasse un *plus petit*. Ce paralogisme de mon *Frére* vient de ce qu'il n'a pas pris garde, que son Probléme des isopérimétres souffre plusieurs solutions ; & c'est pour la seconde fois qu'il choppe contre ce même écueil : Mr. LEIBNITZ lui ayant très bien objecté la même faute, qu'il a déja commise, touchant la courbe Paracentrique, lorsqu'il croyoit qu'il n'y en avoit qu'une. C'est ce qui m'a fait prendre la précaution de dire en general, pag. 824, qu'*on peut toujours trouver une même courbe, pour que* $\int GH dy$ *fasse un* plus grand, *ou un* plus petit, *& pour que* $\int dt : GH$ *fasse réciproquement un* plus petit, *ou un* plus grand : pour marquer que mes Brachystochrones satisfont

toujours aux Isopérimétres ; mais qu'il y a d'autres courbes qui y satisfont aussi, lesquelles ne sont pas des Brachystochrones. Num. LXXXIX

Au commencement de la page 838, il semble que mon *Frére* soit dans la pensée, qu'en faisant $m = 1$, auquel cas on fait que la courbe doit être un cercle pour $\int x\,dy$ *Maximum*, elle ne le soit pas de même pour $\int(dt:x)$ *Minimum*. Cependant je puis prouver par une démonstration synthétique, faite à la maniére des Anciens, sans faire attention ni à son linge ni à sa corde, qu'effectivement le cercle a cette proprieté; que $\int(dt:x)$ soit un *Minimum*. Je ne saurois donc pénétrer ce qu'il veut dire par *la raison du choix*, que je dois avoir tenu dans cette recherche; puisque c'est une même courbe considerée de l'une & de l'autre façon : c'est-à-dire, posant que $\int x\,dy$ soit un *Maximum*, ou que $\int(dt:x)$ soit un *Minimum*. Je ne comprends rien non plus dans tout ce qu'il dit de son linge & de sa corde ; & je puis dire en conscience qu'en découvrant cette belle convenance entre $\int(dt: GH)$ *Maximum*, & $\int GH\,dy$ *Minimum*, ou entre les Problémes des Brachystochrones & Isochrones, je n'ai pas plus songé au chifon de linge & à la corde, dont il fait tant de bruit, qu'aux Lapons. Il devroit donc reconnoitre par cette seule découverte que je fis, que ce n'est ni par hazard, ni par la supposition de deux faussetés, que j'ai rencontré la vérité ; mais que c'est plûtôt parce que j'en posséde la véritable méthode ; & que si dans mon premier écrit il se glissa une faute légére, que je corrigeai si aisément dans le second, ce n'étoit tout au plus qu'une faute de précipitation, qui laisse la méthode sans atteinte. Si je ne proposai cette proprieté dans le premier écrit, que pour la simple puissance de BG, c'est parce qu'il ne s'agissoit que de répondre au Probléme de mon *Frére*, & qu'il n'étoit pas question de pousser ma découverte plus avant. Mais s'il avoit voulu lire ce que je dis à la page 818, où je la donne pour generale, il auroit pû se passer de son injuste *peut-être* & suspendre le jugement qu'il tire de ses fausses conjectures.

Voilà, Monsieur, tout ce que j'ai pû remarquer à la hâte dans la Lettre de mon *Frére* : touchons un peu à l'avis qui la suit immédiatement. Il me reproche d'abord que je me vante de n'avoir *emploïé que trois minutes de temps pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le mystére*. Qu'il prenne la peine de refléchir un peu sur ce que ces Problémes, publiés dans les *Actes de Leipsic* au mois de *Mai* 1697, ne sont venus à ma connoissance que sur la fin du même mois ; que ma Lettre assez longue, écrite à l'Auteur de l'*Histoire des Ouvrages des Savans*, s'y trouve inserée au mois de *Juin* suivant ; que l'Auteur l'a retardée, à cause de la Figure qu'il y faloit faire graver ; & que sans cela ma Lettre auroit paru dès le même mois de *Mai*, ainsi que l'Auteur lui-

Num. LXXXIX lui-même me l'a écrit : combien de temps me restoit-il donc, pour y avoir pû penser ? Si mon *Frére* veut considerer tout cela, il trouvera, sans doute, qu'il n'y a point de gasconade si palpable qu'il semble penser dans ce que j'ai dit ; du moins il verra qu'il s'en faut bien que je n'y aye employé les trois mois qu'il m'avoit accordés. Mais ce sont choses differentes, que d'inventer une méthode, & la mettre en pratique, ou d'en faire le calcul : il est quelquefois facile de trouver une méthode, dont l'analyse devient pourtant très-pénible & très-prolixe. Je dis donc à mon *Frére* que j'ai bien repassé, & plus d'une fois, sur ma méthode, parce qu'il s'agit là d'examiner s'il n'y a point de faux raisonnement, mais de repasser sur la solution ou sur l'analyse, comme c'est l'affaire d'un écolier que d'examiner s'il n'y a point de faute de calcul, il n'est pas besoin que je m'en mette en peine, me fiant entiérement à ma méthode ; outre que je soutiens, comme tout le monde le peut voir, que ce qui concerne l'arc BF n'est qu'une partie disjonctive, & non copulative de ce qu'il a demandé. Mais qu'il examine bien sa solution ; peut-être que si elle est differente de la mienne, [ce que je ne sais pas encore] c'est elle qui est fausse : il n'est pas infaillible. Il commence dans cet Avis d'admettre tout ; il n'y a plus que l'égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ qui lui fasse de la peine. Si par hazard sa solution touchant la simple puissance de l'arc BF ou de t, consiste en cette égalité $a^m y = t^{m+1}$, laquelle donneroit une construction de la courbe fort aisée ; qu'il sache que sa solution seroit absolument fausse. Quoi qu'il en soit, j'ai bien de la joye de ce qu'enfin il veut bien accepter l'arbitrage de Mr. LEIBNITZ ; je suis aussi content de celui de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL, & de celui de Mr. NEWTON : s'il avoit accepté plûtôt cet expédient, il auroit pû éviter bien d'inutiles débats. Il y a long-temps que j'ai envoyé en dépôt à Mr. LEIBNITZ toutes mes solutions avec mon analyse, * & mes méthodes tant directes qu'indirectes, lesquelles il a fort approuvées & louées ; bien loin d'y trouver ces sortes de faussetés, qui en se redressant font rencontrer la vérité. Je prie donc mon *Frére* d'envoyer aussi incessamment les siennes, tant méthode que solution & analyse, à Mr. LEIBNITZ, lequel les rendra publiques toutes à la fois, afin que nos Lecteurs, sur tout Messieurs nos Juges, puissent les confronter, les examiner, & en juger. Demeurons-en là donc, & que mon *Frére* se taise jusqu'à-ce que nos solutions & nos méthodes aient paru : aussi n'accepterai-je plus rien de lui, à moins qu'il n'ait livré les siennes à Mr. LEIBNITZ, & qu'elles soient publiées avec les miennes en même temps, & en même lieu. La justice demande aussi que son ami inconnu remette le prix entre les mains

* Voiez le N°.

mains de quelqu'un de nos Juges; & il le fera, s'il eſt homme de bien Num.
& d'honneur. J'ai déja dit, & je le dis encore, que je n'y prétends LXXXIX
rien; mais les pauvres y prétendent.

Quant aux nouveaux Problémes, que je lui ai propoſés, mon *Frére* dit que cet Inconnu eſt homme à les reſoudre, & me conſeille [ſi je ſuis ſage] d'en demeurer là, & de ne le pas pouſſer davantage. Je ſuis obligé à mon *Frére* de ce conſeil : mais il me permettra de dire, que cet Inconnu [quel qu'il ſoit] eſt très peu ſage de n'avoir pas accepté un défi auſſi avantageux pour lui que le mien, s'il eſt vrai qu'il ſoit ſi habile homme, & qu'il en ait déja trouvé les ſolutions, comme mon *Frére* nous l'aſſure.

P. S. *Du 4 Octobre, reçu entre le 14 & le 20.*

Comme je n'ai jamais ſoutenu, que *la figure d'entre les Iſopérimétres, dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe, & celle d'un linge rempli de liqueur, ſoient une même figure*; Je ne vois pas pourquoi mon *Frére* s'écrie en l'air, & s'efforce tant pour prouver leur diverſité : cependant il ne m'a pas falu tant de loiſir pour trouver celle-là; la voici cachée [à l'exemple de mon *Frére*] ſous cette anagramme.

$$a^{8}\ b\ c^{2}\ d^{3}\ e^{8}\ i^{7}\ l^{2}\ m\ o^{2}\ p^{2}\ q^{3}\ r^{5}\ s^{7}\ t^{6}\ v^{9}\ x^{2}\ y.$$ †

Dont je donnerai la clef après la déciſion de nôtre differend, quand mon *Frére* aura donné la ſienne. Pour cet effet, [à moins que mon *Frére* ne veuille faire trainer ce procès en longueur,] il me ſemble qu'il vaudroit mieux le remettre au ſeul arbitrage de Mr. LEIBNITZ, ou d'un autre, ſi ce grand homme, tout déſintéreſſé qu'il eſt, lui paroit ſuſpect. Pour lui ôter toute excuſe & tout ſoupçon de colluſion, je m'engage à deux choſes très-avantageuſes pour lui : la premiére, que je m'en tiendrai à la déciſion de Mr. LEIBNITZ, quand même il décideroit contre moi : la ſeconde, qu'en cas qu'il décidât en ma faveur, & que mon *Frére* ne s'en trouvât pas ſatisfait, je lui permettrai d'en appeller au jugement de Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL & de Mr. NEWTON, tant s'en faut que je les recuſe. Voilà deux articles que mon *Frére* acceptera infailliblement, s'il ne craint déja pour ſa cauſe. N'eſt-ce pas aſſez de condeſcendance, que de me priver de mon droit d'appeller pour le ceder entiérement à mon *Frére*?

† Le ſens de cette anagramme eſt celui-ci : *Si ſpatium curvæ quæſitæ vocetur* r, *erit poſitis* dt *æqualibus* dy *æquale* x ſ r d x.

Nº. XC.

POSITIONUM
DE
SERIEBUS INFINITIS,
EARUMQUE USU
In quadraturis Spatiorum & rectificationibus Curvarum,

PARS QUARTA,

Quam

Præside

JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P.

defendit

NICOLAUS HARSCHERUS Magist. Cand.
Ad diem 16 Decemb. M. DC. XCVIII.

Edita primum
BASILEÆ,
1698.

POSITIONUM No. XC.

DE

SERIEBUS INFINITIS

Pars Quarta.

PROP. XLVII.

D*ATO Numero invenire Logarithmum per seriem* [Fig. 1].

Intelligatur super axe SAσ curva quædam CBx, ejus naturæ, ut abscissæ AR, AS [Aρ, Aσ] crescant arithmetice, dum applicatæ RE, SC [$\rho\epsilon$, σx] crescunt vel decrescunt geometrice, hoc est, ut istæ sint ut Numeri, dum illæ sunt ut Logarithmi. Vocabitur hæc Curva *Logarithmica*, cujus hæc est proprietas, ostenden-

No. XC. te Acut. LEBNITIO in *Act. Lipſ.* 1684, p. 473, ut Subtangentes ejus omnes AK, RN, ρν ſint æquales. Applicetur in A recta AB, & ſumto quovis in curva puncto E [ε], ducatur recta EI [ει] parallela axi SA; voceturque AB, 1; BI [Bι], x; adeoque AI [Aι], ſeu RE [ρε], $1 \mp x$; nec non AR [Aρ] y, & conſtans curvæ ſubtangens b. Dato itaque numero RE [ρε] ejus logarithmus AR [Aρ] ſic invenitur. Quoniam ex natura generali curvarum, elementum applicatæ EF [εφ] dx, eſt ad elementum abſciſſæ FG [φγ] dy, ſicut applicata RE [ρε] $1 \mp x$, ad curvæ ſubtangentem RN [ρν] b, habebitur $dy = b\,dx : (1 \mp x) =$ [tractione in ſeriem reſoluta per XXXVI & XXXVIII] $bdx \pm bxdx + bxxdx \pm bx^3dx + bx^4dx \pm bx^5dx$ &c. ideoque facta ſummatione, y, hoc eſt, AR [Aρ] $= bx \pm \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5 \pm \frac{1}{6}bx^6$ &c. quæ inſuper in caſu ſpeciali BI [Bι] = BA = BD, ſeu $x = 1$, fit $b \pm \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b \pm \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}b \pm \frac{1}{6}b$ &c.

COROLL. 1. Identitas hujus Seriei cum illa, quam ſupra Prop. XLII*, pro ſpatio Hyperbolico quadrando reperiimus, de mutua dependentia & affinitate inter Hyperbolam & Logarithmos nos admonet, perſpicuumque facit, quod ſumtis in utraque Fig. 1ª. Nº. LXXIV & 1ª. hujus, ipſis BI [Bι] æqualibus, ſpatium Hyperbolicum CBIO [CBιω] æquetur rectangulo ſub unitate AB & logarithmo AR [Aρ]. Unde porro infertur, quod ſumtis utrobique AB, Aι, AD, hoc eſt, AB, ρε, σα continue proportionalibus, quo caſu ex natura Logarithmicæ Aσ dupla fiet ipſius Aρ, ſpatium Hyperbolicum CBDQ duplum quoque ſit ipſius CBιω, indeque CBιω, ωιDQ ſpatia futura ſint æqualia.

COROLL. 2. Quoniam evidens eſt, exiſtente BI = AB, hoc eſt, evaneſcente AI ſeu RE, logarithmum AR reddi infinitum; ſequitur & ſeriem harmonicam logarithmum hunc exprimentem, $b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}b$, &c. talem eſſe; unde denuo veritas Prop XVI † conſtat.

COROLL.

* Pag. 755, & ſeq.

† Nº. XXXV. pag. 392. ſeq.

COROLL. 3. Dato quovis logarithmo, puta binarii, determinari potest ex illo curvæ subtangens b; cum enim posita $BD = 1 = AB$, adeoque $AD = \sigma x = 2$, ostensum sit $A\sigma$ log-mum binarii esse $= b - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}b$ &c. $= b$ in $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ &c.$)$ erit vicissim $b =$ Log. $2 : (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ &c.$)$ (*). No. XC.

XLVIII.

Dato Sinu complementi reperire Logarithmum Sinus recti per seriem.

In eadem Figura, centro A per B descriptus esto circuli quadrans $BH\sigma$, quem producta EI secet in H, erit AI, seu RE, sinus arcus $H\sigma$, & AR ejus logarithmus, existente videlicet radii AB, ceu unitatis, logarithmo $= 0$. Ponatur sinus complementi $IH = x$, ut fiat sinus rectus AI, seu RE, $= \sqrt{(1 - xx)}$, ejusque elementum $EF = -xdx : \sqrt{(1 - xx)}$, erit, ex natura generali curvarum, EF $[-xdx : \sqrt{(1 - xx)}]$ ad FG, elementum log-mi AR; ut RE $[\sqrt{(1 - xx)}]$ ad subtangentem logarithmicæ RN, quæ sit 1; adeoque $FG = -xdx : (1 - xx) =$ [per XXXVI.] $-xdx - x^3dx - x^5dx - x^7dx$ &c. Quare summando, fient omnia FG, seu log-mus $AR = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{10}x^{10}$, &c. negativus scilicet, quia numerus ejus RE minor est unitate AB; at si fiat positivus $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{8}x^8$ &c. hoc est, si AR transferatur ex altera parte in $A\rho$, erit is proprie logarithmus rectæ $\rho\sigma$, id est [ex natura log-morum] tertiæ proportionalis ad ipsum sinum RE & radium AB; qui tamen log-mus immediate quoque reperiri potuisset ex valore numeri sui $\rho\sigma = 1 : \sqrt{(1 - xx)}$.

Idem etiam D. LEIBNITIUS *Act. Lips.* 1691, p. 180, eleganter hoc modo:

(*) Atque hinc supputare licet subtangentem Logarithmicæ, ad quam constructæ sunt Tabulæ vulgo extantes, seu Tabulæ Logarithmorum *Briggianorum*, esse 0. 43429448 1903, &c. posito Logarithmo denarii $= 1$.

No. XC.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Log.}(1-x) = -y = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \text{ \&c.} \\ \text{Log.}(1+x) = +y = +x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \text{ \&c.}\end{array}\right\} \text{per præc.}$$

Log $(1-xx)$ = [ex nat. log.]

$$\text{Log.}(1-x) + \text{log.}(1+x) = -x^2 \quad -\tfrac{1}{2}x^4 \quad -\tfrac{1}{3}x^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{Log.}\sqrt{(1-xx)} = \tfrac{1}{2}\text{log.}(1-xx) = -\tfrac{1}{2}x^2 \quad -\tfrac{1}{4}x^4 \quad -\tfrac{1}{6}x^6 \text{ \&c.}$$

COROLL. Posito sinu complementi HI hujus fig. = BI vel B*ι* fig. 1ª Ni. LXXIV, æquabitur rectangulum sub logarithmo sinus recti AR & radio AB, dimidio excessui, quo spatium Hyperbolicum CBIO superat alterum CB*ιo*. Patet ex Cor. 1. XLII *, ubi CBIO — CB*ιo* serie præsentis dupla expressum legitur. Cæterum moneri potuisset ibi, quod sumta z tertia proportionali ad 1 & x, seu posita $z = xx$, series illa convertatur in aliam $z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4$, &c. qua quoque spatium Hyperbolicum, puta CBGM, existente BG $= z$ vel xx, innuitur. Hinc enim patet, quod CBIO — CB*ιo* = CBGM; & CBIO — CBGM seu MGIO = CB*ιo*; adeoque [cum his positis, AI $(1-x)$ sit ad AG $(1-xx)$ sicut AB (1) ad A*ι* $(1+x)$], quod sumtis AI, AG, AB, A*ι* utcunque proportionalibus, spatia segmentis IG, B*ι* insistentia semper futura sunt æqualia.

XLIX.

Applicatam curvæ Catenariæ exhibere per seriem.

Esto Curva $\mu B\lambda$, quam Catena ab extremitatibus suis libere suspensa proprio pondere format, dicta *Catenaria*; cujus centrum A; vertex B, axis ABD, parameter AB = 1, abscissa A*ι* $= z$, & applicata $\iota\lambda$ vel $\iota\mu = y$. Constat ex iis, quæ *Act. Lips.* 1691, p. 274, &c. (b) hac de curva memoriæ prodita leguntur, elemen-

* Pag. 757.

(b) Ostensum est No. XXXIX. pag. 426, posita AB $= a$, & B*ι* $= x$, esse $dy = a\,dx : \sqrt{(xx + 2ax)}$. Pro B*ι* [$x$] scribe A*ι* — AB [$z - a$], & erit $dy = a\,dz : \sqrt{(zz - aa)} = dz : \sqrt{(zz - 1)}$ ubi statuitur $a = 1$.

mentum applicatæ dy esse $= dz : \sqrt{(zz - 1)}$. Hinc ad tollendam surditatem pono $\sqrt{(zz - 1)} = t - z$; unde fit $z = (tt + 1) : 2t$, $dz = (tt - 1) dt : 2tt$, $\sqrt{(zz - 1)} = t - z = (tt - 1) : 2t$, ac denique $[dy]\ dz : \sqrt{(zz - 1)} = dt : t$. Quam porro fractionem ut in seriem convertam, facio denominatorem bimembrem, substituendo $1 + x$ loco t, & dx loco dt; eritque $dt : t$ seu $dy = dx : (1 + x) =$ [per XXXVII] $dx - xdx + xxdx - x^3dx + x^4dx$ &c. unde omnia dy, seu y, $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Quoniam autem $z = (tt + 1) : 2t$, hoc est, $tt = 2zt - 1$, & t seu $1 + x = z + \sqrt{(zz - 1)}$, prodibit $x = z - 1 + \sqrt{(zz - 1)} =$ [facta $\iota D = \sqrt{(zz - 1)}$] $B\iota + \iota D = BD$; igitur data $A\iota$, z, dabitur BD, x, indeque $\iota\lambda$, seu y, per seriem. No. XC.

COROLL. Ex serie inventa collata cum Prop. XLVII, liquet, y esse logarithmum numeri x; unde data Logarithmica $\varkappa BC$, cujus subtangens $= AB = 1$, puncta Catenariæ reperire proclive. Cum enim z, hoc est, $A\iota$ vel $\sigma\lambda$ $[S\mu] = (tt + 1) : 2t = \frac{1}{2}t + 1 : 2t$, patet, abscissis hinc inde logarithmis æqualibus $A\sigma$ $[AS]$ ordinatam Catenariæ $\sigma\lambda$ $[S\mu]$ semissem esse oportere summæ duarum ab AB æquidistantium ordinatarum Logarithmicæ $\sigma\varkappa$ & SC, quarum illa $= AD = t$, hæc ex natura Logarithmicæ $= 1 : t$. Atque in hoc ipso consistit elegantissima hujus Curvæ constructio *Leibnitiana*, quam videsis in *Act. Lips.* 1691, p. 277, seqq.

L.

Datis Latitudine loci alicujus in curva Loxodromica & angulo Rhumbi cum Meridiano; exhibere Longitudinem loci per seriem. [Fig. 2.]

Lineam Rhumbicam seu Loxodromicam vocant Nautæ, quam navis secundum eundem venti rhumbum constanter incedens in superficie Globi Terr-aquei describit; adeoque curva est, quæ omnes Meridianos eodem angulo obliquo interseçat. Incipit hæc in Æquatore, indeque versus alterutrum Polorum oblique recedendo, tandem in ipsum Polum, quem infinitis gyris ambit, desinit.

No. XC. Sunto in Fig. 2. sinus totus, idemque & radius Æquatoris, AC $= 1$, BCD Meridianus, B & D Poli, tangens anguli rhumbici $= t$, H punctum in Loxodromica, ejus Latitudo HC, sinus Latitudinis AE, & sinus complementi HE, qui vocetur z, Longitudo vero seu arcus Æquatoris inter Meridianum loci H & principium Loxodromicæ interceptus dicatur x. His positis, per illa quæ in *Act. Lips.* 1691, p. 284, * ostensa sunt, invenitur elementum Longitudinis $dx = -t\,dz : z\sqrt{(1 - zz)}$; ad cujus tentandam reductionem pono primo $z = 1 : p$, unde fit $dz = -dp : p^2$, $dz : z = -dp : p$, $\sqrt{(1 - zz)} = \sqrt{(pp - 1)} : p$, & denique $[dx] - t\,dz : z\sqrt{(1 - zz)} = t\,dp : \sqrt{(pp - 1)}$. Porro quidem memini, ejusdem formæ fuisse elementum Catenariæ in præcedente: pergo ponere sicut ibi, $\sqrt{(pp - 1)} = p - q$ indeque elicio $[dx]\ t\,dp : \sqrt{(pp - 1)} = -t\,dq : q$, ac rursum statuendo $q = 1 - r$ tandem obtineo $[dx] - t\,dq : q = t\,dr : (1 - r)$; quæ quidem quantitas etiam immediate elici potuisset ex quantitate $-t\,dz : z\sqrt{(1 - zz)}$, si statim fecissem $z = (2 - 2r) : (2 - 2r + rr)$; at in tales hypotheses incidere sæpenumero difficile est, nisi jam usu compertum habeatur, quæ formulæ in quas transformari possint. Nota, $r = AC - BI$, excessui nempe radii supra tangentem semissis complementi Latitudinis puncti H; etenim supposita $BI = 1 - r$, ductaque recta BH, cum similia sint triangula HEB, ABI, erit HE $[z]$ ad EB $[1 - \sqrt{(1 - zz)}]$ ut AB $[1]$ ad BI $[1 - r]$; unde resultat $z = (2 - 2r) : (2 - 2r + rr)$, ut oportet. Conversa autem, per XXXVI inventa quantitate $t\,dr : (1 - r)$ in seriem, habetur $dx = t\,dr + tr\,dr + trr\,dr + tr^3\,dr$ &c. & facta summatione $x = tr + \frac{1}{2}trr + \frac{1}{3}tr^3 + \frac{1}{4}tr^4$ &c. Patet igitur, quomodo ex data tangente semissis complementi Latitudinis inveniatur Longitudo.

Sciendum autem, elementum Longitudinis $-t\,dz : z\sqrt{(1 - zz)}$ adhuc aliter posse reduci, statuendo nempe $\sqrt{(1 - zz)} = y$; hinc enim fit $z = \sqrt{(1 - yy)}$, $dz = -y\,dy : \sqrt{(1 - yy)}$ & $[dx] - t\,dz : z\sqrt{(1 - zz)} = t\,dy : (1 - yy) =$ [per XXXVI]

* No. XLII. pag. 444. & seq.

XXXVI] $tdy + tyydy + ty^4dy + ty^6dy$ &c. ac denique omnia dx, No. XC.
seu $x = ty + \frac{1}{3}ty^3 + \frac{1}{5}ty^5 + \frac{1}{7}ty^7$ &c. ubi perspicuum est, y seu $\sqrt{(1 - zz)} =$ AE sinui recto arcus HC; unde constat ratio definiendi etiam quæsitum ex sinu recto Latitudinis, quemadmodum fecit Dn. LEIBNITIUS *Act. Lipſ.* 1691, p. 181. Et patet, si in calculo, per quem ad initio memoratam æquationem $dx = -tdz : z\sqrt{(1 - zz)}$ perveni, loco quantitatis indeterminatæ ipsum sinum rectum AE præ sinu complementi HE selegissem, me statim ad alteram æquationem immediate in seriem convertibilem $dx = tdy : (1 - yy)$ perventurum fuisse. Cæterum ex eo, quod duæ inventæ series eandem quantitatem x denotant, obiter concludimus, quod si in circulo sinus cujuslibet arcus AE dicatur y, & AC — BI excessus radii supra tangentem semissis complementi vocetur r, perpetuo futurum sit $y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5$ &c. $= r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3$ &c. Notamus etiam, si locus H sit in ipso Polo, quo casu $r = 1 = y$, fore $x = t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{5}t + \frac{1}{7}t$ &c. vel $= t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t$ &c. quarum serierum summæ, cum sint infinitæ per XVI, docent Longitudinem loci H quoque infinitam esse, adeoque, quod dixi, curvam Loxodromicam infinitis Polum gyris ambire, priusquam in ipsum incidat.

COROLL. 1. Si in eadem Loxodromica, præter locum H, alius sit locus notæ Latitudinis, cujus sinus rectus $= v$, & excessus radii supra tangentem semissis complementi $= s$, erit similiter ejus longitudo $= t \times (v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ &c.) vel $= t \times (s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3$ &c) adeoque differentia longitudinum utriusque loci erit utriusque seriei differentia, nempe $t \times (y \backsim v + \frac{1}{3}(y^3 \backsim v^3) + \frac{1}{5}(y^5 \backsim v^5)$ &c.) vel $t \times (r \backsim s + \frac{1}{2}(r^2 \backsim s^2) + \frac{1}{3}(r^3 \backsim s^3)$ &c.). Hinc si in alia quadam Loxodromica duo concipiantur loca Latitudine cum prioribus convenientia, erunt, manentibus y & v, vel r & s iisdem, differentiæ Longitudinum ut tangentes angulorum, quos Rhumbi faciunt ad Meridianos. Vid. *Act. Lipſ.* 1691, p. 182, & 185 *.

COROLL. 2. Ex collatione harum serierum cum seriebus Propp-

* N°. XLII, pag. 445.

No. XC. Propp. XLII †, XLVI *, & XLVII, liquet Problematis convenientia cum quadratura Hyperbolæ & logarithmis. Speciatim notamus, quod existente subtangente Logarithmicæ $= t$, quæsita Longitudo puncti H sit ipse logarithmus rectæ $1 - r$, seu BI, ut patet ex XLVII; vel etiam [cum D. LEIBNITIO loc. cit.] semissis Log-mi quantitatis $(1 + y) : (1 - y)$, seu DE : EB, quod sic ostenditur:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Log.}(1+y) = +ty - \tfrac{1}{2}tyy + \tfrac{1}{3}ty^3 - \tfrac{1}{4}ty^4 + \tfrac{1}{5}ty^5 - \tfrac{1}{6}ty^6 \,\&c. \\ \text{Log.}(1-y) = -ty - \tfrac{1}{2}tyy - \tfrac{1}{3}ty^3 - \tfrac{1}{4}ty^4 - \tfrac{1}{5}ty^5 - \tfrac{1}{6}ty^6 \,\&c.\end{array}\right\}\text{per XLVII.}$$

$$\text{Log.}((1+y):(1-y)) =$$

$$\text{Log.}(1+y) - \text{log.}(1-y) = 2ty + \tfrac{2}{3}ty^3 \quad + \tfrac{2}{5}ty^5, \&c.$$

COROLL. 3. Data Longitudine & Latitudine loci, dabitur angulus rhumbi cum Meridiano; cum enim $x = t \times (r + \frac{1}{2}rr + \frac{1}{3}r^3 \,\&c.) = t \times (y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \,\&c.)$ erit $t : 1 = x : r + \frac{1}{2}rr + \frac{1}{3}r^3$ &c. vel $y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5$, &c. id est, tangens anguli quæsiti ad sinum totum, ut arcus longitudinis ad log-mum BI, vel semissem log-mi (DE : EB); adeoque per *Coroll.* 1 hujus, ut differentia duarum longitudinum ad differentiam duorum Log-morum BI, vel semi-differentiam duorum DE : EB. Intellige hic logarithmos acceptos in Curva, cujus subtangens = radio = 1. Nota, si desideretur angulus Loxodromicæ, quæ non nisi post unam pluresve integras revolutiones in datum locum perducat, augendus est arcus differentiæ Longitudinum integra peripheria Æquatoris ejusve multiplo.

SCHOLION. Ex hactenus dictis expeditus habetur modus construendi *Scalam* quandam *Loxodromicam*: Esto in Fig. 1 huj. BMσ circumferentia Æquatoris in gradus suos & graduum minutias divisa; hæc extendatur in rectam AS axem Logarithmicæ CBx, ejusque divisionibus ordine ab A adscribantur gradus Longitudinum:

† Pag. 755. seq. * Pag. 762. seq.

dinum: tum sumto indefinite in circumferentia hac puncto M, bisectoque arcu Mσ per rectam AT occurrentem tangenti σκ in T, ducatur ex T recta TE axi AS parallela, secans Logarithmicam in E; ac denique ex E demittatur in axem perpendicularis ER; punctoque R adscribatur numerus graduum in arcu BM: sic habebuntur etiam gradus Latitudinum; parataque erit Scala Loxodromica, quæ primario inserviet rhumbo, cujus anguli tangens æquatur subtangenti Logarithmicæ (c). Numeri enim graduum cujusvis datæ Latitudinis in Scala statim a latere aspectui offerunt respondentes Longitudinis gradus. Eadem tamen etiam cuilibet rhumbo prodesse poterit, si fiat per *Coroll.* 1 hujus, ut subtangens Logarithmicæ, e qua Scala constructa est, ad anguli rhumbici tangentem, sic Longitudo vel differentia Longitudinum per Scalam inventa ad Longitudinem vel differentiam Longitudinum quæsitam (d): adeo ut Scala ejusmodi in usum Nauta- No. XC.

(c) Nam, quia $dx = tdr : (1-r)$, seu $x : t = -\log.(1-r)$, vel $N(x:t) = 1-r$, ubi x est arcus longitudinis, & $1-r$ tangens semissis complementi latitudinis, veluti σT vel RE, si latitudo sit BM; erit, posita t tangente anguli rhumbici æquali subtangenti logarithmicæ, $Nx =$ RE. Sed RE numerus est cujus AR logarithmus. Igitur AR $= x =$ arcui longitudinis respondentis latitudini BM. Itaque ascribatur puncto R numerus graduum arcus BM, & habebitur Scala loxodromica pro rhumbo, cujus anguli tangens t æqualis est subtangenti logarithmicæ.

(d) Quamobrem Canon jam supputatus Tangentium artificialium, seu Logarith. Tangent. erit Scala loxodromica numerica, pro angulo rhumbico, cujus tangens est 0.4342944; hæc enim est subtangens logarithmicæ ad quam computatus est Canon *Briggianus* (Not. a, pag. 853). Sed unitates hujus Canonis sunt radii partes centies centum millesimæ, seu 0.0000001. Quamobrem si velis unitates exprimere gradus, [sic enim partes peripheriæ exprimi solent], aut quod satius est, si velis Tangentes artificiales, resectis ad dextram quinque notis, exprimere gradus, quoniam gradus unus est radii pars 0.00174533 &c. augenda est Tangens anguli rhumbici 0.4342944, in ratione 0.001 ad 0.00174533 &c. & habebis 0.7579869, quæ tangens est anguli 37°. 9'. 42". At si velis, quod magis usitatum est, Tangentes artificiales, resectis ad dextram quatuor notis, exprimere minuta

No. XC. Nautarum Circino proportionis insculpta, & lineæ partium æqualium, quæ Longitudinum gradus repræsentarent, juxta posita, Instrumentum foret omnium forsan, quæ Nautæ hactenus tractarunt, compendiosissimum & utilissimum. Sed de his satis. (d).

MONITUM.

ANTEQUAM pergamus, Lector advertere potest, quod hucusque in differentialium summatione pro quovis elemento semper ejus integrale purum seu absolutum substituimus, velut x *pro* dx, $\frac{1}{2}$xx *pro* xdx *&c. At scire ipsum volumus, hoc minime esse perpetuum; quanquam enim una eademque quantitas* x *non nisi unum habeat differentiale* dx, *idem tamen differentiale* dx *infinita habet integralia, unum quidem purum* x, *reliqua admistione quantitatum constantium affecta* x + a, x — b *&c. quorum in summationis negotio, pro re nata, nunc hoc, nunc illud seligendum est, neque adeo sine præsenti hallucinationis periculo indiscriminatim semper purum adsumi potest. Restat itaque, ut ad vitandum scopulum, quem communem fere esse video omnibus iis, qui calculum hunc incautius tractant, subjiciamus adhuc ejus rei exemplum in uno alterove Problemate, e cujus enodatione Lectori constare possit, undenam, & quibus criteriis dignoscatur, quid pro quovis semper elemento summando substitui conveniat.*

L I.

Exhibere longitudinem Curvæ Parabolicæ per seriem. [Fig. 3.]

Fingamus BCD curvam esse Parabolam, cujus vertex B, axis BG, latus rectum $= a$, abscissa BG $= x$, applicata GD $= y$, ipsa BCD curva $= s$; proinde elem. FG vel CH $= dx$, DH $= dy$, & CD $[\sqrt{(dx^2 + dy^2)}] = ds$. Erit ex natura curvæ

nuta prima longitudinum; quoniam minutum unum est radii pars 0.0002908882 &c. augenda est tangens anguli rhumbici 0.4342944 in ratione 0.0001 ad 0.000290882 &c. & ea fiet 1.2633114 &c. quæ tangens est anguli 51°. 38'. 9".

(d) Vide Num. sequentem.

curvæ $ax = yy$; hinc differentiando $adx = 2ydy$, quadrandoque No. XC. $aadx^2$ [$aads^2 - aady^2$] $= 4yydy^2$, & facta tranſpoſitione $aads^2 = aady^2 + 4yydy^2$, extractaque tandem radice $ads = dy\sqrt{(aa + 4yy)}$, quæ quantitas eſt, de qua ſummanda agitur. Ad ſurditatem primo eliminandam pono $\sqrt{(aa + 4yy)} = z - 2y$, fiet $aa = zz - 4zy$, & $y = (zz - aa) : 4z$; hinc $dy = (zz + aa) dz : 4zz$, nec non [$z - 2y$] $\sqrt{(aa + 4yy)} = (zz + aa) : 2z$, adeoque [$ads$] $dy\sqrt{(aa + 4yy)} = (z^4 + 2aazz + a^4) dz : 8z^3$ = [membris ſeparatim poſitis] $\frac{1}{8}zdz + \frac{1}{4}aadz : z + \frac{1}{8}a^4dz : z^3$, de quorum nunc ſummis diſpiciendum. Hunc in finem conſidero relationem, quam habet aſſumta litera indeterminata z ad ordinatas curvæ noſtræ, eamque, ex facta hypotheſi $\sqrt{(aa + 4yy)} = z - 2y$, cognoſco talem eſſe, ut exiſtente $y = 0$, z non pariter evaneſcat, ſed ſit $= a$, & quod creſcente y eo fortius creſcere debeat z; quapropter extenſa concipiatur ipſa z in recta EK a puncto E, & ſit prima EA, quæ naſcenti y reſpondet, $= a$, ultimaque z, quæ reſpondet ultimæ y, ſeu applicatæ GD, eſto EK. Tum fluere intelligatur ab A ad K indefinita recta AL vel KM, æqualis ubique $\frac{1}{16}zz$ [integrali ſcilicet puro primi membri $\frac{1}{8}zdz$], minimaque adeo in A & $= \frac{1}{16}aa$; ſic ipſum fluentis lineæ incrementum fiet $\frac{1}{8}zdz$, & omnia incrementa quæ capit linea, dum ex A movetur in K, repræſentabunt omnia $\frac{1}{8}zdz$, quæ ordinatis y a minima [o] ad ultimam [GD] ordine reſpondent, hoc eſt quæ pertinent ad curvæ parabolicæ portionem rectificandam BD. Conſtituunt autem omnia illa incrementa, ut liquet, non integram KM [$\frac{1}{16}zz$] ſed exceſſum tantum ejus ſupra rectam AL [$\frac{1}{16}aa$] hoc eſt, KM — AL ſeu $\frac{1}{16}(zz - aa)$. Integrale igitur primi membri $\frac{1}{8}zdz$, quod huc quadrat, eſt $\frac{1}{16}(zz - aa)$. Similiter pro integrando tertio membro $\frac{1}{8}a^4dz : z^3$, fingo z extendi in recta NP a puncto N, primamque quæ naſcenti y reſpondet eſſe NO $= a$, & quæ reſpondet ultimæ, NP; hinc fluere concipio ab O verſus P quantitatem $\frac{1}{16}a^4 : zz$, ceu integrale purum ipſius $\frac{1}{8}a^4dz : z^3$, puta rectam OR vel PQ, quæ proin maxima erit in O & $= \frac{1}{16}aa$, indeque verſus P decreſcet; decrementa itaque, quæ patitur linea

No. XC. OR, quousque pervenit in PQ, denotabunt omnia elementa $\frac{1}{8}a^4dz:z^3$, quæ portioni curvæ parabolicæ BD respondent: sed omnia illa decrementa, ut apparet, non efficiunt rectam PQ seu $\frac{1}{16}a^4:zz$, verum potius OR — PQ seu $\frac{1}{16}aa - \frac{1}{16}a^4:zz$; quapropter integrale tertii membri $\frac{1}{8}a^4dz:z^3$ huc pertinens $= \frac{1}{16}(aa - a^4:zz)$, summaque adeo primi & tertii $[\int\frac{1}{8}zdz + \int(\frac{1}{8}a^4dz:z^3)] = \frac{1}{16}(zz - aa) + \frac{1}{16}(aa - a^4:zz) = \frac{1}{16}(z^4 - a^4):zz$.

Restat intermedium adhuc membrum expediendum $\frac{1}{4}aadz:z$. Hoc cum absolute summari nequeat, in seriem converto, ponendo prius $z = a + t$, ut denominator fiat bimembris; hinc enim fit $\frac{1}{4}aadz:z = \frac{1}{4}aadt:(a+t) =$ [per XXXVII] $\frac{1}{4}adt - \frac{1}{4}tdt + \frac{1}{4}ttdt:a - \frac{1}{4}t^3dt:aa$ &c. & facta summatione, $\int(\frac{1}{4}a^2dz:z) = \frac{1}{4}(at - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3:a - \frac{1}{4}t^4:a^2 + \frac{1}{5}t^5:a^3$ &c.) Nota, quod hic pro quolibet seriei termino substituam ejus integrale purum, quoniam ex æquatione $z = a + t$ colligo, quod existente $z = a$ [hoc est $y = 0$], ipsa t, ut & quantitates fluentes omnes, $\frac{at}{4.1}$, $\frac{tt}{4.2}$, $\frac{t^3}{4.3a}$ &c. quoque sint $= 0$, id est, quod hæ a o fluere seu incrementa sumere occipiant; hinc enim manifeste liquet, omnia ipsarum crementa, nempe omnia $\frac{1}{4}adt$, $\frac{1}{4}tdt$ &c. ipsis quantitatibus ultimis $\frac{1}{4}at$, $\frac{1}{8}tt$ &c. æqualia fore. Quod idem quoque, si quis examinet, in omnibus præcedentium Propp. exemplis contingere observabit, indeque concludet, recte a nobis factum, quod ibidem inter summandum pura semper integralia assumserimus, tametsi ejus rei rationem diserte non adjecerimus. Sed revertamur ad propositum: Inventa summa medii membri $\frac{1}{4}aadz:z$, si reliquorum summæ supra repertæ adjiciantur, emergit summa omnium $\int\frac{1}{8}zdz + \int(\frac{1}{4}aadz:z) + \int(\frac{1}{8}a^4dz:z^3)$, hoc est, $as = \frac{1}{16}(z^4 - a^4):zz + \frac{1}{4}(at - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3:a - \frac{1}{4}t^4:a^2$ &c.) & facta divisione per a, longitudo curvæ s seu BD $= \frac{1}{16}(z^4 - a^4):azz + \frac{1}{4}(a - \frac{1}{2}tt:a + \frac{1}{3}t^3:a^2 - \frac{1}{4}t^4:a^3$ &c.) quæ denique posita $a = t = 4$, & $z = a + t = 8$, fit $\frac{15}{16} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. unde cum sit hoc casu $y = \frac{1}{4}(zz - aa):z = \frac{3}{2}$, & $x = yy:a = \frac{9}{16}$, sequitur, quod existente latere recto

Parabolæ

Parabolæ 4; & abſciſſa BG $\frac{9}{16}$, aut applicata GD $\frac{3}{2}$, longitudo No. XC. curvæ parabolicæ BD æquetur $\frac{15}{16}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c.

COROLL. Ex ſerie collata cum XLII, curvam parabolicam cum ſpatio hyperbolico inter aſymptotas comparandi modus innoteſcit. Sufficit monuiſſe.

LII.

Rectificare Curvam Logarithmicam per ſeriem & aliter. [Fig. 1].

Inſiſtat axi SAσ curva Logarithmica CB$\varkappa$, cujus ordinata AB $=1$, ſubtangens AK $=b$, alia quævis applicata RE [$\rho\epsilon$] $=z$, ejuſque elementum EF [$\epsilon\varphi$] $=dz$; quæritur rectificatio portionis curvæ BE [Bϵ]? Quoniam, per XLVII, elementum abſciſſæ AR [Aρ], nempe FG [$\varphi\gamma$] $=bdz:z$, erit EG^2 [EF^2 + FG^2] $=dz^2+bbdz^2:zz=(zz+bb)\,dz^2:zz$, indeque elementum curvæ EG [$\epsilon\gamma$] $=dz\sqrt{(zz+bb)}:z=$ [terminis fractionis per $\sqrt{(zz+bb)}$ æque-multiplicatis] $(zzdz+bbdz):z\sqrt{(zz+bb)}=zdz:\sqrt{(zz+bb)}+bbdz:z\sqrt{(zz+bb)}$, de quorum ſummatione hic quæritur. Prioris membri integrale purum eſt $\sqrt{(zz+bb)}$, quod [ob primam $z=\text{AB}=1$] inde a $\sqrt{(1+bb)}$ decreſcere [creſcere] intelligitur ad uſque $\sqrt{(zz+bb)}$; adeo ut omnia ejus decrementa [incrementa] huc quadrantia, ſeu $\int(zdz:\sqrt{(zz+bb)})$ ſint $=\sqrt{(1+bb)}-\sqrt{(zz+bb)}$ [$\sqrt{(zz+bb)}-\sqrt{(1+bb)}$] hoc eſt, æqualia differentiæ duarum in B & E [ϵ] tangentium rectarum BK & EN [$\epsilon\nu$]. Poſterioris membri $bbdz:z\sqrt{(zz+bb)}$ integrale, quoniam ita planum non eſt, prævia reductione inveſtigare conor, eaque ſimili huic, qua, ſupra Prop. L, pro curva Loxodromica fui uſus, cum in elementis analogiam quandam obſervem. Pono itaque primo $z=bb:p$, eoque mediante transformo $bbdz:z\sqrt{(zz+bb)}$ in $-bdp:\sqrt{(bb+pp)}$; deinde facio $\sqrt{(bb+pp)}=p+q$, ſive $p=(bb-qq):2q$; indeque elicio [$bbdz:z\sqrt{(zz+bb)}$] $-bdp:\sqrt{(bb+pp)}=bdq:q$, quod per XLVII, elementum eſſe cognoſco abſciſſæ cujuſdam in Logarithmica, quam tandem ita determino: Quoniam $p=(bb-qq):2q$, & $z=bb:p$,

 fiet

N°. XC. fiet $z = 2bbq:(bb - qq)$, ficut viciffim $q = (-bb + b\sqrt{(zz + bb)}) : z$; & quia prima $z = AB = 1$, erit quæ huic refpondet prima $q = -bb + b\sqrt{(1 + bb)}$. Pro conftructione, abfcindo in tangente BK partem $K\alpha = KA$, in ordinata AB partem $BV = B\alpha$, & in V ftatuo VX parallelam ipfi AK; pari modo in tangente $\nu\iota$ [idem imaginatione fupple in NE] fumo $\nu r = \nu\rho$, hinc $\iota v = \iota r$, & duco vx parallelam $\nu\rho$; quo pacto conftat fore $VX =$ primæ $q = -bb + b\sqrt{(1 + bb)}$, & $vx =$ ultimæ $q = (-bb + b\sqrt{(zz + bb)}) : z$. Quocirca fi ambæ VX & vx, vel etiam loco harum fola quarta proportionalis ad VX, vx & AB [quæ fit SC vel σx] applicetur Logarithmicæ, erit intercepta applicatis VX & vx axis portio, vel etiam ipfis AB, SC [σx] interjecta portio AS [$A\sigma$] [ex natura enim curvæ æqualis utrifque intercipietur] $= \int(bdq : q)$, id eft, omnibus $bdq : q$, feu omnibus $bbdz : z\sqrt{(zz + bb)}$, pro portione curvæ BE [$B\iota$] rectificanda infervientibus. Et quoniam pofita differentia inter AB & SC [σx] $= x$, refegmentum axis AS [$A\sigma$] $= bx \pm \frac{1}{2}bxx + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4$, &c. per XLVII, erit hujus pofterioris membri integrandi $bbdz : z\sqrt{(zz + bb)}$ fumma etiam per feriem reperta. Additis itaque amborum fummis fient omnia EG [$\iota\gamma$], feu longitudo curvæ BE [$B\iota$] $= \sqrt{(1 + bb)} \backsim \sqrt{(zz + bb)} + bx \pm \frac{1}{2}bxx + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4$ &c. $=$ differentiæ tangentium BK & EN [$\iota\nu$] una cum refegmento axis AS [$A\sigma$].

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Cum Torcularia noftratia publica, quibus muftum quotannis e racemis exprimitur, confiftant in prægrandi arboris trunco propemodum horizontali, cujus una extremitas fulcro firmata premendos racemos excipit, altera perpendiculariter in cochleam feminam excavata eft, quæ cochleam marem recipit, ingenti infertus facomate

te humi jacente instructam, & circumagendam, donec sacoma humo levatum fuerit: Quaritur, quid sentiendum de jurgiis inter Dominum racemorum & Dominum torcularis frequenter oboriri solitis, quorum ille sacoma in aere pendulum altius elevari impense petit, hic anxie vetat? No. XC.

Resp. *Uterque ridicule: cum onus etiam sesquipedali a terra intervallo sublatum haud quaquam majorem, quam pollicis tantum latitudine ab eadem divulsum, vel racemis vel torculari vim inferat.*

II.

Bacillus teres & gracilis [Fig. 4.] *ita notatus in C, ut sumtis continue proportionalibus AB, AC, AD, gravitas ejus ad gravitatem specificam alicujus liquoris se habeat ut BD ad AB; si extremitate sua A ita suspendatur e filo, ut altera extremitate B libere pendeat intra dictum liquorem, immergetur eidem usque ad notam C: modo per altitudinem puncti suspensionis id liceat.* ([a]).

III.

Unde talis bacillus per totam longitudinem rite divisus novum quod-

([a]) Etenim si bacillus AB, filo in A suspensus, & parte sui BC in liquorem mersus, quiescat, necesse est æquilibrium dari inter binas vires, quibus instar vectis, hypomochlio existente in A, sursum deorsumque urgetur. Altera est ipsius bacilli pondus, quod deorsum tendens in E, bacilli medio, applicatum fingi potest: altera, nisus liquoris bacillo gravioris, & partem immersam BC sursum propellentis, qui nisus in F puncto bisecante BC applicatus concipi debet. Sunt igitur hæ vires inter se, ut earum distantiæ ab hypomochlio; hoc est, ut AE ad AF ita nisus liquoris ad pondus bacilli. Est vero nisus liquoris ad pondus partis BC, ut gravitas specifica liquoris ad specificam bacilli gravitatem, id est, ut AB ad BD. Et pondus partis BC ad pondus totius bacilli (quia teres est) ut BC ad AB. Igitur ex æquo BC ad BD ut nisus liquoris ad pondus bacilli (seu AE ad AF). Et *dividendo*, BC ad CD ut AE ad EF, vel ut 2AE ad 2EF, id est, ut AB ad AC (nam EF = EB — BF, & 2EF = 2EB — 2BF = AB — BC = AC.) Quare AB ad AC, ut BC ad CD, & ut AB — BC ad AC — CD, seu AC ad AD. Sunt igitur AB, AC, AD, continue proportionales. Vide *Phoronomiam* HERMANNI, Lib. II. Sect. I. Cap. 3. Prop. 14. pag. 159.

No. XC. *quoddam genus exhibet Instrumenti Hygrostathmici, quo gravitates liquorum examinari solent, Gallis* Pése-liqueur *dicti.*

IV.

Vulgares machinulæ quæ huic usui inserviunt, consistuntque in bulla quadam vitrea instructa collo cylindrico oblongo & gracili, hoc defectu laborant, quod divisiones colli æquales habent. Hæ enim ad denotandas æquales gravitatum differentias, versus bullam in proportione harmonica decrescere debent. ([b]).

V.

Sic etiam arcus circulares, qui scapis bilancium applicari solent, docente Cl. STURMIO in Collegio Curioso *Part. I, Tent.* 14, Phænom. 4, *perperam in partes æquales dividuntur. Anguli enim examinis & scapi, quos superpondia æqualiter aucta efficiunt, tales sunt, ut differentia tangentium ipsorum eadem proportione a scapo decrescant, quæ in præced.* Corollario, *partes colli Instrumenti hygrostathmici a summitate versus bullam diminuuntur* ([c]).

VI. *Dan-*

([b]) Sunt enim ejusdem corporis diversis liquoribus innatantis partes immersæ inverse ut liquorum gravitates specificæ, docente Hydrostatica. Itaque si liquorum gravitates ponantur crescere in progressione arithmetica, id est, per differentias æquales, decrescent partes Instrumenti in progressione harmonica.

([c]) Sit AB [*Fig.* 5] bilancis jugum, A & B pondera, DCF scapus, C punctum suspensionis, Ff arcus circulari scapo applicatus. Jam si pondera A & B sint æqualia, centrum gravitatis eorum bisecabit jugum AB, quod in horizontali situ consistet. At, si superpondio aliquo pondus alterutrum, veluti B, augeatur, transferetur centrum gravitatis in E, & jugum inclinabitur in ab, ut E centrum perveniat in e infra punctum suspensionis C, & scapus situm obliquum dCf obtineat. Sumpta Cd pro sinu toto, de tangens est anguli dCe, vel FCf quem scapus & examen comprehendunt. Sed, ex natura centri gravitatis $B : A = AE : BE$, & *compon.* $B + A : A = AB : BE$, & pondus A, atque jugum AB data sunt. Igitur pars BE summæ ponderum A & B reciproce proportionalis est. Crescente igitur pondere B, vel summa $A + B$, per æqualia superpondia ipsi B addita, decrescent partes BE vel be in progressione harmonica. Igitur differentiæ tangentium de erunt differentiæ progressionis harmonicæ.

VI.

N°. XC.

Dantur æquationes locales, quas unica litera indeterminata ingreditur. Tales sunt $addx = dx^2$, $2xddx = dx^2$, *&c. quarum illa suo sensu locum ad Logarithmicam, hæc ad Parabolam includit* (*).

VII.

Davidis GREGORII *Analysis curvæ Catenariæ, nupero* Actorum Lipsiensium *Julio inserta, oportune ostendit, fieri utique posse, ut quandoque per inevidens & falsum, plausibile licet, ratiocinium ad veram conclusionem perducamur.*

VIII.

Responsio Anonymi, mense Jun. 1697, *art.* 13, Diarii Berolinensis *exhibita, ad argumentum pro possibili æternitate mundi inter proxima nostræ Disputationis Corollaria* † *ventilatum, nullius est pretii.*

(*) Æquatio $2xddx = dx^2$ induat hanc formam $2ddx : dx = dx : x$, & integrando, erit $2l(dx) = lx$, aut, addita constante $l(dy^2) - la$ homogeneitatis gratia, $2l(dx) = lx + l(dy^2) - la$, vel revertendo a logarithmis ad numeros, $dx^2 = xdy^2 : a$, aut $dx\sqrt{(a:x)} = dy$, vel $a\,dx : \sqrt{ax} = dy$, atque integrando rursus, $2\sqrt{ax} = y$ vel $y+b$, quæ est ad Parabolam.

Æquatio autem $xddx = dx^2$, cum reducatur ad $ddx : dx = dx : x$, erit, integrando & constante $l(dy) - la$ addita, $l(dx) = lx - la + l(dy)$, vel, quia logarithmorum æqualium æquales sunt numeri, $dx = xdy : a$, aut $a = xdy : dx$, ad Logarithmicam, cujus subtangens $= a$.

Sed $addx = dx^2$ ita reducitur; $ddx : dx = dx : a$, integrando & sublata constante $l(dy)$, fit $l(dx) - l(dy) = x : a$, aut redeundo ad numeros $dx : dy = N(x:a)$; seu $dy = dx : N(x:a)$ atque $y = b - aa : N(x:a)$, rursus ad Logarithmicam, cujus subtangens $= a$, sed inverso quodam situ positam.

† N°. LXXIV. pag. 764.

FINIS.

N°. XCI.

JACOBI BERNOULLI CIRCINUS PROPORTIONUM NAUTICUS,

Scala Loxodromica instructus, hujusque Fabrica mire facilis.

Acta Erud. Lips. 1699. Febr. p. 91.

GEometræ Problema de invenienda Longitudine puncti in Loxodromia ex ejus data Latitudine, eo quod transcendens esse & a summis Secantium dependere animadverterent, haud aliter quam approximando solvere sunt assueti, adhibitis eum in finem Mappis quibusdam seu Tabulis, quas *Latitudinum crescentium* vocant, ex additione plurium Secantium satis operose constructis. Solus hactenus rem accurate confecit omni scientiarum laude cumulatissimus Vir Dnus. Leibnitius, sed calculi laborem non sustulit, Problemate quippe ad Logarithmos Sinuum versorum nondum supputatos redacto. *Vide Acta Lipf. 1691, Mense Aprili, pag.* 182. Data nuper occasione, cum positionibus quibusdam *de Seriebus infinitis* * conscribillandis occuparer, in modum incidi consequendi quæsitum absque ullo labore; animadverti enim, Scalam Loxodromicam in Logarithmorum, quæ vulgo prostant, Tabulis ita jam paratam haberi, ut inde non tam calculo erui, quam exscribi solummodo opus habeat;

* N°. præced. Prop. L. pag. 855 & seq.

habeat. Modus talis: Notentur in columna A arcus Latitudinum, seu partes quadrantis ordine per singulos gradus graduumve minutias a o ad 90° [sufficit in adjuncto latereulo rem exhibere in denis gradibus.] His in columna B respondeant totidem partes semiquadrantis a 45° ad 90°, differentiis progredientes, quæ sint semisses differentiarum columnæ A. Horum posteriorum ar- No. XCI.

A Grad. Lat.	B	C Grad.Long.
0	45	0
10	50	7.61865
20	55	15.47732
30	60	23.85606
40	65	33.13275
50	70	43.89341
60	75	57.19475
70	80	75.36812
80	85	105.80482
90	90	Infin.

cuum exscribantur in columna C Tangentes artificiales, dempto a singulis Logarithmo Sinus totius, quo pacto parata erit Tabella, significabuntque primæ ad sinistram notæ numerorum columnæ C, gradus Longitudinum integros, & quinque reliquæ ad dextram punctulis discretæ graduum partes centies millesimas. Respicit autem hæc Tabella primario Loxodromiam, cujus angulus cum meridianis est 37°. 9'. 42". (a) sed aliis interim quibuslibet Loxodromiis facile accommodabitur, si fiat, ut 7579869, tangens anguli prædicti, ad tangentem dati alterius cujusvis anguli

Sssss 2

(a) Vide N°, præc. Prop. L. Schol. pag. 858, & 859.

No. XCI. li Rhumbici, sic Longitudo e regione datæ Latitudinis in Tabula reperta ad Longitudinem quæsitam. Ut vero & hujus operationis molestia leventur imperiti Nautæ, poterit ex ista Tabella Scala confici, eaque posthac cum linea Tangentium Circinis proportionum insculpi, hoc fere modo: Linea partium æqualium repræsentet gradus Longitudinum eorumque partes; huic adjungatur alia, si lubet, parallela, quæ gradus Latitudinum comprehendat, & cujus divisiones sic instituantur, ut decimus gradus Latitudinis respondeat 7. 61865 gradui Longitudinis, vicesimus Latitudinis 15. 47732 gradui Longitudinis, & consequenter, prout ex laterculo apparet. Tandem etiam in utrumque Instrumenti crus projiciatur Scala Tangentium cum suis divisionibus, ejusque locus, qui incidit in 37°. 9'. 42", asterismo notetur. Usus hujus Circini proportionum talis: Sit, exempli gratia, instituta velificatio in Rhumbo quinto, hoc est, in angulo 56°. 15', a 20° Latitudinis parallelo ad usque 40^um^ & quæratur Longitudinis evariatio: Sumo in Scala Latitudinum intervallum 20 & 40, illudque diductis, quantum satis est, Instrumenti cruribus in linea Tangentium asterismis applico; mox in hac linea distantiam accipio inter numeros 56°. 15' utriusque cruris, eamque in lineam partium æqualium transfero; in qua sic abscindet optatam Longitudinum differentiam, quæ est 34. 85973 seu 34°. 51'. 35". Potest vero etiam eadem facilitate conversum Problematis hujus expediri, & ope talis Circini proportionis ex datis Latitudinibus duorum locorum inveniri angulus Rhumbi, & si quæ solent alia his affinia inter Nautas Problemata agitari; unde vix aliud simplicius & ad praxin accommodatius adminiculum in usum horum Hominum excogitari posse, facile quis sibi persuadeat.

N°. XCII.

N°. XCII.

JACOBI BERNOULLI
QUADRATURA
ZONARUM CYCLOIDALIUM
demonstrata.

OMnia, quæ circa Quadraturas spatiorum cycloidalium inveniri possunt, una Cycloidis proprietate dudum detecta nituntur, & ex ea tam aperte fluunt, ut Viri celeberrimi HUGENIUS & LEIBNITIUS, qui duo ejus segmenta quadrarunt, non potuissent non pari facilitate cætera omnia segmenta & sectores quadrabiles reperire, si animum intendere voluissent. *Acta Erud. Lips. 1699. Sept. p. 427*

Cum enim, ut vulgo notum, BL æquetur arcui circulari AL, & spatium externum ABN segmento circulari ALI, poterit, proprietatis hujus ope, spatium cycloidicum quodvis imaginabile eo reduci, ut non nisi figuræ rectilineæ & segmenta quædam circularia habeantur; idcirco, ut spatium fiat quadrabile, illi tantum termini, qui ex segmentis circularibus constant, mutuo se destruere sunt fingendi, & nihilo æquales ponendi [quod fundamentum solutionis est]; e qua deinde suppositione, quantitates assumtæ facile determinantur. Quæritur ex. gr. quantæ sint assumendæ rectæ HK, HI, ut Zona IKDB quadraturam admittat: Pono $HA = a$, $HK = x$, $HI = z$, $KM = p$, $IL = q$, AM vel $DM = s$, AL vel $BL = t$; erunt sectores $AHM = \frac{1}{2}as$, & $AHL = \frac{1}{2}at$; adeoque segmenta AKM $[ADO] = AHM - KHM = \frac{1}{2}as - \frac{1}{2}px$, & AIL

No. XCII. [ABN] $=$ AHL $-$ IHL $= \frac{1}{2}at - \frac{1}{2}qz$. Sed ſegmentum cycloïdicum AKD $=$ KO $-$ ADO $=$ KO $-$ AKM $=$ AK $\times$ (KM $+$ MD) $-$ AKM $=$ AK $\times$ (KM $+$ AM) $-$ AKM $= (a - x) \times (p + s) - \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}px = ap - \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}as - xs$; & pariter ſegmentum alterum AIB $= aq - \frac{1}{2}qz + \frac{1}{2}at - zt$; ac proinde zona IKDB $=$ AIB $-$ AKD $= aq - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs$; ubi liquet, quatuor priora membra denotare figuras mere rectilineas; ſolaſque quantitates reliquas, quas ingrediuntur t & s, impedire quo minus zona ſit quadrabilis: facio ergo has æquales nihilo, ut ſit $\frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$; ubi ſi poſuero t habere ad s rationem quamcunque [numeri tamen ad numerum, ut, uno arcu dato, alter geometrice conſtrui poſſit,] ſemper habebo æquationem, quæ, litteris t & s eliminatis, relationem ipſius z ad x patefaciet; nempe, ſi $t = 2s$, fiet $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x$; ſi $t = 3s$, habetur $z = \frac{2}{6}a + \frac{1}{3}x$; ſi $t = 4s$, erit $z = \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}x$, & ſic perpetuo in eadem progreſſione ([a]). Cumque etiam ex data recta HK, ſinu nempe complementi arcus AM, pervulgata analyſi reperiri poſſit ſinus complementi arcus dupli, tripli, quadrupli, &c. poterit adhuc z in aliis terminis inveniri; nempe ſi $t = 2s$; erit $z = (2xx - aa) : a$; ſi $t = 3s$, $z = (4x^3 - 3aax) : aa$; ſi $t = 4s$, $z = (8x^4 - 8aaxx + a^4) : a^3$, &c. ([b]) qui valores cum ſuperioribus, ſinguli cum ſingulis, collati, novas porro æquationes ſubminiſtrabunt, per quas ipſa quoque x, ſeu HK, determinabitur.

Atque ad eundem modum infinita alia ſpatia quadrabilia detegi poſ-

(a) Nam cum ponatur $\frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$, vel $(a - 2z)t = (a - 2x)s$, ſi fiat $t = ns$ [n denotante numero quovis integro] erit $(a - 2z)n = a - 2x$, unde eſt $z = (n - 1)a : 2n + x : n$, hoc eſt, ſi $n = 2$, $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x$; ſi $n = 3$, $z = \frac{2}{6}a + \frac{1}{3}x$; ſi $n = 4$, $z = \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}x$, &c.

(b) Vide Num. XCVII. Jam vero $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}x = z = (2xx - aa) : a$, dat $4xx - ax = \frac{5}{2}aa$, vel $x = (1 + \sqrt{41})a : 8$. Et $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}x = z = (4x^3 - 3aax) : aa$ dat $12x^3 - 10aax - a^3 = 0$, &c.

possunt. Sic reperiri potest, ex. gr. sector quadrabilis D A B rectis AB, AD comprehensus, vel zona BDLM, arcu cycloidali BD & circulari L M intercepta, quæ quidem perpetuo sectoris dupla est (c). Existente namque H K seu $x = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}a\sqrt{33}$, vel $x = a\sqrt{\frac{5}{6}}$, vel $32x^4 - 32aaxx - a^3x + 4a^4 = 0$; &c. & assumto arcu AL vel duplo, vel triplo, vel quadruplo. &c. ipsius A M, erit subinde sector B A D = triang. H A L − triang. HAM, & zona differentiæ triangulorum dupla (d). No.XCII.

Methodum vero tam facilem haud alia fini pandere volui, quam ut Frater, exemplo meo, ad paria præstanda incitatus, mei quoque Problematis Isoperimetrici promissam analysin tandem aliquando nobis impertiat.

Videatur Nus. XCV.

(c) Nam sector B A D = segm. ADBA − segm. A D A, & zona B D L M = sp. A B L M A − sp. ADM. Est autem sp. ABLMA duplum segm. A D B A, & sp. A D M duplum segm. A D A. Etenim sp. ABLMA = A N B I − ANBDA − AMLI = ANBI − 2AMLI [quia A N B D A = A M L I] = $(a - z)(t + q) - at + qz = aq - tz$. Sed segment. A D B A = A N B − sp. A N B D A = ANB − AMLI = $\frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}tz$. Pariter spat. ADM = $ap - sx$, & segm. ADA = $\frac{1}{2}ap - \frac{1}{2}sx$. Ideo zona BDLM = $aq - tz - ap + sx$, & sector ABD = $\frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}tz - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}sx$. Illa igitur istius dupla.

(d) Ut tam zona quam sector sint quadrabiles, pone terminos $-tz + sx$, quos ingrediuntur t & s, æquales nihilo, & erit $tz = sx$, vel, si fiat $t = ns$, $z = x : n$, nec non sector = $\frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}ap = \frac{1}{2}$HAL − $\frac{1}{2}$HAM. Sit $n = 2$, erit $\frac{1}{2}x = z = (2xx - aa) : a$, unde est $4xx - ax - 2aa = 0$, cujus radix $x = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}a\sqrt{33}$. Sit $n = 3$, est $\frac{1}{3}x = z = (4x^3 - 3aax) : aa$, unde habetur $12x^3 = 10aax$, vel $x = a\sqrt{\frac{5}{6}}$. Fac $n = 4$, erit $\frac{1}{4}x = z = (8x^4 - 8aaxx + a^4) : a^3$, seu $32x^4 - 32aaxx - a^3x + 4a^4 = 0$, &c.

N°. XCIII.

N°. XCIII.

JACOBI BERNOULLI SOLUTIO PROPRIA PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI,

Propositi in Actis Lipf. menf. Maio 1697. *pag.* 214. ([a])

Acta Erud. Lipf. 1700. Jun. p. 261.

CUm genuina folutio hujus Problematis nondum a quoquam fuerit exhibita, eam hic, donec fuo tempore fequatur analyfis, curiofo Lectori in fequente Tabella contemplandam fifto, in

([a]) Problematis iftius, quod inter præftantiffimos Geometras BERNOULLIOS agitatum eft fatis diu, Solutionem communicavit *Johannes* cum LEIBNITIO, menfe *Junio* 1698, cumque Nofter iftam fuam Solutionem a°. 1700 publici juris feciffet, Alter ad *Acad. Reg. Parifinam* Solutionem fuam tranfmifit, Jan. 1701, fub figillo, tum demum aperiendo, cum Frater analyfim dediffet. Hanc vide N°. XCV; *Johannis* vero Solutionem in *Actis Acad. Parif.* 1706. Deinde TAYLORUS in *Methodo increm.* a°. 1715, idem Problema fuo more folutum dedit. Sed a°. 1718 *Joh.* BERNOULLI iftud argumentum refumens, multo elegantius & fimplicius rem expofuit; quam eodem fere tempore, eadem prope methodo tractavit HERMANNUS. Tandem EULERUS, an. 1732 & 33, in *Comm. Acad. Petrop.* Tom. VI. hoc idem Problema latiffime acceptum folvit, & in Tom. VIII, qui dum hæc fcribimus ad nos defertur, idem exequitur, facillima ufus methodo, cujus fpecimen dederamus N°. LXXV, Nota a, pag. 770, quamque ideo, quia præoccupavit, accep-

in qua litteras a & b pono designare quantitates constantes, x & y coordinatas curvæ quæsitæ, t ipsam curvam, p quantitatem quamcunque datam per x, & q quantitatem datam per t: ([b]). N. XCIII.

Si

acceptam ipsi referendam agnoscimus. Nunc satis erit, si æquationes Tabellæ sequentis, quanta poterimus brevitate, demonstremus, secundum D. *Joh.* BERNOULLI methodum posteriorem.

([b]) Etsi Problema quod N°. LXXV universaliter solutum est, cum Isoperimetrico aliquid habeat affinitatis, in eo tamen differunt, quod illud unicam complectatur conditionem, inveniendi scil. curvam, cujus functio aliqua proposita sit *Maximum*, vel *Minimum*: istud vero insuper exigat ut curva quæsita sit datæ longitudinis. Quare non satis est hic spectare duo curvæ elementa, ut N°. LXXV factum est: Non posset enim conditio *ἴσου περιμέτρου* servari, cum nequeat esse [Vid. fig. A ibid.] CG + GD = CL + LD. Sed omnino consideranda sunt tria curvæ elementa, qualia sunt hic [fig. A & B] BC, CD, DE, quæ tribus infinite vicinis BF, FG, GE sint æqualia, & insuper talia, ut istorum functio proposita sit simili functioni illorum æqualis; quo fiet, ut hæc functio sit *Maximum*, *Minimum*ve. Id vero duplici ratione concipi potest: vel [fig. B] ut singula elementa BC, CD, DE singulis BF, FG, GE sint æqualia; fingendo nempe BC & ED circa polos B, E gyrari incipere, & venire in situm BF, EG, talem ut sit FG = CD: Vel [Fig. A], ut æqualibus manentibus abscissarum [vel ordinatarum] elementis QR, RS, ST, fingantur puncta C & D fluere in F & G, juxta rectas RO, SP; adeo ut, quanto breviores sunt rectæ BF, EG rectis BC, ED, tanto recta FG longior sit recta CD. In utraque autem hypothesi, binæ conditiones, isoperimetri altera, altera functionis maximæ, dabunt binas æquationes, exprimentes relationem inter CF & DG [Fig. A], vel inter Ca & Gb, vel Fa & Db [Fig. B], ex quarum æquationum comparatione deducetur æquatio curvæ ABCDE.

Inquiramus itaque statim quid ferat conditio isoperimetri, & primum in secunda hypoth. [Fig. A]. Si centris B, K, E describantur arcus Fa, Cc, Dd, Gb, & ex æqualibus BCDE = BFGE auferantur æqualia Ba + KC + KD + Eb = BF + Kc + Kd + EG, remanebunt æqualia Ca + Db = Fc + Gd; unde est Fc − Ca = Db − Gd. Sed, si CF sumatur pro sinu toto, erunt Fc, Ca sinus angulorum FCc, CFa, vel CDO, BCN, & Fc − Ca differentia horum sinuum. Et, si DG sumatur pro sinu toto, erunt Db, Gd sinus angul. DGb, GDd, vel DEP, CDO, & Db − Gd differentia horum sinuum. Ergo quoniam Fc − Ca = Db − Gd, erit

N. XCIII.

	Si	erit quantitas
1.	$dy = p\,dx : \sqrt{(aa - pp)}$	$\int p\,dy$ Maximum & $\int(dt:p)$ Minimum
2.	$dy = (a-p)\,dx : \sqrt{(2ap - pp)}$	$\int p\,dy$ Minimum
3.	$dy = ap\,dx : \sqrt{((bb-aa)\,pp - 2aabp + a^4)}$	$\int(dt:p)$ Maxim.

4.

erit productum ex CF in diff. finuum angul. BCN, CDO æquale producto ex DG in diff. finuum ang. CDO, DEP, quæ producta servant uniformitatis legem; eundem enim situm habet lineola CF inter angulos BCN & CDO, quam lineola DG inter angulos CDO, DEP. Quamobrem, cum positis abscissis AQ, AR, &c. $= x$, ordinatis QB, RC, &c. $= y$, curva AB, ABC, &c. $= t$, sit CF $= ddy$, sinus ang. BCN vel CDO $= dy : dt$, & differentia sinuum ang. BCN, CDO $= d\frac{dy}{dt}$; conditio isoperimetri dabit, positis dx constantibus, $ddy.\, d\frac{dy}{dt} =$ constanti.

Et similiter, positis dy constantibus, habebitur $ddx.\, d\frac{dx}{dt} =$ constanti.

Sed in prima hypothesi elementi dt constantis [fig. B], si centro K describantur arcus Cc, Gg; cum sit CD = FG, erit quoque Fc = Dg. Igitur triangula Fdc, Deg, quæ similia sunt, ut liquet, erunt æqualia, ideoque Fd = De, seu ab — aF = bD — be. At, si sumatur Ca pro sinu toto, erunt ad, aF tangentes angulorum aCd, aCF, vel ipsis æqualium CDO, BCN, & ad — aF est harum tangentium differentia. Sed, si sumatur Gb pro sinu toto, erunt bD, be tangentes angul. bGd, bGe, aut ipsis æqualium DEP, CDO, & bD — be harum tangentium differentia. Igitur, propter ad — aF = bD — be, erit productum ex Ca in diff. tangentium ang. BCN, CDO æquale producto ex Gb in diff. tangentium ang. CDO, DEP. Itaque cum sit Ca $= ddy$, & tangens anguli BCN vel CDO $= dy : dx$, atque differentia tangentium $= d\frac{dy}{dx}$; conditio isoperimetri dabit, positis dt constantibus, $ddy \times d\frac{dy}{dx} =$ const.

Et similiter ostendi posset, ex eadem figura, quod, positis pariter dt constantibus, sit $ddx.\, d\frac{dx}{dy} =$ const.

Inquiramus nunc, quid ferat conditio

4.	$dy = adx : \surd(pp - aa)$	$\int(dy:p)$ Maxim. & $\int pdt$ Minim.	N. XCIII.
5.	$dy = (p-a)dx : \surd(2ap - aa)$	$\int(dy:p)$ Minim.	
6.	$dy = adx : \surd(bb - 2bp + pp - aa)$	$\int pdt$ Max.	

7.

ditio altera functionis cujuspiam maximæ vel minimæ, percurrendo casus omnes in Tabella Autoris enumeratos.

I. Si *Max.* vel *Min.* debeat esse $\int pdy$, seu summa functionis cujusvis p abscissæ [$\int$BH] ductæ in elem. BN vel HI ordinatæ; erit [fig. A] ex natura *Maximi*, $\int$BH. HI+$\int$CI. IL+$\int$DL. LM=$\int$BH. Hi+$\int$Fi. il+$\int$Gl. lM, seu, demptis utrinque communibus ($\int$BH—$\int$CI). Ii=($\int$CI—$\int$DL). Ll, quæ æquatio uniformitatis legem servat, cum Ii eodem modo se habeat respectu BH & CI, ac Ll respectu CI & DL. Est autem $\int$BH—$\int$CI $= dp$, & Ii $= ddy$. Quare conditio proposita dat $ddy.\ dp =$ constanti, positis nempe dx constantibus. Sed in eadem hyp. conditio isoperimetri dabat $ddy.\ d\frac{dy}{dt} =$ const. Data est igitur ratio inter $ddy.\ dp$ & $ddy.\ d\frac{dy}{dt}$, seu inter dp & $d\frac{dy}{dt}$. Sit ratio hæc $a : 1$. Ergo $ad\frac{dy}{dt} = dp$, & integrando $ady : dt = p + c$, seu $ady = (p+c)dt$. Quod si mavis æquationem inter elementa coordinatarum dx & dy, quadrando habebis $aady^2 = (p+c)^2 dt^2 = (p+c)^2 dx^2 + (p+c)^2 dy^2$, seu $\pm dy = (p+c)dx : \surd(aa - (p+c)^2)$. In qua formula universali, si ponas constantem arbitrariam $c = 0$, habebis 1^{am}. æquat. Tabellæ. Si vero ponas $c = -a$, habebis 2^{am}. Utrum Curva inventa det $\int pdy$ *Maximum* vel *Minimum*, [præstat enim utrumque pro diversa ratione a ad c] quomodo agnoscatur docet Noster N°. XCVI. Probl. I.

Inde etiam derivantur æq. 4 & 5 Tabellæ. Nam si $\int(dy:p)$ debeat esse *Max.* vel *Min.* pone $aa:p =$ p, & erit $\int pdy$ *Max.* aut *Min.* atque ideo $\pm dy = (p+c)\ dx : \surd(aa - (p+c)^2) = (aa : p+c)\ dx : \surd(aa - (aa:p+c)^2) = (a + pc)\ dx : \surd(pp - (a+pc)^2)$. Quæ, ponendo $c = 0$, dat æq. 4; sed 5, ponendo $c = -1$.

II. Si *Maxim.* vel *Minim.* debet esse $\int pdt$, seu summa functionis $\int$BH ductæ in BC elem. curvæ; erit ex natura *maximi*, $\int$BH. BC+$\int$CI. CD+$\int$DL. DE=$\int$BH. BF+$\int$Fi. FG+$\int$Gl. GE, seu, demptis communibus $\int$BH. Ca—$\int$CI. Fc=$\int$CI. Gd—$\int$DL. Db. Sed sunt Ca=BN

N. XCIII.

7.	$dy = q\,dt : \sqrt{(aa + qq)}$	$\int q\,dy$ Maxim. & $\int y dq$ Min. *vel* Max.
8.	$dy = (a - q)\,dt : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$	$\int q\,dy$ Min. & $\int y dq$ Max. *vel* Min.

9.

$\frac{BN}{BC}CF$, $FC = \frac{CO}{CD}CF$, $GD = \frac{CO}{CD}GD$, & $Db = \frac{DP}{DE}GD$, quibus substitutis habetur æquatio uniformis & ordinata $(\frac{BN}{BC}\int BH - \frac{CO}{CD}\int CI)$ $CF = (\frac{CO}{CD}\int CI - \frac{DP}{DE}\int DL) GD$. Est autem $CF = ddy$, & $\frac{BN}{BC}\int BH = \frac{pdy}{dt}$, atque $\frac{BN}{BC}\int BH - \frac{CO}{CD}\int CI = d\frac{pdy}{dt}$. Quare conditio proposita dabit $ddy.\ d\frac{pdy}{dt} =$ const. Sed isoperimetri conditio dat $ddy.\ d\frac{dy}{dt} =$ const. Data igitur ratio est inter $d\frac{pdy}{dt}$ & $d\frac{dy}{dt}$. Sit ratio hæc $b : 1$, & erit $bd\frac{dy}{dt} = d\frac{pdy}{dt}$, atque integrando, constante addita, $bdy : dt = pdy : dt + a$, vel $bdy - pdy = adt$; quadrando $(b-p)^2 dy^2 = aadt^2 = aadx^2 + aady^2$, unde fit $\pm dy = adx : \sqrt{((b-p)^2 - aa)}$, quæ est æquatio 6, degenerans in 4, si facias $b = 0$.

Inde vero fluunt æq. 3. & 1. Nam si $\int(dt : p)$ debeat esse *Max.* vel *Min.*, pone $aa : p = \text{p}$, & erit $\int \text{p} dt$ *Max.* vel *Min.* ideoque $\pm dy = adx : \sqrt{((b - \text{p})^2 - aa)} = adx : \sqrt{((b - aa:p)^2 - aa)} = apdx : \sqrt{((bp - aa)^2 - aapp)}$, quæ est æq. 3, degenerans in 1, ubi fit $b = 0$.

Ubi tamen notandum æquationes 3 & 6, non ad Maxima $\int \text{p} dt$ & $\int(dt : p)$, sed ad Minima pertinere.

III. Si *Max.* vel *Min.* debeat esse $\int q dy$, id est, summa functionis cujusvis q arcus AB [$\int$AB] ductæ in elem. BN ordinatæ, erit [fig. B] ex natura *Maximi*, $\int$AB. BN + $\int$ABC. CO + $\int$ABCD. DP = $\int$AB. Bn + $\int$ABF. Fo + $\int$ABFG. Gp, seu $\int$AB. (BN − Bn) + $\int$ABC. (CO − Fo) + $\int$ABCD. (DP − Gp) = 0 = $\int$AB. Ca − $\int$ABC. (Ca + Gb) + $\int$ABCD. Gb, aut denique ($\int$ABC − $\int$AB). Ca = ($\int$ABC − $\int$ABCD). Gb, quæ est æquatio ad legem uniformitatis ordinata. Hæc vera, quia Ca = ddy, & $\int$ABC − $\int$AB = dq, dat $ddy.dq =$ const. positis nempe dt constantibus. Sed, in eadem hyp. conditio isoperimetri dat $ddy.\ d\frac{dy}{dx} =$ const.

Quare

9.	$dy = adt : \sqrt{(aa + qq)}$	$\int(dy : q)$ Max. & $\int x\,dq$ Min. *vel* Max.	N. XCIII.
10.	$dy = (aq - bb)\,dt : b\sqrt{(bb - 2aq + qq)}$	$\int(dy : q)$ Min.	
11.	$dy = adt : \sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)}$	$\int x\,dq$ Max. *vel* Min.	

Ut solutiones reddantur generalissimæ, observandum, in (*) omnibus istis æquationibus litteras *p* & *q* augeri minuive posse quan-

Ttttt 3

Quare data ratio est inter dq & $d\frac{dy}{dx}$.

Sit hæc *a* : 1. Igitur $a\,d\frac{dy}{dx} = dq$, vel integrando, constante addita, $ady : dx = q + c$, vel $ady = qdx + cdx$. Hæc æquatio simplicissima complectitur 7 & 8. Nam, quadrando, est $aady^2 = (q+c)^2 dx^2 = (q+c)^2 dt^2 - (q+c)^2 dy^2$. Igitur $\pm dy = (q+c)\,dt = \sqrt{(aa + (q+c)^2)}$. Quæ, si facias $c = 0$, abit in 7, & in 8 si facias $c = -a$, & $aa + cc = bb$.

Et ex 7 derivatur 9, pro q substituendo $aa : q$, atque 8 reducitur ad 10, scribendo $bb : q$ pro q.

IV. Si *Max.* vel *Min.* debet esse $\int y\,dq$, hoc est, summa producti ex AH [y] in dq, differentiale functionis cujusvis arcus AB [dfAB], erit [fig. B] ex natura *Maximi*, AH. dfAB + AI. dfABC + AL. dfABCD = AH. dfAB + Ai. dfABF + Al. dfABFG, seu [quia ABC = ABF, & ABCD = ABFG, demtis utrinque communibus] Ca. dfABC = Gb. dfABCD, hoc est [quia Ca = ddy, & dfABC = dq] ddy. dq = const. positis dt constantibus. Sed in eadem hyp. conditio isoperimetri dat ddy. $d\frac{dy}{dx}$ = const.

Itaque data est ratio inter dq & $d\frac{dy}{dx}$.

Sit hæc *a* : 1. Ergo $dq = a\,d\frac{dy}{dx}$; atque integrando, addita constante, $q + c = ady : dx$ vel $qdx + cdx = ady$, quæ eadem est ac superior. Unde est quod æq. 7 & 8 dant, non modo $\int q\,dy$, sed & $\int y\,dq$ *Max.* vel *Min.*

Pariter vero, si scribas x pro y, invenies curvam, cujus functio $\int xdq$ est *Max.* vel *Min.* designari per æquationem $qdy + cdy = adx$, quæ complectitur 9 & 10 Tabellæ. Nam quadrando $(q+c)^2 dy^2 = aadx^2 = aadt^2 - aady^2$ vel $\pm dy = adt : \sqrt{(aa + (q+c)^2)}$, quæ est 9, si $c = 0$, 11 vero si $c = -b$.

(*) Id non satis universaliter verum esse jam dudum animadvertit D. *Joh.* BERNOULLI. Æquatio, v. g.

N. XCIII. quantitate quacunque constante c; eaque ratione id effici, ut curva inventa non tantum conditioni præscriptæ satisfaciat, sed datæ quoque fiat longitudinis: exempli gratia, loco primæ æquationis $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$ substitui potest $dy = (p + c) dx : \sqrt{(aa - pp - 2cp - cc)}$ vel etiam ista, $dy = (p - c) dx : \sqrt{(aa - pp + 2cp - cc)}$; quibus curvæ denotantur, quæ Maximum $\int p dy$ comprehendunt, insuperque determinatam longitudinem, eamque pro quantitate litteræ c majorem minoremve, obtinent.

Sciendum etiam est, reperiri posse æquationes curvarum, quarum $\int p dy$, $\int q dy$, &c. est *Maximum Minimum*ve, cum quantitates, quæ litteris p & q designantur, non tantum simpliciter datæ sunt per x vel t, sed etiam promiscue ex x & y, vel t & y compositæ. Hoc fini sumo differentiale ipsius p [considerando y instar constantis] quod voco mdx, facioque $r = \int m dx$ & denique $dy = r dx : \sqrt{(aa - rr)}$; quo pacto habebo æquationem curvæ, cujus $\int p dy$ est *Maximum*. ([d]) Similiter si differentiale ipsius

g. quam primæ substituit Noster, $dy = (p + c) dx : \sqrt{(aa - (p + c)^2)}$, dabit quidem $\int p dy$ *Maximum* vel *Minimum*; non vero $\int (dt : p)$, cui convenit $dy = apdx : \sqrt{((bp - a^2)^2 - a^2p^2)}$ a priori diversa, nisi quando illic c, hic b sunt $= 0$. Dedimus autem, in Nota superiore, pro singulis casibus æquationes completas.

([d]) Si p sit functio ipsarum x & y quam designabimus sic fAH & HB, tunc, ubi $\int p dy$ debet esse *Max.* vel *Min.* erit [fig. A] ex natura *Maximi*, fAH & HB. HI + fAI & IC. IL + fAL & LD. LM = fAH & HB. Hi + fAi & iF. il + fAl & lG. lM, quod reducitur, demptis communibus, ad (fAi & iF − fAH & HB). Ii − (fAi & iF − fAI & IC). IL = (fAl & lG − fAi & iF). Ll − (fAl & lG − fAL & LD). LM, quæ debitam servat uniformitatem. Itaque cum fAi & iF − fAH & HB sit differentiale functionis p, si dp ponatur $= mdx + ndy$ [quia p datur in x & y] erit (fAi & iF − fAH & HB). Ii = $(mdx + ndy)\, ddy = mdxddy + ndyddy$. Sed ($f$Ai & iF − fAI & IC). IL designat productum ex IL [dy] in differentiale functionis p ita sumptum, ut x manente [est enim IC = iF] y augeatur quantitate ddy [Nam Ai dum fit AI, incrementum est Ii = ddy], hoc est (fAi & iF − fAI & IC). IL = $nddy . dy = ndyddy$. Quare, id

ipſius q [ſumta ſemper y conſtante] vocetur ndt, fiatque $v = \int ndt$, ac $dy = vdt : \sqrt{(aa + vv)}$, prodibit curva, cujus $\int qdy$ eſt *Maximum*. (e) Eſto, exempli gratia, $p = \sqrt{(xx + yy)}$, hoc eſt, ſupponendum ſit in fig. * applicatam PZ vel GH æquari chordæ BF, erit differentia ipſius p, $xdx : \sqrt{(xx + yy)}$. Curva igitur, cujus $\int dy \sqrt{(xx + yy)}$ eſt *Maximum*, fit $dy = [rdx : \sqrt{(aa - rr)} =]\ dx \int \frac{xdx}{\sqrt{(xx + yy)}} : \sqrt{(aa - (\int \frac{xdx}{\sqrt{(xx+yy)}})^2)}$; nihilque ad omnimodam Problematis reſolutionem deeſt, præter artificium ſeparandi quantitates indeterminatas a ſe invicem, quod proſequi inſtituti noſtri non eſt. Dantur vero etiam caſus, ubi nec opus eſt ſeparatione, nempe cum littera y non amplius ingre-

N. XCIII.

* Vid. Fig. 1. N. LXXXII. Tab. XXXVI.

id quod conſtanti æquale ponendum eſt, eſt $mdxddy + ndyddy - ndyddy = mdxddy$. Ergo, cum conditio iſoperimetri det $ddy.\,d\frac{dy}{dt} =$ conſt., erit inter mdx & $d\frac{dy}{dt}$ ratio conſtans, quæ ſi dicatur $a : 1$, habebimus $mdx = ad\frac{dy}{dt}$ & integrando $r\,[\int mdx] = ady : dt$, vel $ady = rdt$, atque quadr. $aady^2 = rrdt^2 = rrdx^2 + rrdy^2$, ac denique $dy = rdx : \sqrt{(aa - rr)}$.

(e) Pariter ſi q deſignet ſAB&AH, ſitque $\int qdy$ *Max.* vel *Min.*, erit [fig. B] ex natura Maximi, (ſAB&AH). HI + (ſABC&AI). IL + (ſABCD&AL).LM = (ſAB&AH). Hi + (ſABF&Ai). il + (ſABFG&Al).lM, quæ æquatio reducitur ad (ſABC&AI — ſAB&AH). Ii — (ſABC&AI — ſABF&Ai). IL = (ſABCD&AL — ſABC&AI).Ll — (ſABCD&AL — ſABFG&Al). LM, quæ uniformis eſt in utroque membro. Analytice autem redditur ſic. Quoniam ſAB&AH $= q$ data in t & y, erit (ſABC&AI — ſAB&AH). Ii $= dq.\,ddy = (mdy + ndt)\,ddy = mdyddy + ndtddy$, atque (ſABC&AI — ſABF&Ai). IL $= mddy.\,dy = mdyddy$. Quare id quod conſtans ponendum eſt, nempe (ſABC&AI — ſAB&AH). Ii — (ſABC&AI — ſABF&Ai.) IL, erit $= mdyddy + ndtddy - mdyddy = ndtddy$. Sed conditio iſoperimetri dat $ddy.\,d\frac{dy}{dx} =$ conſt. Erit itaque data ratio $[a:1]$ inter $ndtddy$ & $ddy.\,d\frac{dy}{dx}$, vel inter ndt & $d\frac{dy}{dx}$. Unde eſt $ndt = ad\frac{dy}{dx}$ & integrando $v = ady : dx$, vel $ady = vdx$. Quadrando $aady^2 = vvdx^2 = vvdt^2 - vvdy^2$, atque tandem $dy = vdt : \sqrt{(aa + vv)}$.

N. XCIII. ingreditur differentiale ipsius p; velut si ponatur $p = (xx+yy):a$ vel $= (xx+yy-by):a$, &c. hoc enim in casu æquatio curvæ non erit diversa ab ipsa $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$; sic ut hinc concludamus, eandem curvam BFN Problemati satisfacere, sive applicatam PZ quadrato applicatæ PF, sive quadrato chordæ BF, aut infinitis aliis modis proportionari supponamus; pariterque etiam in aliis. Obiter hic noto, quod *Frater* mentione hujus curvæ facta in *Ephem. Gall.* (f) asserit, *illam esse, quam refert linteum a pondere liquidi expansum, quam ego quoque mea Elastica attribuam.* Dicendum potius fuisset, *esse Elasticam, quam ego quoque asseram figura lintei*; quandoquidem, post demonstrationem a me in *Actis Lips.* (g) exhibitam de Elastica, nemo dubitare possit; cum contra de figura lintei id aliter hucusque non constiterit, nisi quod illud sæpe numero affirmaverim in *Actis*, eo jam tempore, quo *Frater* adhuc longe diversum sentiebat. Sed gaudeo, Geometris veritatem asserti mei paulatim agnosci.

Quod *Minima* concernit, quæ Tabulæ inserui, hoc noto peculiare; quod quamquam eadem sit curva, quæ Maximum $\int p\,dy$ & Minimum $\int(dt:p)$ suppeditat, ista tamen curva priore prærogativa in genere duntaxat figurarum Isoperimetrarum, altera vero in ordine ad omnes omnino curvas potitur (h). Secus se res habet cum Maximo $\int pdy$ & Minimo $\int(dt:p)$: præterquam enim quod non datur Maximum $\int(dt:p)$, quod tale sit in ordine ad omnes curvas, hoc quod tale tantum est inter figuras Isoperimetras,

(f) N°. LXXXII. pag. 816.

(g) N°. LXVI. pag 640. seq.

(h) Quia scil. in æquatione universali pro $\int(dt:p)$ Minimo vel Maximo, $dy = apdx : \sqrt{((bp - aa)^2 - aapp)}$, facta est $b = 0$ ut degeneret in $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$. Sed $b : 1$ erat ratio inter $d\frac{dy}{pdt}$ & $\frac{dy}{dt}$ [Vid. Not. b. Art. II] Idem igitur factum est, ac si posuissemus simpliciter $d\frac{dy}{pdt} = 0$, vel $\frac{dy}{pdt} =$ const. id quod juxta Reg. N. LXXV, Not. a, pag. 771, suppeditat curvam quæ inter omnes dat $\int(dt:p)$ Minimum.

tras, eidem curvæ non competit, cui *Minimum* quadrat $\int p\,dy$, ut ex Tabella liquet. Quemadmodum etiam non existimandum est, curvam illam, quæ uno in situ *Minimum* $\int p\,dy$ subministrat, in alio exhibere *Maximum*, sive, duas priores Tabulæ hujus æquationes designare positiones tantum diversas unius ejusdemque curvæ; quanquam in casu $p = x$ utraque conveniat circulo. Ratio est, quod si per p potentia quædam intelligitur ipsius x, pro exponente habens fractionem, cujus numerator est unitas, denominator numerus quilibet n, curva æquationis $dy = (1 - p)\,dx : \sqrt{(2p - pp)}$ perpetuo mechanica est & a quadratura circuli dependet [solo, quem dixi, casu excepto, ubi $n = 1$,] cum, observante Fratre (i), illa, quæ æquationi $dy = p\,dx : \sqrt{(1 - pp)}$ respondet, fit alternatim algebraica: reperio (k) enim si $n = 2$, applicatam y alterius curvæ fore $= (p + 1)\sqrt{(2p - pp)} - \int(dp : \sqrt{(2p - pp)})$; si $n = 3$, y fore $(pp + p + 3)\sqrt{(2p - pp)} - \int(3\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$; si $n = 4$, $y = (p^3 + pp + \frac{5}{2}p + \frac{15}{2})\sqrt{(2p - pp)} - \int(\frac{15}{2}\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$, & ge-

N.XCIII.

(i) N°. LXXXII. pag. 817.

(k) Etenim, si $p = x^{1:n}$, erit $x = p^n$ & $dx = np^{n-1}\,dp$, quo substituto, erit $y\,[\int((1 - p)\,dx : \sqrt{(2p - pp)})] = n\int((p^{n-1} - p^n)\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$. Sed (A) $n\int(p^n\,dp : \sqrt{(2p - pp)}) = p^{n-1}\sqrt{(2p - pp)} - (2n - 1)\int(p^{n-1}\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$, ut facile liquet. Ergo $y = n\int(p^{n-1}\,dp : \sqrt{(2p - pp)}) + p^{n-1}\sqrt{(2p - pp)} - (2n - 1)\int(p^{n-1}\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$ seu (B) $y = p^{n-1}\sqrt{(2p - pp)} - (n - 1)\int(p^{n-1}\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$. In æquat. B, pro ultimo termino, substitue valorem ejus deductum ex æq. A, in hac scribendo $n - 1$ pro n, & habebis (C) $y = (p^{n-1} + p^{n-2})\sqrt{(2p - pp)} - (2n - 3)\int(p^{n-2}\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$. Hic iterum mutando terminum ultimum juxta æquat. A, habebis (D) $y = (p^{n-1} + p^{n-2} + \frac{2n-3}{n-2}p^{n-3})\sqrt{(2p - pp)} - \frac{2n-3 \cdot 2n-5}{n-2}\int(p^{n-3}\,dp : \sqrt{(2p - pp)})$. Atque ita pergendo, invenies eandem Seriem, quam hic tradit Noster.

N. XCIII. & generaliter $y = (p^{n-1} + p^{n-2} + ap^{n-3} + bp^{n-4} + cp^{n-5} +$ &c. usque ad $+e)\sqrt{(2p - pp)} - \int(edp : \sqrt{(2p - pp)}$, sumendo nempe $a = \frac{2n-3}{n-2}$, $b = \frac{2n-3 . 2n-5}{n-2 . n-3}$, $c = \frac{2n-3 . 2n-5 . 2n-7}{n-2 . n-3 . n-4}$ & $e = \frac{2n-3 . 2n-5 . 2n-7 \ldots\ldots 3}{n-2 . n-3 . n-4 \ldots\ldots 1}$.

Instituta jam collatione inter æquationem $dy = dx\int\frac{pdx}{x} : \sqrt{(1 - (\int\frac{pdx}{x})^2)}$ a Fratre menſ. *Dec.* 1697 (1) exhibitam, & meam $dy = pdx : \sqrt{(1 - pp)}$ hic traditam; facile eſt animadvertere, utrique convenire non poſſe, niſi cum p ſimplicem poteſtatem denotat ipſius x, qui quidem ipſiſſimus ille caſus eſt, quem ego initio propoſueram: adeo ut ſi ejus ſolutione *Frater* acquieviſſet, neque extendere Problema latius voluiſſet, cæteraque diſſimulaſſet, quod concernit arcum *BF*, ſive *Maximum* $\int qdy$, nunquam certe in paralogiſmi ſuſpicionem apud me incidiſſet; quandoquidem ſolo hoc ſuperpondio, quo ſuam Solutionem generaliorem efficere voluit, vitium methodi ſuæ mihi prodidit; ſieque etiam iis, quæ in ſe alias proba erant, pretium ademit.

Dico diſſimulandam fuiſſe omnino partem Problematis, quæ ſpectat arcum *BF*; quippe quæ de illa profert generaliter fallunt, neque æquatio legitima huc pertinens eſt $dy = dx\int\frac{qdx}{x} : \sqrt{(1 - (\int\frac{qdx}{x})^2)}$; uti per verba ſua, *D'où il eſt évident, &c.* innuere velle videtur; nec etiam $dy = qdx : \sqrt{(1 - qq)}$; ſed potius juxta Tabulam æq. 7. $dy = qdt : \sqrt{(1 + qq)}$, quæ ab illis non modo plane diverſa eſt, etiam quando per q ſimplex denotatur poteſtas ipſius t, verum quoque curvas repræſentat, quæ

(1) N°. LXXXII. pag. 818.

quæ primam mechanicarum claſſem nunquam excedunt, qualiſ- N. XCIII.
cunque ſtatuatur relatio algebraica inter t & q (m); præterquam quod omnes rectificationem admittunt, tangensque anguli, quem ipſæ cum ſuis applicatis conſtituunt, quantitati q ſemper proportionatur (n). In ſpecie obſervare poſſumus, ſi q potentiam denotat ipſius t, cujus index eſt fractio pro numeratore habens unitatem, & pro denominatore quemvis numerum n, conſtructionem curvæ ope ſolius Logarithmicæ perfici poſſe, una coordinatarum x & y ſemper exiſtente algebraica & altera mechanica; idque alternatim juxta ordinem numerorum 1, 2, 3, 4, &c. quos litera n ſignificare poteſt. Reperio enim, (o) ſi hæc

 deno-

(m) Etenim, quamadmodum ex æq. $a\,dy = (q+c)\,dx$, deduximus Nota b, Art. III, $dy = (q+c)\,dt : \surd(aa+(q+c)^2)$, pariter deducitur $dx = a\,dt : \surd(aa+(q+c)^2)$. Igitur ſi ad abſciſſam communem t, deſcribantur duæ curvæ, quarum ordinatæ ſint $(q+c) : \surd(aa+(q+c)^2)$, & $a : \surd(aa+(q+c)^2)$ erit area prioris proportionalis ordinatæ y, poſterioris ordinatæ x curvæ quæſitæ.

(n) Hæc tangens, quæ eſt $dy : dx$ æquatur quantitati $(q+c) : a$. Igitur, quia Noſter facit hic $c = 0$, tangens proportionatur ipſi c.

(o) Etenim, ſi ſtatuas $t = q^n$, & $dt = nq^{n-1}dq$, erit $dy\ [q\,dt : \surd(1+qq)] = nq^n dq : \surd(1+qq)$. Sed eadem ratione qua uſi ſumus N°. LXXXII, pag. 817, Not. e, invenies y, ſeu $n\int(q^n dq : \surd(1+qq)) = q^{n-1}\surd(1+qq) - (n-1)\int(q^{n-2}dq : \surd(1+qq))$. Igitur y ſeu ſummatio ipſius $q^n dq : \surd(1+qq)$ pendet a ſummatione ipſius $q^{n-2}dq : \surd(1+qq)$, & eodem argumento hæc pendet a ſummatione ipſius $q^{n-4}dq : \surd(1+qq)$, &c. Quare tandem deveniemus vel ad $q\,dq : \surd(1+qq)$, quod integrabile eſt & $= \surd(1+qq)$, vel ad $dq : \surd(1+qq)$, quod pendet a Logarithmis ſeu quadratura Hyperbolæ. Iſtud accidit, ſi ſit n par; illud ſi impar. Ergo y algebraice reperitur ſi n impar, per Logarithmos ſi n par. Verum $x\ [a\,dt : \surd(1+qq)] = nq^{n-1}dq : \surd(1+qq)$ pendet a Logarithmis, ſi n impar, quia tunc $n-1$ eſt par: algebraice vero determinatur, ſi n par, quia tunc $n-1$ eſt impar. Ceterum, eadem methodo, quam adhibuimus Nota k, Series Auctoris noſtri facillime inveſtigatur.

N. XCIII. denotet numerum imparem, fore $y = (q^{n-1} - aq^{n-3} + bq^{n-5} - cq^{n-7}$ &c. usque ad $\pm e) \surd(1+qq)$. & si parem $y = (q^{n-1} - aq^{n-3} + bq^{n-5} - cq^{n-7}$ &c.... $.. \pm e) \surd(1+qq) \mp \int(edq : \surd(1+qq))$, sumtis $a = \frac{n-1}{n-2}$, $b = \frac{n-1 \cdot n-3}{n-2 \cdot n-4}$, $c = \frac{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5}{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6}$, ... & $e = \frac{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5 \ldots\ldots 2}{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6 \ldots\ldots 1}$ pro priore hypothesi, vel $e = \frac{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5 \ldots\ldots 3}{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6 \ldots\ldots 2}$ pro posteriore; ne quid dicam de altera coordinatarum x, quæ eodem modo per q definietur. Sumta igitur recta quadam indeterminata, quæ vocetur q. perspicuum est inveniri per illam posse x & y, unam algebraice & per logarithmos alteram, longitudinemque curvæ t semper fore $= q^n$.

Memoratu porro digna sunt, ut alia prætercam; Quod una eademque curva est, quæ (in diversis positionibus) simul & *Maxim.* $\int q\,dy$ & *Max.* $\int(dy : q)$ suppeditat ([p]); Quod eadem quoque exhibet *Minimum Maximum*ve $\int y\,dq$ vel $\int x\,dq$ (*Minimum*, si crescentibus x, y & t crescit q; *Maximum*, si decrescit:) & Quod denique *Catenaria* privilegio inter alia non contemnendo plura comprehendit *Maxima Minima*que; nempe *Maxima* $\int(dy : x)$, $\int t\,dy$, $\int(dy : t)$, $\int y\,dt$, $\int x\,dt$; *Minima* $\int t\,dy$, $\int x\,dt$, $\int y\,dt$, prout ex æquationibus 4, 7, 8, 9, 11 elucet, quæ omnes in casu $p = x$, & $q = t$ curvæ huic conveniunt ([q]). Cæte-

([p]) Nempe cujus æquatio est $dy = q\,dt : \surd(aa+qq)$ sive $dx = a\,dt : \surd(aa+qq)$; aut $dy = a\,dt : \surd(aa+qq)$ sive $dx = q\,dt : \surd(aa+qq)$.

([q]) Cujus æquationem N°. XXXIX ostendimus esse $dy = a\,dz : \surd(2az + zz)$, vel pro z scribendo $x - a$, $dy = a\,dx : \surd(xx - aa)$; aut etiam $dy = a\,dt : \surd(aa + tt)$, nec non $dx = t\,dt : \surd(aa + tt)$.

Cæterum non possum quin moneam, superfluam *Fratrem* operam impendisse quærendis radiis curvaturæ seu osculi suarum curvarum; quippe quod jam dudum in *Actis Lips.* a me factum fuerat; exscribenda tantum fuissent quæ habentur mens. Jun. 1694, p. 267. seq. ([1]) cum hæ curvæ nil sint nisi totidem diversæ species mearum Elasticarum. N.XCIII.

Hæc ad priorem Solutionem fraternam, quæ mens. Dec. 1697 ([2]) comparuit, notanda fuerunt. Quod alteram Solutionem, seu prioris potius correctionem mens. Apr. 1698 ([3]) insertam concernit, notum me rogasse *Fratrem*, ut illam iteratæ revisioni subjiceret, ipsum vero in hunc usque diem nondum exorari se passum. Quapropter ejus hic vices suppleo, Lectoresque nostros moneo, conjecturas has secundas, quoad *Maximum* $\int p dy$ recte quidem, at haud æque feliciter quantum ad *Maximum* $\int q dy$ cessisse; locoque æquationis dq [vocando q quod ipsi est v] $= ddy : (dt^2 - dy^2)$, scribendum fuisse $dq = a ddy : dx$, sumpto elemento non ipsius curvæ dt, sed ordinatæ dx pro constanti; quod ex æquatione 7[ma]. Tabulæ meæ facile ostenditur: Æquatio est $dy = q dt : \sqrt{(aa + qq)}$; hinc fit dx [$\sqrt{(dt^2 - dy^2)}$] $= a dt : \sqrt{(aa + qq)}$; adeoque $dy : dx = q : a$, hoc est $a dy = q dx$, & differentiando $a ddy = dq dx$, sive $dq = a ddy : dx$. Q. E. D.

([1]) N°. LVIII. pag. 582. & seq. ([2]) N°. LXXXII.
([3]) N°. LXXXIV.

N°. XCIV.

JACOBI BERNOULLI

NOVA METHODUS

Expedite determinandi radios osculi, seu curvaturæ, in curvis quibusvis algebraicis.

Acta Erud. Lips. 1700. Nov. p. 508

Methodus hæc, nec in radicum æqualitate, nec in Theorematis nostris *Jun. Act. 1694* * exhibitis fundata, sed singulari quadam eruta ratione †, radium curvaturæ in omni curva algebraica, citra ullum differentialium adminiculum, generaliter exhibet; idque tanta facilitate & promtitudine, ut nihil possit expeditius. Sufficit enim pro singulis æquationis terminis, e vestigio & nullo prævio calculo, alios quosdam substituere, prout e mox dicendis patebit.

Esto curvæ cujusvis algebraicæ [cujus utique tangens inventa supponitur] abscissa $AB = x$, applicata $BC = y$, & subnormalis $BD = z$, [quæ omnes datæ sunt, ob datum C punctum,] & sit inveniendus radius osculi, seu curvaturæ CE.

Regula. Æquatione tota, quæ curvæ naturam exprimit, ad unam partem constituta; & deleto, si adsit, termino, quem neutra indeterminatarum x & y ingreditur; reliquorum singuli, in quibus reperitur sola x, repræsententur per fx^m; in quibus sola y, per gy^n, & in quibus reperiuntur junctim x & y, per $hx^r y^s$; deno-

* N°. LVIII. pag. 578. 579. † N°. CIII. Art. XXII. XXIII. XXIV.

denotantibus, nempe, litteris f, g, h, terminorum ſuorum co- N. XCIV.
efficientes, & literis m, n, r, s exponentes poteſtatum ipſarum x & y. Tum vero fiat fractio

		in cujus . . . numeratore	denominatore
pro ſingulis	fx^m	fubſtituatur $+mfx^{m-1}z$ . .	$+(m-mm)fx^{m-2}yy$
	gy^n	$-ngy^n$	$+(n-nn)gy^{n-2}zz$
	$hx^r y^s$	$+rhx^{r-1}y^s z$	$+(r-rr)hx^{r-2}y^{s+2}$
		$-shx^r y^s$	$+(s-ss)hx^r y^{s-2}zz$
			$-2rshx^{r-1}y^s z$

hoc eſt, loco datæ æquationis $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$ [quæ forma eſt, ad quam omnes referuntur,] ſcribatur $(mfx^{m-1}z - ngy^n + rhx^{r-1}y^s - shx^r y^s) : (+(m-mm)fx^{m-2}yy + (n-nn) gy^{n-2}zz + (r-rr)hx^{r-2}y^{s+2} + (s-ss)hx^r y^{s-2}zz - 2rshx^{r-1}y^s z)$; quo facto, ut denominator fractionis ad ipſius numeratorem, ſic erit CD ad radium oſculi quæſitum.

E x e m p l. I. Æquatio pro Parabolis omnis generis eſt $x - y^n = 0$. Conferatur x cum fx^m, & $-y^n$ cum gy^n; erit $f = 1$, $m = 1$, $g = -1$, & $n = n$; quibus valoribus ſubſtitutis reſultat fractio $(z + ny^n) : ((nn-n)y^{n-2}zz) = (z + nx) : ((nn-n)y^{n-2}zz) =$ [ob $ny^{n-2}z = 1$, ex natura Parabolarum] $(z + nx) : ((n-1)z)$; unde $(n-1)z : z + nx =$ CD : CE, ſive $z : z + nx =$ CD : $(n-1)$ CE; quod propter ſubtangentem Parabolæ BF $= nx$, hanc facillimam Conſtructionem ſuppeditat. Ex puncto F, ubi tangens CF ſecat axem, excitetur axi perpendicularis FG, cui

N. XCIV. cui occurrat producta DC in G, erit $DG = (n - 1)\ CE$; adeoque $CE = \frac{1}{n-1} DG$.

EXEMPL. II. Sit æquatio curvæ $y^3 + x^3 + xxy - xyy + a^3 - aay + aax - axx + ayy = 0$. Neglectis a^3 & collatis

$+y^3$ cum gy^n, habetur . . . . $g = 1$, & $n = 3$
$+x^3$ . . . . fx^m . . . . . . $f = 1$ & $m = 3$
$+xxy$ . . . $hx^r y^s$ . . . . . $h = 1$, $r = 2$, $s = 1$
$-xyy$ . . . $hx^r y^s$ . . . . . $h = -1$, $r = 1$, $s = 2$
$-aay$ . . . . gy^n . . . . . . $g = -aa$, $n = 1$
$+aax$ . . . fx^m . . . . . . $f = aa$, $m = 1$
$-axx$ . . . fx^m . . . . . $f = -a$, $m = 2$
$+ayy$ . . . . gy^n . . . . $f = a$, $n = 2$

quibus ubique surrogatis, exurgit fractio $(-3y^3 + 3xxz + 2xyz - xxy - yyz + 2xyy + aay + aaz - 2axz - 2ayy) : (-6yzz - 6xyy - 2y^3 - 4xyz + 2xzz + 4yyz + 2ayy - 2azz)$. Dico hujus denominatorem ad numeratorem se habere ut CD ad quæsitam CE.

OBSERV. I. Cum data sit relatio inter x, y, z, seu AB, BC, BD, CD; poterit, ejus ope, semper una pluresve harum quantitatum e fractione eliminari, eoque quæsitum in terminis plerumque simplicioribus exhiberi; ut supra, in *Exemplo* I, contigit.

OBSERV. II. Non opus est, ex data æquatione tollere prius fractiones & surditates, quando hæ simplices duntaxat potestates quantitatum x & y innuunt. Tantundem enim est, ex. gr. $aa : x$ atque aax^{-1}, $\sqrt{ax}$ atque $a^{1:2}x^{1:2}$, $\sqrt[3]{xyy}$ atque $x^{1:3}y^{2:3}$, &c.

OBSERV.

OBSERV. III. Imo nunquam illas tollere est opus, etiamsi N. XCIV. signa radicalia binomia & multinomia involvant. Non minus enim assignari potest, quid pro talibus in fractione sit substituendum. Sic si habeatur, in æquatione, quantitas surda $\sqrt[n]{(x^m + a^m)}$, brevitatis causa, dicta p; ejus loco, in numeratore fractionis surrogo $(mx^{m-1}z) : np^{n-1}$, in denominatore repono $+((m - mm)x^{m-2}yy) : np^{n-1} + ((n-1)mmx^{2m-2}yy) : nnp^{2n-1}$, pariterque etiam in aliis.

OBSERV. IV. Haud absimili methodo, tangentibus inveniendis Regula præscribi potest, quanquam eadem vulgari quoque differentialium Calculo haud difficulter eliciatur. Sit rursum data æquatio $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$. Dico fore subnormalem BD $= (-mfx^{m-1} - rhx^{r-1}y^s) : (+ngy^{n-2} + shx^r y^{s-2})$; subtangentem BF $= (-ngy^n - shx^r y^s) : (+mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s)$; segmentum axis AF $= (-ngy^n - shx^r y^s - mfx^m - rhx^{r-s}) : (+mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s)$; cui Regulæ similem in primo *Actorum* anno exhibuit Nob. D. TSCHIRNHAUS, nisi quod ipse, in ordinanda æquatione, ad maximam potestatem y respicere jubeat, quod hic non est necesse. Sufficit quod omnes termini æquationis ab una parte collocentur.

Atque hæc sunt, quæ publico hac vice impertiri lubuit. Eorum veritatem qui examinare velit, Regulam nostram tentet in variis curvis, de quorum radiis curvaturæ per alias methodos jam constat: qui vero in artificium inventionis ipsum curiosius inquirit, hoc sibi ad solvendum, velut ænigma, proponat; donec solutum dedero ipse.

Vide Num. CIII. Art. XXII. XXIII. XXIV.

N°. XCV.

JACOBI BERNOULLI QUADRATURA ZONARUM CYCLOIDALIUM PROMOTA;

Problema item centri gravitatis Sectoris solidi Cycloïdici solutum.

Confer. Num. XCII.

Acta Erud. Lips. 1700. Dec. p. 551.

QUemadmodum Problema sectionis angularis in ratione determinata numeri ad numerum, algebraicum est (*); sed indefinite in data ratione quacunque, transcendens: ita quoque Zonæ cycloïdales quadrabiles, qualis IKDB, [*Fig.* 1] algebraïce quidem determinantur, sicubi ratio arcuum AM & AL datur in numeris; indefinite vero, & generaliter, nulla æquatione algebraica finita exhiberi possunt; quamvis interim Problema facillime construere liceat, hoc modo: Sit AC portio cycloidis, A vertex, AH axis, AQ quadrans circuli genitoris, H centrum circuli. Fiat AP perpendicularis & æqualis ipsi AH, datoque in ea ubivis puncto G, bisecetur GP in R, ac junctæ HG ducatur parallela recta RS. Trajecta porro indefinite recta CEF parallela

(*) Vide Num. XCVII.

la ipſi HQ, quæ ſecet cycloïdem in C, circulum genitorem in E, & axem in F; abſcindatur in HQ quarta proportionalis ad AH, AG & CE, quæ ſit HT: centro T, radio circuli genitoris, deſcribatur arcus circuli ſecans cycloïdem in duobus punctis, quorum remotius ab axe ſit V, per quod tranſeat recta VN, parallela ipſi HQ & producta in O, ut ſit NO = HF; erit O ad curvam quandam OSP, quæ rectam RS ſecabit in puncto optato S: hinc enim ſi demittatur in axem SK parallela HQ, eique abſcindatur æqualis HI, ac per K & I agantur rectæ KD & IB, itidem parallelæ ipſi HQ, quæque ſecent cycloïdem in D & B, circulum genitorem in M & L, erit & zona IKDB quadrabilis, hoc eſt, æqualis triangulis rectilineis HAL — HAM + IAL — KAM; & arcus AM ad AL in ratione data AG ad AH, ut requirebatur, Demonſtrationem, quæ intellecta noſtra analyſi p. 427, A. *1699*, ([b]) neminem latere poteſt, addere ſuperſedeo. Inventio porro ſectoris ſolidi IBAD, [*Fig.* 2.] oriundi ex converſione ſectoris plani SAB circa axem AI, qui centrum gravitatis habeat algebraice determinabile, calculum requirit prolixum magis, quam arduum. Salvo enim hujus errore, reperio No. XCV.

Xxxxx 2

([b]) Vide Num. XCII. Ex quo liquet Zonam IKDB eſſe quadrabilem, ſi arcu AM ad arcum AL exiſtente ut 1 ad n, ratio ipſius HI [z] ad ipſam HK [x] exprimitur per æquationem $z = (n-1)a : 2n + x : n$. Utrumque autem hic exequitur noſter. Primo enim, ſi ponas AG ad AH [a] ut 1 ad n, cum ſit AH : AG = [$n : 1$] = CE : HT, erit HT = CE : n. Ductæ autem TV, HX, cum ſint æquales radio atque adeo inter ſe, inter parallelas VN, CF, abſcindent æquales VX, HT. Eſt igitur VX = CE : n. Sed, ex nat. Cycloidis, VX = arc. AX, & CE = arc. AE. Igitur AX : AE = 1 : n. Hæc igitur eſt curvæ PSO natura, ut ſumpta HF = NO, ſit arcus AE ad arcum AX ut n ad 1. Itaque cum ſit HI = SK, erit AL ad AM ut n ad 1. Deinde cum ſit AP = AH = a, & AG = $a : n$, erit PR = GR [ſemidifferentia ipſarum AP, AG] = $(n-1)a : 2n$. Et cum ſit HA : AG [$= n : 1$] = HK [x] : KY, erit KY = $x : n$, adeoque SK = $(n-1)a : 2n + x : n$. Eſt autem SK = HI = z. Igitur $z = (n-1)a : 2n + x : n$.

Ergo, ex demonſtr. N°. XCII, Zona IKDB quadrabilis eſt & æqualis $aq - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px$ ſeu HA. IL — ½ HI. IL — HA. KM + ½ HK

No. XCV. rio quod, poſita $AH = 1$, ſumtaque $AK = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $KI = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$, diſtantia centri gravitatis Sectoris a vertice A, ſit futura $(9 + 22\sqrt{\tfrac{1}{2}}) : (6 + 30\sqrt{\tfrac{1}{2}})$ (c).

$\frac{1}{2} HK . KM = 2HAL - HIL - 2HAM + HKM = HAL + IAL - HAM - AKM.$

(c) Vide Num. CIII. Art. XXXI.

N°. XCVI.

N°. XCVI.

Q. D. O. M. B. V.

ANALYSIN MAGNI PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI,

In Actis Erudit. Lipſ. menſ. Mai. 1697.

propoſiti,

Sub præſidio

JACOBI BERNOULLI

Math. Prof. & Academiæ p. t. Rectoris,

publice defendendam

Suſcepit

Joh. Jacobus EPISCOPIUS, Baſil.

Ipſis Calendis Martiis 1701.

Edita primum

BASILEÆ,

1701.

Et in *Actis Erudit. Lipſ.* Mai. 1701. pag. 213.

INCOMPARABILIS

VIRORUM QUADRIGÆ,

Dn. MARCHIONIS HOSPITALII,

Dn. GODOF. GUILIELMI LEIBNITII,

Dn. ISAACI NEWTONI,

Dn. NICOLAI FATII DUILLERII,

Principum Mathematicorum,

Nominibus illustrissimis,

Analysin suam devota mente inscribit,

æquissimis Censuris

demisse subjicit,

Præses.

ANA-

ANALYSIS MAGNI PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI.

N. XCVI.

MAGNUM Problema appello, non tam ob solvendi difficultatem, [etsi tantam, ut certare facile possit cum difficillimis,] quam quod ad provehendos Scientiæ fines, novasque regiones lustrandas viam nobis aperit. Cum enim cetera huc usque, seu in materia, seu in abstracto, proposita & agitata Problemata in primi secundique gradus differentialibus subsistant; hoc unum, limitibus quasi tam arctis circumscribi nescium, in altiorem penetrat elementorum classem. Neque Problematis natura pati videtur, ut via reperiatur, qua sine tertii gradus differentiis absolvi possit (a). *Et quemadmodum æquatio simpliciter diffe-*

(a) Vide tamen N°. XCIII, Nota b, pag. 875. seq.

N. XCVI. *differentialis exurgit, cum unius particulæ curvæ situs ad axem expenditur: nec non æquatio differentio-differentialis, cum duarum particularum mutua ad se invicem inclinatio consideratur, [quorum illud contingit, ubi data Curvæ affectio Tangentes duntaxat respicit; hoc, ubi Osculi seu Curvaturæ conditionem complectitur:] ita consentaneum est, ut ad tertias delabi differentias necessum sit, cum trium particularum curvæ inter se mutua relatio spectatur; tot enim, non pauciores, Isoperimetria conditio requirit: multiplicatis igitur objectis, perplexitatem augeri quid mirum? Hanc autem feliciter superaturis, arduique Problematis analysin methodice exhibituris, opera danda est ut generalia separentur a specialibus, illaque his, Theorematum lemmaticorum instar, præmittantur.*

Ad rem.

THEOREMA I.

In qualibet Curva, si plures applicatæ contiguæ se mutuo sequantur, quarum prima seu minima vocetur x', *vel* x *simpliciter, proxime major* x'', *tertia* x''', *quarta* x'''', &c. *erit* $x'' = x + dx$, $x''' = x + 2dx + ddx$, $x'''' = x + 3dx + 3ddx + dddx$, *numeris scil. terminorum ordine exprimentibus coefficientes potestatum binomii. Si vero applicatarum maxima dicatur* x, *proxime minor* x'', *sequens* x''', *&c. erit* $x'' = x - dx$, $x''' = x - 2dx + ddx$, $x'''' = x - 3dx + 3ddx - dddx$, *signis insuper + & — alternatim se excipientibus, ut in potestatibus apotomarum. Non secus si applicatarum differentia prima ordine vocentur* dx' [*vel* dx], dx'', dx''', dx'''', *&c. erit* $dx'' = dx \pm ddx$, $dx''' = dx \pm 2ddx + dddx$, $dx'''' = dx \pm 3ddx + 3dddx \pm ddddx$. *Et si earundem differentiæ secundæ designentur per* ddx' [ddx], ddx'', ddx''', *&c. erit* $ddx'' = ddx \pm dddx$, $ddx''' = ddx \pm 2dddx + ddddx$. ($\pm$ *significat + in priore & — in posteriore hypoth.*)

De-

DEMONSTRATIO.

$$x'' = x \pm dx. \qquad dx'' = dx \pm ddx. \qquad ddx'' = ddx \pm dddx.$$

$$x''' = x'' \pm dx'' = x \pm 2dx + ddx. \quad dx''' = dx'' \pm ddx'' = dx \pm 2ddx + dddx$$

$$x'''' = x''' \pm dx''' = x \pm 3dx + 3ddx \pm ddx.$$

Q. E. D.

Simili modo, si abscissæ ab applicatis portiones axis ordine vocentur y' $[y]$, y'', y''', y'''', &c. ostenditur, fore $y'' = y \pm dy$, $y''' = y \pm 2dy + ddy$, $y'''' = y \pm 3dy + 3ddy \pm dddy$; ut & $dy'' = dy \pm ddy$, $dy''' = dy \pm 2ddy + dddy$. Et si resectæ portiones ipsius curvæ dicantur z' $[z]$, z'', z''', &c. fore $z'' = z \pm dz$, $z''' = z \pm 2dz + ddz$, &c. nec non $dz'' = dz \pm ddz$, $dz''' = dz \pm 2ddz + dddz$, &c. Intellige, nisi forte differentiæ primæ quantitatis variabilis y vel z ponantur æquales; quo casu altiores ejus differentiæ omnes evanescunt.

Nota, supponi, quod crescente vel decrescente quantitate variabili, crescant vel decrescant simul omnes ejus differentiæ: quanquam enim plerumque secus accidit, id tamen calculum non turbat, nec aliud infert, quam differentias quasdam suppositionis nostræ esse negativas; cum negative crescere decrescere sit, & contra. Quæ autem differentiæ in quovis particulari Problemate negativæ sint, quæ positivæ, absoluta demum analysi definietur.

THEOREMA II.

Data sit positione recta AT, [Fig. 1] *extraque illam, in diversis distantiis, puncta quatuor* B, F, G, C, *per qua transeant rectæ* BH, FK, GL, CI *perpendiculares, &* BX, FY, GZ *parallelæ ipsi* AT. *Tum, fixis manentibus extremis punctis* B *&* C, *reliqua* F, G *moveri incipiant super datis positione rectis* FK, GL; *hac tamen lege, ut summa trium jungentium rectarum* BF +

N.XCVI. FG + GC *maneat constans & eadem : erit fluxio momentanea puncti* F *ad fluxionem momentaneam puncti* G, *hoc est, incrementum vel decrementum rectæ* KF *ad decrementum vel incrementum rectæ* LG, *ut differentia inter duo priora ad differentiam inter duo posteriora trium solidorum sub* CZ, BF, FG; *sub* GY, BF, GC; *& sub* FX, FG, GC ([b]).

Ut Theorema exprimatur symbolice, sunto

$BX = l$	$FX = p$	$BF = s$
$FY = m$	$GY = q$	$FG = t$
$GZ = n$	$CZ = r$	$GC = u$

nec non $HB = b$	adeoque
$KF = f = b + p$	$df = dp$
$LG = g = b + p + q$	$dg = dp + dq.$

Dico, fore $df : -dg = rst - qsu : qsu - ptu.$

DEMONSTRATIO.

Partim propter triangula rectangula *BXF*, *FYG*, *GZC*; partim ob puncta fixa *B* & *C*, ac per hypothesin; habentur sequentes sex æqualitates :

$$BX^2 + FX^2 = BF^2. \text{ id est } ll + pp = ss$$
$$FY^2 + GY^2 = FG^2 \ldots\ldots mm + qq = tt$$
$$GZ^2 + CZ^2 = GC^2 \ldots\ldots nn + rr = uu$$

$BX + FY + GZ =$ const.	$l + m + n =$ const.
$FX + GY + CZ =$ const.	$p + q + r =$ const.
$BF + FG + GC =$ const.	$s + t + u =$ const.

unde,

([b]) Hoc Theorema idem est cum eo quod demonstravimus, N°. XCIII, Not. b, de conditione æqualis perimetri, juxta secundam hypothesin.

unde, differentiando, emergunt, pro fluxu indeterminato pun- N. XCVI.
ctorum F, G, æquationes

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } l\,dl + p\,dp = s\,ds & \text{IV. } dl + dm + dn = 0 \\ \text{II. } m\,dm + q\,dq = t\,dt & \text{V. } dp + dq + dr = 0 \\ \text{III. } n\,dn + r\,dr = u\,du & \text{VI. } ds + dt + du = 0 \end{array}$$

pro quibus, in casu hujus Theorematis, ob fluxum punctorum F, G in rectis KF, LG [qui rectas BX, FY, GZ, seu l, m, n, invariatas relinquit, ipsasque proin dl, dm, dn cum tota æquatione IV evanescere facit] scribendæ,

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } p\,dp = s\,ds & \\ \text{II. } q\,dq = t\,dt & \text{V. } dp + dq + dr = 0 \\ \text{III. } r\,dr = u\,du & \text{VI. } ds + dt + du = 0 \end{array}$$

sic ut sex tantum differentialia & quinque æquationes remaneant, quarum beneficio quatuor ex illis omnifariam tolli, & reliquorum duorum ratio ad invicem inveniri potest. Nam ex. gr. per VI, habetur $du = -ds - dt$ & per V, $dr = -dp - dq$; qui valores in III loco dr & du substituti, faciunt $dt = (r\,dp + r\,dq - u\,ds) : u$; & hic loco dt surrogatus in II, producit $ds = (rt\,dp + rt\,dq - qu\,dq) : tu$; qui denique positus pro ds in I, exhibet $(ptu - rst)\,dp = (rst - qsu)\,dq$; unde $dp : dq = rst - qsu : ptu - rst$; nec non componendo $dp : dp + dq$ [hoc est, $df : dg$] $= rst - qsu : ptu - qsu$, seu, variatis signis secundi & quarti termini, $df : -dg = rst - qsu : qsu - ptu$. *Q. E. D.*

THEOREMA III.

Ponantur, quæ in præcedenti, rursumque summa rectarum BF + FG + GC *constanter maneat eadem; sed fluant puncta* F, G *in peripheriis circulorum super punctis fixis* B, C *descriptorum, secum*

N. XCVI. *ducentia rectas* KF, LG; *erit incrementum momentaneum rectæ* KF *ad decrementum momentaneum rectæ* LG, *aut vicissim decrementum illius ad incrementum hujus, ut differentia inter duo priora ad differentiam inter duo posteriora trium solidorum sub* BX, FY, CZ; *sub* BX, GZ, GY, *& sub* FY, GZ, FX ([c]).

Hoc est in symbolis, erit $df : -dg = lmr - lnq : lnq - mnp$.

DEMONSTRATIO.

Durante fluxu punctorum F, G in peripheriis circa B, C; cum invariatæ maneant singulæ BF, FG, GC, seu s, t, u; evanescantque adeo ds, dt, du, una cum æquatione VI Theorematis præced. cæteræ ibidem pro fluxu punctorum indeterminato repertæ æquationes ad has quinque reducuntur:

I. $l\,dl + p\,dp = 0$	IV. $dl + dm + dn = 0$
II. $m\,dm + q\,dq = 0$	V. $dp + dq + dr = 0$
III. $n\,dn + r\,dr = 0$	

Per V habetur $dr = -dp - dq$, & per IV, $dn = -dl - dm$; quibus valoribus substitutis in III, fit $dm = (-r\,dp - r\,dq - n\,dl) : n$; & hinc in II, $dl = (-mr\,dp - mr\,dq + nq\,dq) : mn$, indeque tandem in I, $(mnp - lmr)\,dp = (lmr - lnq)\,dq$; quare $dp : dq = lmr - lnq : mnp - lmr$; & componendo $dp : dp + dq\ [df : dg] = lmr - lnq : mnp - lnq$; seu $df : -dg = lmr - lnq : lnq - mnp$. *Q. E. D.*

([c]) Redit hoc Theorema ad id quod demonstravimus de conditione isoperimetri, juxta primam hypothesim N°. XCIII, Nota b; pag. 876.

THEO-

THEOREMA IV.

Intelligantur in qualibet Curva ABD *quatuor ordinatim applicata contigua* HB, KF, LG, IC, *intervallulis aqualibus & infinite parvis* HK, KL, LI *discreta, & intercipientes Curvæ portiunculam* BFGC; *quarumque* [*si vis*] *prima seu minima* HB *vocetur* x, *sicut* AH, y, *&* AB, z. *Tum vero mutetur paululum curvedo portiuncula* BFGC *fluxu punctorum* F, G *super applicatis suis* KF, LG; *sic tamen ut longitudo particula inter extrema puncta fixa* B, C *non mutetur. Erit incrementum aut decrementum applicatæ* KF *ad decrementum vel incrementum applicatæ* LG, *ut* $+dz^2ddx + dz^2dddx - dxddx^2$ *ad* $+dz^2ddx + 2dxddx^2$.

DEMONSTRATIO.

Casus hic est specialis Theorematis secundi, a quo non differt, nisi quod hic, ob infinite propinqua puncta B, F, G, C rectæ BX, FX, BF, &c. seu l, p, s, cæteræque, considerentur ut infinite parvæ, abeantque respectu Curvæ in differentialia seu elementa dy, dx, dz, &c. Unde per Theorema I, quantitates hæ fient

BX seu $l = dy' = dy$
FY... $m = dy'' = dy + ddy$
GZ... $n = dy''' = dy + 2ddy + dddy$

FX seu $p = dx' = dx$
GY... $q = dx'' = dx + ddx$
GZ... $r = dx''' = dx + 2ddx + dddx$

BF seu $s = dz' = dz$
FG... $t = dz'' = dz + ddz$
GC... $u = dz''' = dz + 2ddz + dddz$

N. XCVI. Solida vero ex illis rst, qsu, ptu, quorum differentiæ, vi Theorematis secundi, quæsitum exhibent, multiplicatione inveniuntur, ut sequitur:

$$\begin{aligned} r &= dx + 2ddx + dddx \\ st &= dz^2 + dzddz \\ \hline rst &= dxdz^2 + 2dz^2ddx + dz^2dddx \\ &\quad + dxdzddz + 2dzddzddx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= dz + 2ddz + dddz \\ qs &= dxdz + dzddx \\ \hline qsu &= dxdz^2 + 2dxdzddz + dxdzdddz \\ &\quad + dz^2ddx + 2dzddzddx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= dz + 2ddz + dddz \\ pt &= dxdz + dxddz \\ \hline ptu &= dxdz^2 + 3dxdzddz + dxdzdddz \\ &\quad + 2dxddz^2 \end{aligned}$$

& facta substractione, eorum differentiæ:

$$rst - qsu = + dz^2ddx + dz^2dddx - dxdzddz - dxdzdddz \quad \Big| \quad qsu - ptu = dz^2ddx + 2dzddxddz - dxdzddz - 2dxddz^2$$

ad quas abbreviandas eliminari possunt ddz & $dddz$, hoc pacto: Quoniam $dz^2 = dy^2 + dx^2$, atque, ob æquidistantes ex hypothesi applicatas, dy est constans; sumendo differentias habetur $dzddz = dxddx$; iterumque differentiando $dzdddz + ddz^2 = dxdddx + ddx^2$, hoc est, $dzdddz = dxdddx + ddx^2 - ddz^2 =$ [delendo ddz^2] $dxdddx + ddx^2 - dx^2ddx^2 : dz^2$; quibus valoribus in locum $dzddz$ & $dzdddz$, nec non dy^2 in locum $dz^2 - dx^2$ suffectis, exsurgit

$rst - qsu = + dy^2 ddx + dy^2 dddx - dxdy^2 ddx^2 : dz^2$ | $qsu - ptu = dy^2 ddx + 2dxdy^2 ddx^2 : dz^2$ N. XCVI.

unde consequitur, quod Increm. *KF*: Decr. *LG* [$= rst - qsu : qsu - ptu$, per Theor. II.] $= dy^2 ddx + dy^2 dddx - \frac{dxdy^2 ddx^2}{dz^2} : dy^2 ddx + \frac{2dxdy^2 ddx^2}{dz^2} =$ [facta communi multiplicatione per $\frac{dz^2}{dy^2}$] $dz^2 ddx + dz^2 dddx - dxddx^2 : dz^2 ddx + 2dxddx^2$, Q. E. D.

Nota, quantitates *r*, *s*, *t*, &c. earumque producta constare diversorum ordinum aut classium differentialibus, quorum posteriora prioribus gradatim sunt incomparabiliter minora; quocirca ne permisceantur, opera danda in sumendis solidis, ut, quæ sunt ejusdem ordinis, interque sese comparari possunt, in eodem sibi articulo respondeant. Pergendum autem est in operatione ad tertium usque ordinem, non ultra; cum primi & secundi ordinis quantitates omnes, in calculi progressu, se mutuo destruant; quæ vero tertium ordinem excedunt, ob contemnendam priorum respectu parvitatem, tuto negligantur; quemadmodum etiam supra factitatum videmus, ubi producta ex *dzddz* per *dddx*, ex *dzddx* & *dxddz* per *dddz* in calculo compendiose insuper habentur.

THEOREMA V.

Sunto in qualibet Curva quatuor applicatæ contiguæ HB, KF, LG, IC, *quarum rursum prima & minima* HB *vocetur* x, *uti* AH, y, *&* AB, z; *quæque intercipiant tres Curvæ particulas æquales & infinite parvas* BF, FG, GC. *Mutetur vero paululum curvedo harum partium rotatione extremarum* BF, GC *circa puncta fixa* B, C, *sic temperata, ut nec singulæ, nec universæ longitu-*

N. XCVI. *gitudine varient. Erit incrementum vel decrementum applicatæ* KF, *ad decrementum vel incrementum applicatæ* LG, *ut* $dy^2ddx + dy^2dddx + dxddx^2$ *ad* $dy^2ddx - 2dxddx^2$.

DEMONSTRATIO.

Casus est Theorematis tertii; abeuntibus hic iterum rectis BX, FX, BF &c. seu *l*, *p*, *s*, cæterisque, in infinite parva seu differentialia *dy*, *dx*, *dz*, &c. Quapropter eorum solida *lmr*, *lnq*, *mnp*, & solidorum differentiæ, quæ per Theorema dictum quæsitam rationem manifestant, eodem modo reperiuntur, quo in præcedenti.

En operationem.

$$r = dx + 2ddx + dddx$$
$$lm = dy^2 + dyddy$$
$$lmr = dxdy^2 + 2dy^2ddx + dy^2dddx + dxdyddy + 2dyddxddy$$

$$n = dy + 2ddy + dddy$$
$$lq = dxdy + dyddx$$
$$lnq = dxdy^2 + 2dxdyddy + dxdydddy + dy^2ddx + 2dyddxddy$$

$$n = dy + 2ddy + dddy$$
$$mp = dxdy + dxddy$$
$$mnp = dxdy^2 + 2dxdyddy + dxdydddy + dxdyddy + 2dxddy^2$$

atque adeo

$$lmr - lnq = + dy^2ddx + dy^2dddx - dxdyddy - dxdydddy$$

$$lnq - mnp = + dy^2ddx + 2dyddxddy - dxdyddy - 2dxddy^2$$

Porro

Porro eliminari possunt ddy & $dddy$ hoc modo: Consideretur $dy^2 == dz^2 - dx^2$, ipsumque dz esse constans, ob æquales supposi- N. XCVI.
tas curvæ particulas; unde bis differentiando, fit primo $dyddy == -dxddx$, deinde $dydddy == -dxdddx - ddx^2 - ddy^2 ==$ [sublato ddy^2] $-dxdddx - ddx^2 - dx^2ddx^2 : dy^2$; his namque in locum $dyddy$ & $dydddy$, ipsoque dz^2 in locum $dx^2 + dy^2$ succenturiatis, provenit.

$$lmr - lnq == dz^2ddx + dz^2dddx + dxdz^2ddx^2 : dy^2 \quad \Big| \quad lnq - mnp == dz^2ddx - 2dxdz^2ddx^2 : dy^2$$

e quo colligitur, quod Increm. KF: Decrem. LG [$== lmr - lnq : lnq - mnp$, per Theor. III] $== dz^2ddx + dz^2dddx + \frac{dxdz^2ddx^2}{dy^2} : dz^2ddx - \frac{2dxdz^2ddx^2}{dy^2} ==$ [æque multiplicando per $\frac{dy^2}{dz^2}$] $dy^2ddx + dy^2dddx + dxddx^2 : dy^2ddx - 2dxddx^2$. Q. E. D.

THEOREMA VI.

Si sint duæ quantitates indeterminatæ, minor f, *& hanc augmento infinite parvo superans* g; *rursumque aliæ duæ per has similiter expressæ, vel datæ*, F *&* G; *sitque* $adF == hdf$, *&* $adG == idg$: *Dico, fore* $i == h + dh$.

DEMONSTRATIO.

Ponatur, exempli gratia, $F == \sqrt{(aa + ff)}$, eique similis $G == \sqrt{(aa + gg)}$; erit $adF : df$, seu h, $== af : \sqrt{(aa + ff)}$, & $adG : dg$, seu i, $== ag : \sqrt{(aa + gg)}$. Patet autem, has quantitates $af : \sqrt{(aa + ff)}$, & $ag : \sqrt{(aa + gg)}$, cum & ipsæ similiter sint affectæ, eidem curvæ applicabiles esse, prout ejus abscissæ dicuntur f vel g: quoniam igitur f & g, ex hypoth. denotant abscis-

N. XCVI. fas incremento infinite parvo differentes, erunt respectivæ earum applicatæ h & i sibimet contiguæ & proximæ, ac proinde $i = h + dh$. Q. E. D.

THEOREMA VII.

Si curva ABD, *inter omnes sibi Isoperimetras iisdemque punctis* A, D *interceptas curvas, privilegio cujusdam* Maximi Minimive *potiatur, qualibet ejus particula* BFGC *eodem quoque, præ aliis omnibus, sibi æqualibus, interque puncta* B, C *extensis lineis, privilegio gaudebit.*

DEMONSTRATIO.

Gaudeat enim alia æqualis lineola BEC hoc privilegio, ut *Maximum* illud *Minimum*ve contineat vel producat: majus ergo vel minus continebit aut producet BEC quam BFGC, additoque communiter quod continetur vel producitur ab ipsis AB & CD, majus minusve continebit aut producet tota ABECD quam tota ABFGCD. Non ergo huic competit privilegium *Maximi Minimi*ve; contra hypothesin.

Nota. Sensus Theorematis vel Demonstrationis ejus videtur paulo obscurior, nec satis determinatus; sed planior fiet infra ex applicatione: quod moneo, ne quis morosior Propositionem statim sugillet, cui sensum fortasse ambiguum aut falsum affingi posse viderit.

Hactenus generalia,

Sequuntur nunc ipsa Problemata, ubi pro specialibus singulorum æquationibus inveniendis nihil jam superest aliud, quam ut ratio incrementi vel decrementi rectarum KF, LG, ex speciali cujusque Problematis natura, in aliis adhuc terminis reperiatur; cui negotio facilitando, vel elementa dy, seu HK, KL, LI;

LI; vel elementa dz, seu BF, FG, GC ponenda sunt constantia N. XCVI.
& æqualia; prout in quovis Problemate hoc vel illud simplicius videbitur. Quanquam enim id rem ipsam spectando sit indifferens, sæpe tamen unum quam alterum operationem haud paulo faciliorem reddere potest.

PROBLEMA I.

Datis positione rectis normalibus AT, AM, *& curva quacunque* AN; *quæritur ex omnibus Figuris Isoperimetris super communi base* AT *& inter eadem puncta* A, D *constitutis, illa* ABD, *e cujus singulis punctis* B *si ducantur binæ rectæ* BHP, BMN, *normales ipsis* AT, AM; *ac statuatur pars prioris* $HP = MN$; *ut spatium inde ortum* ATV *omnium a cæteris Isoperimetris similiter genitorum spatiorum sit Maximum Minimumve.* ([d]).

ANALYSIS.

Sit curva optata ABD, & *Maximum Minimumve*, quod ab illa producitur, faciendo ubique $HP = MN$, spatium ATV. Intelligantur in æqualibus interstitiolis HK, KL, LI, quorum singula dicantur l, quatuor applicatæ contiguæ, $HB = b$, $KF = f$, $LG = g$, $IC = c$, totidemque aliæ per has similiter expressæ, propterea que denotandæ per majusculas, $HP = B$, $KR = F$, $LS = G$, $IQ = C$. Erit, per Theor. VII, spatiolum PHIQ, hoc est $HK \times HP + KL \times KR + LI \times LS$, seu $lB + lF + lG$ $=$ *Maximo Minimove*; adeoque ex natura *Maximi Minimique*, ejus differentiale $l\,dF + l\,dG = 0$, seu, dividendo per l, $dF + dG = 0$. [Ob fluxum enim punctorum F, G, quem super rectis KF, LG fieri concipio, solæ applicatarum mediæ KF, LG, KR, LS, seu f, g, F, G, longitudinem mutant, extremis HB, IC, HP, IQ, seu b, c, B, C, constanter iisdem manentibus.]

Zzzzz 2 Pona-

([d]) Videsis N°. XCIII, Nota b, §. I, pag. 875 & seq.

N.XCVI. Ponatur $dF = hdf : a$, & $dG = idg : a$; erit $hdf + idg = 0$; unde proportio, $df : - dg = i : h =$ [per Theor. VI] $h + dh : h$, & quia, per Theor. IV, generaliter quoque habetur $df : - dg = dz^2 ddx + dz^2 dddx - dxddx^2 : dz^2 ddx + 2dxddx^2$, sequitur fore, $h + dh : h = dz^2 ddx + dz^2 dddx - dxddx^2 : dz^2 ddx + 2dxddx^2$, ac dividendo $dh : h = + dz^2 dddx - 3dxddx^2 : + dz^2 ddx + 2dxddx^2$; unde extremis & mediis in se invicem ductis [omisso tamen, quod cæterorum respectu evanescit, producto $2dhdxddx^2$] resultat æquatio specialis nostri Problematis $+ hdz^2 dddx - 3hdxddx^2 = + dhdz^2 ddx$, quæ, ut apparet, ad tertias usque differentias ascendit. Hanc autem ego porro ad secundas, indeque ad primas, sequente analysi reduco (e).

Primo, loco $dxddx$ restituo $dzddz$ [hoc fini, ut tot habeantur quantitates h, dz, ddx, una cum suis differentialibus dh, ddz, $dddx$, quot sunt æquationis membra] eritque $hdz^2 dddx - 3hdzddxddz = dhdz^2 ddx$; deinde transfero omnia ad unam partem, atque divido per dz, ut sit $hdzdddx - 3hddxddz - dhdzddx = 0$. Jam fingo æquationem $h^m dz^n ddx^r =$ const. elevatis tribus quantitatibus h, dz, ddx ad potestates ignotas, sed ex progressu determinandas, m, n, r; factaque differentiatione obtineo $rh^m dz^n ddx^{r-1} dddx + nh^m dz^{n-1} ddx^r ddz + mh^{m-1} dhdz^n ddx^r = 0$, quæ divisione per $h^{m-1} dz^{n-1} ddx^{r-1}$ contrahitur ad hanc, $rhdzdddx + nhddxddz + mdhdzddx = 0$; hæc vero terminotenus collata cum æquatione Problematis $hdzdddx - 3hddxddz - dhdzddx = 0$, exhibet $r = 1$, $n = -3$, & $m = -1$: unde loco fictæ æquationis $h^m dz^n ddx^r =$ const. habetur $ddx : hdz^3 =$ const. $=$ [ex lege homogeneorum & propter constans dy] $\pm 1 : aady$, æquatio nempe differentialis secundi gradus: ad quam ulterius deprimendam, pono rursum æquationem $adx = tdy$, e qua debite tractata fluunt sequentia.

ddx

(e) Vid. infra N°. CIII, Art. XXXII.

$ddx = dtdy : a$, $aadx^2 = ttdy^2$, & [addito $aady^2$] $aadx^2 + aady^2$, id eſt, $aadz^2 = (aa + tt)\,dy^2$, & $dz = dy\sqrt{(aa+tt)} : a$. N. XCVI. Hi vero valores, loco ddx & dz, in æquatione inventa $ddx : hdz^3 = \pm 1 : aady$, ſubſtituti producunt $aadt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)} = \pm hdy : aa = \pm hdx : at$, ſeu [inſtituta multiplicatione per $\pm t$] $\pm aatdt : (aa + tt)\sqrt{(aa+tt)} = hdx : a =$ [propter eandem f & x] $hdf : a =$ [per hyp.] dF; unde, facta ſummatione, acquiritur partim $aa : \sqrt{(aa + tt)}$, partim $a - aa : \sqrt{(aa+tt)} = F$ (e), hoc eſt, applicatæ KR, ſeu huic contiguæ HP aut MN; quam ſi deinceps vocare lubeat p, habebitur tum $p = aa : \sqrt{(aa + tt)}$, tum $p = a - aa : \sqrt{(aa + tt)}$; unde viciſſim & $t = a\sqrt{(aa - pp)} : p$, & $t = a\sqrt{(2ap - pp)} : (a - p)$. Atque hi tandem valores, in poſita æquatione $adx = tdy$, in locum t ſuffecti exhibent, partim $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$, partim $dy = (a - p)\,dx : \sqrt{(2ap - pp)}$, pro æquationibus ſimpliciter differentialibus curvarum, quæ Maximum Minimumve ſpatium ATV [$\int pdy$] ſuppeditant. Quod quidem principaliter inveniendum erat.

Utri vero harum curvarum Maximum, & utri Minimum $\int pdy$ conveniat, ſic indagabimus: Prior æquatio eſt $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$; unde quadrando, $dy^2 = ppdx^2 : (aa - pp)$, & [addendo dx^2] $dy^2 + dx^2$, ſive dz^2, $= aadx^2 : (aa - pp)$; & extrahendo radicem, $dz = adx : \sqrt{(aa - pp)}$; quare $dy : dz = p : a$; hoc eſt, ſumta conſtante dz, dy proportionatur ipſi p. Ergo, ſi creſcentibus x creſcere ſupponantur p, creſcent una quoque ipſa dy; quod indicium eſt, curvam æquationi huic reſpondentem verſus axem AT cavam eſſe. Sit illa [*Fig.* 2] ABC, & rotetur circa chordam AC, gignens ex oppoſito aliam ſibi Iſoperimetron AEC, ac utrique communis applicetur ordinata BEF. Quoniam igitur, ex hypotheſi, p majoris applicatæ x, ſeu BF, major eſt ipſa p minoris applicatæ EF; erit quoque pdy illius

Zzzzz 3 major

(e) Non ſatis completa eſt hæc integratio. Potuiſſet enim ſcribi F vel $p = c \pm aa : \sqrt{(aa + tt)}$, unde haberetur $t = a\sqrt{(a^2 - (c - p)^2)} : (c - p)$, atque $dy = (c - p)\,dx : \sqrt{(a^2 - (c - p)^2)}$.

N. XCVI. major quam $p\,dy$ hujus; ac proinde omnia pdy seu $\int p\,dy$ curvæ ABC majora omnibus $p\,dy$ curvæ AEC; quo circa $\int p\,dy$ curvæ ABC non potest esse *Minimum*. Superest ergo, cum sit alterutrum, ut sit *Maximum*. Quod si crescentibus x decrescant p, decrescent quoque dy, & curva versus axem AT convexa erit: Sit hæc AEC, ejusque rotatu circa chordam AC gignatur ex adverso alia Isoperimetros ABC, & utrique applicetur BEF; unde cum nunc, ex hypothesi, p minoris applicatæ EF reciproce major sit ipsa p majoris applicatæ BF, erit quoque pdy illius major quam $p\,dy$ hujus; omniaque $p\,dy$ curvæ AEC majora omnibus $p\,dy$ curvæ ABC: quare $\int p\,dy$ curvæ AEC nequit esse *Minimum*; rursum igitur *Maximum* ut sit necesse. E quibus constat, quod curva prioris æquationis $dy = p\,dx : \sqrt{(aa - pp)}$ semper Maximum complectatur $\int p\,dy$, utcunque se habeat p respectu x. Eodemque etiam modo ostendi posset, quod curva posterioris æquationis $dy = (a - p)\,dx : \sqrt{(2ap - pp)}$ in omni vicissim casu Minimum $\int p\,dy$ continet. Sed cui Lectoris usui repetita crambe?

PROBLEMA II.

Quæritur ex omnibus Figuris Isoperimetricis, [Fig. 1] *super communi base* AT *& inter eadem puncta* A, D *constitutis, illa* ABD, *cujus singulis applicatis* BH *si respondeant aliæ* HP, *datam habentes relationem ad abscissas ipsius curvæ portiones* AB; *spatium hinc ortum* ATV *omnium a cæteris Isoperimetris similiter genitorum spatiorum sit Maximum Minimumve*. ([b]).

([b]) Videsis N°. XCIII. Nota b, §. III. pag. 875 & seq.

ANA.

ANALYSIS.

Sit rursum, ut nuper, HK $=$ KL $=$ LI $= l$, insuperque

$$\begin{array}{l|l} \text{portio curvæ AB} = \beta & \text{adeoque} \\ AF = AB + BF = \beta + s \ldots = \varphi & d\varphi = ds \\ AG = AF + FG = \beta + s + t = \gamma & d\gamma = ds + dt \end{array}$$

& per has similiter datæ, HP $=$ B, KR $= \Phi$, LS $= \Gamma$. Quoniam igitur spatium ATV ex hypothesi est *Maximum Minimumve*, erit quoque tale, per Theor. VII, ejus portio PHIQ, hoc est, HK×HP + KL×KR + LI×LS sive $lB + l\Phi + l\Gamma$; ac proinde, ex natura *Maximi Minimive*, ejus differentiale $l d\Phi + l d\Gamma = 0$, seu $d\Phi + d\Gamma = 0$ [concipiendo nempe rursum, mutari curvedinem fluxu punctorum F, G super applicatis KF, LG, quo solæ AF, AG, & per has datæ KR, LS mutantur, reliquis AB & HP non mutatis.] Ponatur $d\Phi = hd\varphi : a$ & $d\Gamma = id\gamma : a$, fiet $hd\varphi + id\gamma = 0$, seu $hds + ids + idt = 0$, sive [loco ds & dt introducendo dp & dq, per duas primas æquationes Theor. II,] $hpdp : s + ipdp : s + iqdq : t = 0$, sive, sublatis fractionibus, $hptdp + iptdp + iqsdq = 0$; &, æqualitate in proportionem versa, $dp : dq = - iqs : hpt + ipt$; componendoque, $dp : dp + dq\ [= df : dg] = - iqs : hpt + ipt - iqs$, ac denique mutatis signis secundi & tertii termini, $df : - dg = iqs : hpt + ipt - iqs$. Surrogetur jam loco i, per Theor. VI, $h + dh$; & quantitates p, q, s, t vertantur, per Theor. I, in differentialia [ut factum in demonstr. Theor. IV, nisi quod in sumendis solidis ultra secundum differentialium ordinem nunc progredi non est necesse] hoc pacto:

$$\begin{array}{l|l} qs = dxdz + dzddx & pt = dxdz + dxddz \\ i = h + dh & h + i = 2h + dh \\ \hline iqs = hdxdz + hdzddx & hpt + ipt = 2hdxdz + 2hdxddz \\ \quad + dhdxdz & \quad + dhdxdz \end{array}$$

&

N. XCVI. & facta ſubtractione

$$\begin{array}{l} hpt + ipt - iqs = hdxdz + 2hdxddz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - hdzddx \end{array}$$

quocirca

$$\begin{array}{lll} df : -dg = hdxdz + hdzddx : & hdxdz + 2hdxddz \\ \qquad\qquad\qquad\quad + dhdxdz & \qquad\quad - hdzddx \end{array}$$

ſed, per Theor. IV,

$$\begin{array}{l} df : -dg = dz^2ddx + dz^2dddx : dz^2ddx + 2dxddx^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - dxddx^2 \end{array}$$

quare

$$\begin{array}{lll} hdxdz + hdzddx : hdxdz + 2hdxddz & = dz^2ddx + dz^2dddx : dz^2ddx + 2dxddx^2 \\ \quad + dhdxdz \qquad\qquad - hdzddx & \qquad\qquad - dxddx^2 \end{array}$$

convertendoque

$$\begin{array}{ll} hdxdz + hdzddx : + 2hdzddx & = dz^2ddx + dz^2dddx : + dz^2dddx \\ \quad + dhdxdz \quad - 2hdxddz & \qquad\qquad - dxddx^2 \quad - 3dxddx^2 \\ \qquad\qquad\qquad + dhdxdz & \end{array}$$

ſeu [neglectis compendii gratia in primo & tertio termino differentialibus ſecundi ordinis, ceu nulli amplius uſui futuris, cæteriſque per dz diviſis]

$$\begin{array}{ll} hdx : + 2hdzddx & = dzddx : + dz^2dddx \\ \quad\; - 2hdxddz & \qquad\qquad\quad - 3dxddx^2 ; \\ \quad\; + dhdxdz & \end{array}$$

unde, ductis in ſe invicem extremis & mediis, reſultat $hdxdz^2dddx - 3hdx^2ddx^2 = 2hdz^2ddx^2 - 2hdxdzddxddz + dhdxdz^2ddx$, hoc eſt; [compactis in unum ſecundo & quarto terminis, ſubſtitutione $dxddx$ loco $dzddz$,] $hdxdz^2dddx = 2hdz^2ddx^2 + hdx^2ddx^2 + dhdxdz^2ddx$; quæ eſt æquatio ſpecialis hujus Problematis, ad tertias itidem differentias aſſurgens, quam ſimili qua

qua in præcedenti Problemate usus fui, analysi ad has duas æquationes simplices $dy = qdz : \surd(aa + qq)$. & $dy = (a - q) dz : \surd(bb - 2aq + qq)$ reduco ([h]). Operationem ipsam, ne tædio sim, omitto; sed veritatem asserti confirmabit omissæ analysi, haud ingrata nec inutili varietate, succenturianda synthesis. Meminerit solum Lector, dy rursum esse elementum constans, curvamque AB vel AF, quæ supra erat φ, jam vocari z; & datam per ipsam HP vel KR, quæ dicebatur Φ, nunc appellari q; sic ut, loco $d\Phi = hd\varphi : a$, deinceps habeatur $dq = hdz : a$. N. XCVI.

Æq. I. $dy = qdz : \surd(aa + qq)$.

Esto compendii gr. $\surd(aa + qq) = s$

$$dy = qdz : s$$
$$dz = sdy : q$$
$$dx = ady : q$$
$$dq = hdz : a = hsdy : aq$$
$$ds = qdq : s = hdy : a$$
$$ddx = -adydq : qq = -hsdy^2 : q^3$$

$$dddx = \left\{\begin{array}{l} +3hsdy^2dq : q^4 \\ -hdy^2ds : q^3 \\ -sdy^2dh : q^3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +2hhssdy^3 : aq^5 \\ +ahhdy^3 : q^5 \\ -sdy^2dh : q^3 \end{array}\right.$$

quibus in æquatione inventa substitutis, fit

$$hdxdz^2dddx = \left\{\begin{array}{l} +2h^3s^4dy^6 : q^8 = 2hdz^2ddx^2 \\ +aah^3ssdy^6 : q^8 = hdx^2ddx^2 \\ -ahs^3dy^5dh : q^6 = dhdxdz^2ddx. \end{array}\right.$$

Æq. II. $dy = (a - q)dz : \surd(bb - 2aq + qq)$.

Sit brev. ergo $\surd(bb - aa) = c$, $a - q = r$, $\surd(bb - 2aq + qq) = s$

 $dy =$

([h]) Generalius ad $dy (c \pm q) dz : \surd(ac + (c \pm q)^2)$ reduci poterat.

N. XCVI.

$$dy = rdz : s$$
$$dz = sdy : r$$
$$dx = cdy : r$$
$$dr = -dq = -hdz : a = hsdy : ar$$
$$ds = -rdq : s = -hdy : a$$
$$ddx = -cdydr : rr = chsdy^2 : ar^3$$

$$dddx = \left\{ \begin{array}{l} -3chsdy^2 dr : ar^4 \\ + chdy^2 ds : \ ar^3 \\ + csdy^2 dh : \ ar^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + 2chhssdy^3 : aar^5 \\ + c^3 hhdy^3 : aar^3 \\ + csdy^2 dh : ar^3 \end{array} \right.$$

quibus in æquatione inventa ſubſtitutis, fit

$$hdxdz^2dddx = \left\{ \begin{array}{l} + 2cch^3 s^4 dy^6 : aar^8 = 2hdz^2ddx^2 \\ + c^4 h^3 ssdy^6 : aar^8 = hdx^2 ddx^2 \\ + cch^3 dy^5 dh : ar^6 = dhdxdz^2 ddx. \end{array} \right.$$

Cum igitur utrobique in valores identicos deſinant quantitates $hdxdz^2dddx$ ab una, & tres reliquæ $2hdz^2ddx^2$, hdx^2ddx & $dhdxdz^2ddx$ ab altera parte inventæ æquationis; colligitur, curvas poſitarum æquationum $dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$, & $dy = (a - q)dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$, illas ipſas eſſe quæ deſiderabantur, quibuſque Maximum Minimumve $\int qdy$ ineſt. Horum vero utrum utri curvæ tribuendum, eodem quo nuper ratiocinio perquiro: Primo enim conſidero, an creſcentibus z creſcant decreſcantve ipſa q; deinde, an curva verſus axem convexa ſit, an concava; ac tertio, ſi circa chordam ſuam rotetur curva propoſita, & ex adverſo producat aliam æqualem & ſimilem, an hæc majus habeat qdy, an minus: nam ſi majus, propoſitæ $\int qdy$ *Minimum* eſt, non *Maximum*; ſin minus, contra. Hoc pacto reperitur, Maximum $\int qdy$ ineſſe Curvæ $dy = qdz : \sqrt{(aa + qq)}$, & Minimum $\int qdy$ alteri $dy = (a - q)dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$. Quæ erant invenienda.

PRO-

PROBLEMA III.

Si Linea flexilis ABD *in tota sua longitudine ponderibus utcunque sit gravata, & ab extremitatibus suis* A, D *libere suspensa; quaritur inter infinitas curvedines, quas hac linea successive induere potest, illa quæ faciat, ut centrum commune gravitatis ponderum a base* AT *plurimum minimumve distet, hoc est, [quia centrum commune gravitatis ponderum in se agentium naturaliter locum infimum affectat] quaruntur omnis generis Funicularia, seu Catenaria.* (1).

ANALYSIS.

Assumatæ intelligantur in curva quæsita ABD tres vicinæ particulæ æquales & infinite parvæ BF, FG, GC; & sint, ut supra, $HB = b$, $KF = f$, $LG = g$, nec non portio curvæ $AB = z$, & datum per z gravamen ejus $= q$; erit, per Theor. I, gravamen elementi $BF = dq$, elementi $FG = dq + ddq$, & elementi $GC = dq + 2ddq$ [omisso $dddq$, quod hic est superfluum] unde momenta horum pondusculorum, respectu rectæ $AT = bdq + f(dq + ddq) + g(dq + 2ddq)$. Moveantur paululum puncta F & G in peripheriis circa puncta fixa B, C; sic tamen ut BF, FG, GC maneant invariatæ longitudinis: manebunt quoque pondusculа iis appensa eadem, ut & applicata HB, solæque variabunt KF & LG; quod differentiale momentorum efficit $df(dq + ddq) + dg(dq + 2ddq)$. Sed hoc, ex natura *Maximi* & *Minimi*, debet æquari nihilo; cum enim distantia centri gravitatis ponderum a base AT, ob constantem ponderum summam, proportionetur summæ momentorum; sequitur, ex hypothesi, summam momentorum ponderum totius lineæ, adeoque & [per Theor. VII] partis lineæ cujuslibet BC, quoque fore

 Maxi-

(1) Redit hoc Problema ad §. IV, Notæ b, N°. XCIII, quem videsis.

N. XCVI. Maximam Minimamve. Habebitur itaque $df(dq+ddq)+dg(dq+2ddq)=0$, ac proinde $df:-dg$ [= per Theor. V, $dy^2ddx+dy^2dddx+dxddx^2 : dy^2ddx-2dxddx^2$] $=dq+2ddq : dq+ddq$; dividendoque $+dy^2dddx+3dxddx^2 : +dy^2ddx-2dxddx^2 = ddq : dq+ddq$, sive neglectis secundi & quarti termini quantitatibus superfluis, $+dy^2dddx+3dxddx^2 : +dy^2ddx = ddq : dq$; unde multiplicando extrema & media, fit $dqdy^2dddx+3dqdxddx^2 = dy^2ddqddx$; [surrogandoque $-dyddy$ loco $dxddx$, ac dividendo per dy] $dqdydddx-3dqddxddy-dyddqddx=0$; Æquatio scil. specialis hujus Problematis: quam primo, ope fictæ æquationis $dq^m dy^n ddx_r =$ const. in hanc differentio-differentialem $ddx : dqdy^3 = \pm 1 : adz^2$, ac deinde, ope hujus $ady = tdz$, in istas simpliciter differentiales, $dy = adz : \sqrt{(aa+qq)}$ & $dy = adz : \sqrt{(aa+bb-2bq+qq)}$ resolvo ([1]); quarum proin altera Maximum $\int xdq$, seu Maximam momentorum summam, Minimam altera suppeditabit. Utra vero utrum præstet, sic exploro: Juxta priorem Æquationem $dy = adz : \sqrt{(aa+qq)}$ habetur dx [$\sqrt{(dz^2-dy^2)}$] $= qdz : \sqrt{(aa+qq)}$; quare $dy : dx = a : q$, & sumta dy constante, dx proportionatur ipsi q. Cum igitur gravamen curvæ q crescat cum ejus longitudine z, sequitur etiam cum utroque crescere dx; atque adeo curvam basi AT convexitatem obvertere. Sit ergo curva hæc ADC, [*Fig.* 2] ac rotetur circa chordam AC, ut nascatur ex opposito alia Isoperimetros ABC. Statuatur etiam Chordæ normalis recta BD, abscindens ex utraque curva partes similes & æquales AB, AD, & denique ducantur applicatæ BF, DG. Quoniam igitur applicata DG, seu x, curvæ ADC minor est applicata BF, seu x, alterius curvæ ABC; erit quoque xdz [& hinc xdq] prioris curvæ minor, quam xdz [& xdq] posterioris; & consequenter $\int xdq$ illius minor, quam $\int xdq$ hujus. Curvæ igitur propositæ $dx = adz : \sqrt{(aa+qq)}$ ipsum $\int xdq$ non est Maximum; relinquitur ergo ut sit Minimum. Eodemque modo colligitur, quantitatem $\int xdq$ alterius Curvæ $dy = adz : \sqrt{(aa}$

(1) Prior æquatio in posteriore continetur, & ex ea nascitur faciendo $b=0$.

$\sqrt{(aa+bb-2bq+qq)}$ viciſſim Maximam eſſe, non Minimam ([l]). Quæ erant determinanda. N. XCVI.

Notamus hic bonitatis Methodi noſtræ argumentum in eo, quod quæ pro Funiculariis, ſeu Catenariis, ex alio fundamento per notiores methodos eruuntur curvæ, præciſe cum noſtris conveniant ([m]). Addimus, æquationem noſtram priorem $dy = adz: \sqrt{(aa+qq)}$, inverſas, verticibuſque ſuis ſurſum ſpectantes, Catenarias referre; ambas autem coincidere cum curvis præcedentis Problematis, quæ Maximum Minimumque $\int q\,dy$ continent; niſi quod hic & ibi abſciſſæ cum applicatis appareant permutatæ.

Sed laboris denique hic noſtri metam figimus; cum tria allata Exempla ſufficere poſſint ad explicandum modum, quo uti convenit in aliis omnibus. Unicum hoc tacere nefas, quod eadem Methodus non ad ſolas Figuras Iſoperimetras, ſed & pluribus aliis modis affectas curvas, puta ad Figuras æqualium arearum, ſuperficies conoidicas æquales, aut ſolida conoidea æqualia, &c. mutatis mutandis accommodari poteſt; ita nimirum, ut ex infinitis illis reperiatur una, quæ quidpiam optime præſtet, ſeu quæ proprietatem quandam in eminenti gradu poſſideat ([n]): in quibus omnibus ſingularis quædam obſervatur reciprocatio. Quemadmodum enim ex. gr. inter omnes Figuras ejuſdem perimetri

([l]) Dicendum potius utramque curvam dare $\int xdq$ Maximum vel Minimum, prout in æquatione ſumitur $+dy$, vel $-dy$, æquale ſive $adz: \sqrt{(aa+qq)}$ ſive $adz: \sqrt{(aa+bb-2bq+qq)}$.

([m]) Vide N°. XXXIX, Nota *. pag. 426, Col. 1.

([n]) Quærendo nimirum, in tribus elementis curvæ, primum quid per totam curvam conſtans detur ex conditione æqualis areæ, vel æqualis ſuperficiei conoidicæ, aut æqualis ſolidi conoidei, eodem modo quo determinavimus N°. XCIII, quid conſtantis daret conditio iſoperimetri: deinde quærendo quid conſtans prodeat ex altera conditione proprietatis quam in eminenti gradu curva poſſidere ponitur: ac denique rationem illorum productorum conſtantium æquando rationi conſtanti commode aſſumtæ, ut homogeneitas terminorum ſervetur. Quod generaliſſime executus eſt Celeb. EULERUS *Comm. Acad. Petrop.* Tom. VI, pag. 123, præſertim vero Tom. VIII, pag. 159.

N. XCVI. Circulus maximam possidet aream, Catenaria maximam conversione sui gignit superficiem, solidumque maximum Elastica; sic inter omnes vicissim Figuras, quæ aut æqualibus gaudent areis, aut æquales rotatione gignunt superficies, solidave æqualia, Circulus, Catenaria & Elastica minimo clauduntur ambitu; quod pariter procedit in omnibus aliis (°). Et latent profecto in istis, quæ novum speculandi campum amplissimum Geometris aperire valent. DEO autem immortali, qui imperscrutabilem inexhaustæ suæ sapientiæ abyssum leviusculis radiis introspicere, & aliquousque rimari concessit mortalibus, pro præstita nobis gratia, sit laus, honos & gloria in sempiterna secula.

(°) Ratio est, quia eodem modo solvitur v. g. Problema de invenienda, inter omnes curvas ejusdem perimetri, illa quæ maximam habeat aream, quo solveretur Problema de invenienda Figura, quæ, inter omnes ejusdem areæ, minimum haberet perimetrum. In utroque enim, considerando tria curvæ elementa, ponuntur constantes, tam trium simul sumtorum longitudo, quam magnitudo spatii ab iis elementis, ordinatis curvæ, & portione basis contenti. Hæc enim hypothesis non minus quadrat conditionibus æqualis perimetri & maximæ areæ, quam conditionibus æqualis areæ & minimæ perimetri.

N°. XCVII.

N°. XCVII.

SECTION INDEFINIE

DES ARCS CIRCULAIRES,

en telle raiſon qu'on voudra ;

Avec la maniére d'en déduire les Sinus, &c.

Par Mr. BERNOULLI, Profeſſeur
à Bâle.

Extraite d'une de ſes lettres écrite de Bâle, le 13 Juillet 1702.

DAns ce que mon *Frére* donna des Segmens & des Secteurs cycloïdaux quarrables, au mois de Juillet des *Actes de Leipſic* de 1699, il dit qu'il avoit auſſi l'art d'en trouver une infinité de Zones quarrables, dont il donnoit ſeulement quelques exemples, en ſupprimant ſa méthode. J'y penſai, & le mois de Septembre ſuivant j'en donnai une très ſimple, dans les mêmes *Actes* *, laquelle fournit auſſi une infinité de pareilles Zones quarrables, que je déterminai enſuite, [au mois de Décembre 1700 de ces *Actes* †] par le moien d'une courbe, laquelle

Hiſtoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1702. pag. 281, Ed. de Paris, & pag. 374, Edit. de Holl.

* Cy-deſſus N°. XCII, pag 871. † N°. XCV, pag. 892.

N.XCVII quelle [quoique méchanique] a cela de ſingulier, qu'outre la Cycloïde en queſtion, elle n'exige pour ſa conſtruction que des lignes droites & circulaires; ce qui me parut réſoudre le Problème tout auſſi ſimplement, que le ſeroit un Problème ſolide par la ſeule régle & le compas, outre la Section conique qu'on y voudroit ſuppoſer.

Cependant, les mêmes vérités ſe pouvant trouver par des voies ſouvent très différentes, cette méthode n'étoit point celle de mon *Frére*. Il a marqué enſuite, au mois d'Avril des *Actes de Leipſic* de 1701, que la ſienne conſiſtoit dans une progreſſion, telle que ſont celles qu'il y donne. Mais prévoyant aſſez comment une telle progreſſion ſe pouvoit auſſi trouver par la méthode, qui m'a donné autrefois celles de Mr. LEIBNITZ pour la détermination des Sinus, &c. par le moyen des arcs donnés, j'en ſuis demeuré là; juſqu'à-ce qu'enfin Mr. HERMAN étant parvenu depuis, par une route très différente & très belle *, à une progreſſion, qui peut ſervir de même à couper telle courbe qu'on voudra en raiſon donnée, il me prit envie d'eſſayer juſqu'où ma méthode me pouvoit conduire de ce côté là: & non ſeulement j'aperçûs auſſi-tôt que la ſection indéfinie de l'arc circulaire, & l'invention de ſon Sinus, &c. tirée de cet arc lui-même, ne faiſoient proprement qu'un même Problème; mais encore arrivai-je enfin à celle de Mr. HERMAN. Voici pour ce qui regarde la queſtion préſente.

LEMME.

Si l'on apelle f *la corde* CD [Fig. 1] *d'un arc quelconque d'un cercle, dont le rayon ſoit pris pour l'unité, l'on aura* $\sqrt{(4ff - f^4)}$ *pour la valeur de la corde* BD *d'un arc double de celui-là.*

* Voiez *Acta Erudit. Lipſ.* 1703, Aug. p. 345.

De-

DEMONSTRATION N·XCVII

En effet, si outre le diamétre BF & le rayon AC, l'on fait les droites BC & CF; l'on aura deux triangles isosceles que leurs angles égaux CDB & AFC rendront semblables; & qui par conséquent donneront $AF : CF [\sqrt{(BF^2 - BC^2)}] = CD : BD$, c'est-à-dire, $1 : \sqrt{(4 - ff)} = f : BD = \sqrt{(4ff - f^4)}$, ou $BD^2 = 4ff - f^4$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Il suit de là, que si dans le demi-cercle BCDF, on prend plusieurs arcs BG, BE, BC, BD, &c. en progression double; c'est-à-dire, dont le second BE soit double du premier BG pris à discrétion, le troisiéme BC double du second, le quatriéme BD double du troisiéme, &c. & dont les cordes étant aussi BG, BE, BC, BD, celle du premier BG soit appellée x; celle du dernier BD, a; & celle de son complément DF au demi-cercle, $b = \sqrt{(4 - aa)}$; Il suit, dis-je, du *Lemme* précédent que BE^2 [quarré de la corde de l'arc double de BG] est $= 4xx - x^4$; ce qui étant pris pour ff, l'on aura de même BC^2 [quarré de la corde de l'arc double de BE, ou quadruple de BG] $= 16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8$. Et en prenant encore cela pour ff, l'on aura encore de même BD^2 [quarré de la corde de l'arc double de BC, ou octuple de BG] $= 64xx - 336x^4$, &c. Et toûjours de même, comme dans la Table suivante.

Arcs multiples de BG.	Quarrés des Cordes de ces arcs.
1	xx
2	$4xx - x^4$
4	$16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8$
8	$64xx - 336x^4 + 672x^6 - 660x^8 + 352x^{10} - 104x^{12} + 16x^{14} - x^{16}$

N.XCVII Préſentement pour trouver une expreſſion générale de la corde d'un arc indéfiniment multiple d'un autre, il ne s'agit plus que d'obſerver, ſuivant quelle loi ſe fait la progreſſion de coëfficiens de tous ces termes. Or je remarque que tous ces coëfficiens reſultent de l'addition de nombres figurés entr'eux: Par exemple, les coëfficiens de la premiére rangée perpendiculaire, qui ſont les quarrés 1, 4, 16, 64, &c. naiſſent de l'addition d'une double rangée de nombres triangulaires, c'eſt-à-dire, de nombres figurés du premier ordre; les coëfficiens de la ſeconde rangée perpendiculaire, qui ſont 1, 20, 336, &c. réſultent auſſi de l'addition d'une double rangée de nombres triangulo-pyramidaux; c'eſt-à-dire, de nombres figurés du troiſiéme ordre; les coëfficiens de la troiſiéme rangée perpendiculaire, qui ſont 8, 672, &c. ſe forment encore de même de l'addition d'une double rangée de triang-triang-pyramidaux, c'eſt-à-dire, de nombres figurés du cinquiéme ordre; Et ainſi à l'infini, comme on le voit dans la Table ſuivante.

	1. *Ord. Fig.*	3. *Ord. Fig.*	5. *Ord. Fig.*
1	1 + 0 = 1	0 + 0 = 0	0 + 0 = 0
2	3 + 1 = 4	1 + 0 = 1	0 + 0 = 0
3	6 + 3 = 9	5 + 1 = 6	1 + 0 = 1
4	10 + 6 = 16	15 + 5 = 20	7 + 1 = 8
5	15 + 10 = 25	35 + 15 = 50	28 + 7 = 35
6	21 + 15 = 36	70 + 35 = 105	84 + 28 = 112
7	28 + 21 = 49	126 + 70 = 196	210 + 84 = 294
8	36 + 28 = 64	210 + 126 = 336	462 + 210 = 672

C'eſt pourquoi la maniére de trouver tous les derniers termes de chaque rangée de nombres figurés, par le moyen du nombre de ceux qui les précédent, étant connuë; il eſt viſible, que l'on aura auſſi celle de trouver tous les termes de la progreſſion dont il

il s'agit ici : Par exemple, si n est le nombre des termes, on trouvera N.XCVII

$$nn \quad \text{pour le dernier de la premiére rangée;}$$

$$\frac{nn.(nn-1)}{3.\ 4} \quad \text{pour le dernier de la seconde;}$$

$$\frac{nn.(nn-1).(nn-4)}{3.\ 4.\ 5.\ 6} \quad \text{pour le dernier de la troisiéme;}$$

$$\frac{nn.(nn-1).(nn-4).(nn-9)}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.} \quad \text{pour le dernier de la quatriéme.}$$

&c.

D'où l'on voit qu'en supposant l'arc BD indéfiniment multiple de BG, c'est-à-dire, comme valant l'arc BG, pris autant de fois qu'il y a d'unités dans n; l'on aura BD^2 [quarré de la corde BD] ou $aa =$

$$nnxx - \frac{nn.(nn-1)}{3.\ 4}x^4 + \frac{nn.(nn-1).(nn-4)}{3.\ 4.\ 5.\ 6}x^6 - \frac{nn.(nn-1).(nn-4).(nn-8)}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}x^8 + \&c.$$

Et DF^2 ou $bb = 4 - aa =$

$$4 - nnxx + \frac{nn.(nn-1)}{3.\ 4}x^4 - \frac{nn.(nn-1).(nn-4)}{3.\ 4.\ 5.\ 6}x^6 + \frac{nn.(nn-1).(nn-4).(nn-9)}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}x^8 - \&c.$$

Lesquelles valeurs donneront celles de a & de b, par le moyen des interpolations de Mr. WALLIS, ou en la maniére que voici.

Soyent deux progressions feintes $a = nx - px^3 + qx^5 - rx^7 + sx^9 - tx^{11} + \&c.$ Et $b = 2 - pxx + qx^4 - rx^6 + sx^8 - tx^{10} + \&c.$

qu'il faut ensuite quarrer pour avoir

$$\begin{array}{lllll} aa = nnxx - 2npx^4 & + 2nqx^6 & - 2nrx^8 & + 2nsx^{10}. & \&c. \\ & + pp & - 2pq & + 2pr & \\ & & & + qq & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Et } bb = 4 - 4pxx & + 4qx^4 & - 4rx^6 & + 4sx^8 & - 4tx^{10} & \&c. \\ & + pp & - 2pq & + 2pr & - 2ps & \\ & & & + qq & - 2qr & \end{array}$$

Lesquels quarrés comparés terme à terme avec les correspon-

N.XCVII dans des progreſſions qu'on vient de trouver, détermineront les valeurs des coëfficiens p, q, r, s, &c. & de cette maniére l'on aura $a =$

$$nx - \frac{n.(nn-1)}{4.\ 6}x^3 + \frac{n.(nn-1).(nn-9)}{4.\ 6.\ 8.\ 10}x^5 - \frac{n.(nn-1).(nn-9).(nn-25)}{4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14}x^7 + \&c.$$

Et $b =$

$$2 - \frac{nn}{4}xx + \frac{nn.(nn-4)}{4.\ 6.\ 8}x^4 - \frac{nn.(nn-4).(nn-16)}{4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12}x^6 + \frac{nn.(nn-4).(nn-16).(nn-36)}{4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16}x^8 - \&c.$$

où la loi de la progreſſion eſt très-facile à reconnoitre. Mais parce que dans la premiére 1, 9, 25, &c. expriment les quarrés de tous les nombres impairs, & que dans la ſeconde 4, 16, 36, &c. expriment auſſi les quarrés de tous les nombres pairs, on voit que quelque nombre entier rationel que ſoit n, il y aura toûjours quelque terme qui s'évanoüira, avec ceux qui le ſuivent, dans l'une ou dans l'autre de ces progreſſions: de maniére qu'alors cette progreſſion ſe changera en une équation algebraïque finie, laquelle diſpoſée, comme l'on diſpoſe d'ordinaire celle dont le premier terme n'eſt point affecté, ſe changera en celle-ci,

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n.(n-3)}{2}x^{n-4} - \frac{n.(n-4).(n-5)}{\cdot\ 2.\ 3}x^{n-6} + \frac{n.(n-5).(n-6).(n-7)}{2.\ 3.\ 4}x^{n-7} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } n \text{ eſt impair, } \pm nx \mp a \\ \text{Si } n \text{ eſt pair, } \pm nnxx \mp 2 \pm b. \end{array} \right\} = 0,$$

laquelle donne tout d'un coup celle de telle Section déterminée qu'on voudra, en prenant n pour le nombre des parties requiſes: Par exemple, ſi l'on veut diviſer un arc de cercle ou un angle en 3, 5, 7, ou en 6 parties égales; il faut prendre $n = 3$, 5, 7, ou 6, dans la précédente équation générale; & elle ſe changera en celles-ci pour les Sections requiſes, leſquelles ſont préciſément les mêmes qui ſe trouvent par la voie ordinaire.

x^5 —

N.XCVII

$$x^3 - 3x + a = 0$$
$$x^5 - 5x^3 + 5x - a = 0$$
$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + a = 0$$
$$x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 + b = 0$$

Voila pour ce qui regarde la Section des arcs circulaires, ou des angles, en tel nombre de parties égales qu'on voudra. Préſentement ces arcs étant donnés, voici la maniére d'en trouver les cordes, ou les ſinus : le paſſage de l'un à l'autre eſt facile. Pour cela, concevons que la corde BG, [que nous avons appellée x] eſt infiniment petite ; de maniére qu'elle ſe confonde avec l'arc BG, & que le nombre n, [qui marque combien de fois cet arc BG eſt ſurpaſſé par l'arc BD] ſoit infini ; alors on aura l'arc BD [que j'appelle préſentement f] $= nx$. Cela poſé, les nombres 1, 9, 25, &c. de même que 4, 16, 36, &c. ſe trouvant nuls par rapport à nn, les équations $a = nx$, &c. & $b = 2 - \frac{1}{4}nnxx$ &c. qu'on vient de trouver, ſe changeront en celles-ci : $a = nx - \frac{n^3x^3}{4.6} + \frac{n^5x^5}{4.6.8.10.} - \frac{n^7x^7}{4.6.8.10.12.14.}$ &c. & $b = 2 - \frac{nnxx}{4} + \frac{n^4x^4}{4.6.8.} - \frac{n^6x^6}{4.6.8.10.12.} + \frac{n^8x^8}{4.6.8.10.12.14.16.}$ — &c. leſquelles [à cauſe de $nx = f$] ſe changent encore en $BD = a = f - \frac{f^3}{4.6} + \frac{f^5}{4.6.8.10} - \frac{f^7}{4.6.8.10.12.14} +$ &c. & en $DF = b = 2 - \frac{ff}{4} + \frac{f^4}{4.6.8} - \frac{f^6}{4.6.8.10.12} + \frac{f^8}{4.6.8.10.12.14.16.}$ — &c. C'eſt ainſi que l'arc BD étant donné, j'en ai autrefois determiné la corde BD, & celle de ſon complément DF.

Si préſentement on veut le ſinus d'un arc propoſé, ſoit cet arc BC [$\frac{1}{2}$BD $= \frac{1}{2}f$] $= g$, ſon ſinus BH [$\frac{1}{2}$BD $= \frac{1}{2}a$] $= s$; AH [$\frac{1}{2}$DF $= \frac{1}{2}b$] $= c$; HC $= v$. A ce compte, l'on aura $a = 2s$, $b = 2c$, & $f = 2g$; leſquelles valeurs de a, b, f étant ſubſtituées en leurs places, dans les deux derniéres égalités pré-

 céden-

N.XCVII cédentes, l'on aura s [Sinus droit de l'arc BC] $= g - \frac{g^3}{2.3} + \frac{g^5}{2.3.4.5} - \frac{g^7}{2.3.4.5.6.7} +$ &c. c [Sinus du compl.] $= 1 - \frac{gg}{2} + \frac{g^4}{2.3.4} - \frac{g^6}{2.3.4.5.6} +$ &c. Donc v [Sinus verse] $1 - c = \frac{gg}{2} - \frac{g^4}{2.3.4} + \frac{g^6}{2.3.4.5.6} - \frac{g^8}{2.3.4.5.6.7.8} +$ &c. lesquelles progressions sont précisément les mêmes que celles que Mr. LEIBNITZ a données dans les *Actes de Leipsic*, au mois d'Avril de 1691, pag. 179. Et de cette maniére l'on voit que nous avons donné la solution de deux Problémes à la fois: savoir, la division d'un angle ou d'un arc de cercle en raison donnée, & réciproquément le sinus d'un arc circulaire, ou d'un angle donné quelconque. Au reste il est à remarquer que Mr. NEWTON en resolvant le premier de ces Problêmes, est tombé dans la même progression que nous, comme on le voit dans la pag. 384 de l'*Algébre* de Mr. WALLIS imprimée à *Oxfort*, en 1693.

P. S.

Un des principes sur lesquels Mr. HERMAN s'est fondé dans la recherche de la multisection de l'angle, est la proprieté du quadrilatere inscrit dans le cercle, dont le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés: sur quoi j'ai trouvé que l'on peut aussi déduire nôtre formule de cette même proprieté, en cherchant sans interruption les cordes, ou les quarrés des cordes de l'arc, double, triple, quadruple, quintuple, &c. & non par sauts, comme j'ai fait celles de l'arc double, quadruple, octuple, &c. par l'autre méthode. En voici la démonstration.

Dans le quadrilatére inscrit au cercle BGFC, [*Fig.* 2] soit BG $=$ FC $= x$, GF $= s$, BF ou GC $= t$, & BC $= v$; l'on aura, par la dite proprieté, $tt = xx + sv$; & par conséquent $v =$ $tt -$

$(tt - xx) : s$, & $vv = (t^4 - 2ttxx + x^4) : ss$. Or si GF, ou s, est posée égale à BG, ou x; BF, ou t, sera la corde de l'arc double, & BC, ou v, la corde de l'arc triple de BG; & si s est la corde de l'arc double, t sera celle du triple, & v celle du quadruple de l'arc BG, & si s est celle du triple, t sera celle du quadruple, & v celle du quintuple, & ainsi de suite. Donc la corde de l'arc simple étant x, & celle du double $\sqrt{(4xx - x^4)}$ l'on connoitra par cette équation celle du triple, & de même par la corde de l'arc double, & par celle du triple, on trouvera celle du quadruple; & par celles des arcs triple & quadruple, l'on saura celle du quintuple, & ainsi de suite, comme l'on voit ici. N.XCVII

Quarrés des cordes.

1	xx
2	$4xx - x^4$
3	$9xx - 6x^4 + x^6$
4	$16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8$
5	$25xx - 50x^4 + 35x^6 - 10x^8 + x^{10}$
6	$36xx - 105x^4 + 112x^6 - 54x^8 + 12x^{10} - x^{12}$

&c.

Cordes elles-mêmes.

1	x
2	$x\sqrt{(4 - xx)}$
3	$3x - x^3$
4	$(2x - x^3)\sqrt{(4 - xx)}$
5	$5x - 5x^3 + x^5$
6	$(3x - 4x^3 + x^5)\sqrt{(4 - xx)}$

Où l'on remarque avec plaisir, que toutes les cordes, dont l'exposant du multiple est un nombre impair, deviennent rationnelles, pendant que les autres sont sourdes; mais toutes commensurables entr'elles, & divisibles par $\sqrt{(4 - xx)}$.

N°. XCVIII.

N°. XCVIII.

DEMONSTRATION GENERALE,

Du Centre de Balancement ou d'Oscillation, tirée de la Nature du Levier.

Par Mr. BERNOULLI, Professeur à Bâle.

Lettre du 13. Mars 1703.

Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1703. pag. 78, Ed. de Paris, & pag. 56, Edit. de Holl.

On sait que toute la doctrine du Balancement, que feu Mr. Huygens nous a laissée dans la quatriéme Partie de son excellent *Traité de la Pendule*, est fondée sur cette hypothése, *que le Centre commun de gravité de plusieurs corps liés ensemble, doit remonter précisément à la même hauteur d'où il est descendu; soit que ces poids remontent conjointement, ou, que se détachant à la fin de leur chûte, ils remontent ensuite separément, chacun avec la vitesse qu'il aura pour lors acquise.* Mais on sait aussi qu'il y a eu bien des gens, à qui cette demande a paru un peu hardie, & qui n'ont jamais pû tomber d'accord de son évidence, quoiqu'ils la crûssent vraisemblable. Il y en a eu même qui ont nié ce principe, entr'autres un Auteur illustre * en a donné

* Mr. *l'Abbé* de Catelan.

donné ses raisons dans les *Journaux des Savans* de 1681 & 1682. Num. XCVIII.
Mais le hazard m'ayant alors, je ne sçais comment, engagé à l'examen de ces raisons, je trouvai (de même que Mr. HUYGENS) que cet Auteur se trompoit lui-même, en ce qu'il supposoit que *la vitesse totale d'un Pendule doit être égale à la somme des vitesses de ses parties séparées.* Car ayant consideré, que la pesanteur agissant uniformément sur toutes les parties d'un Pendule, celles de ces parties, qui sont les plus éloignées de l'axe de son mouvement, & qui doivent décrire de plus grands arcs, se doivent moins ressentir de cet effort, que les moins éloignées; je voiois que celles-ci, dans leur mouvement, devoient s'appuïer d'un côté sur les plus éloignées, & de l'autre sur l'axe du Pendule, où il se perd toûjours quelque chose de ce mouvement: & je conclus de là que la vitesse totale du Pendule devoit nécessairement être plus petite que ne seroit la somme des vitesses de ses parties, si elles étoient tombées séparément. C'est ce qui me fit concevoir dans le Pendule une espéce de Levier, & penser à même tems si on ne pourroit pas aussi trouver, par ce principe, ce qu'a trouvé Mr. HUYGENS, par un autre, beaucoup plus sujet à contestation que celui du Levier. J'en proposai le dessein aux Géométres dans les *Actes de Leipsic*, de 1686 *, où j'expliquai mon sentiment. Mr. le *Marquis de* L'HOSPITAL fut le premier qui s'apperçut de la justesse de cette pensée; & il en fit voir la convenance avec la doctrine de Mr. HUYGENS, dans les Journaux de *Rotterdam* de 1690 †, par l'induction de deux, de trois, de quatre poids, &c. après quoi je trouvai le moyen d'étendre la démonstration à un nombre quelconque de poids égaux ou inégaux, tous situés en même ligne droite; comme on le peut voir dans les *Actes de Leipsic* de 1691 ††. Mais je ne pouvois encore aller plus loin, ni appliquer mon principe à des lignes courbes, ni à des surfaces, ou à des solides, à cause de quelque difficulté qui m'arrêta. Je ne la surmontai que

* N°. XXIII, pag. 277.
† N°. XLIII, pag. 454.
†† N°. XLV, pag. 460.

Num. XCVIII. quelques années après, en résolvant ce Problême dans toute son étenduë ; en trouvant même plus que je ne cherchois. Car non-seulement je renferme, dans une équation courte & aisée, tout ce que Mr. HUYGENS nous a donné sur ce sujet ; mais outre cela, je prouve démonstrativement, en retournant sur mes pas, ce que cet Auteur a avancé sans preuve ; sçavoir que le Centre commun de gravité des parties d'un Pendule, qui se brise en descendant contre quelque chose qui les oblige à réfléchir, doit nécessairement remonter à la hauteur d'où il est descendu. Je démontre encore, en suivant les mêmes traces, l'identité des Centres de Balancement & de Percussion. Enfin, je détermine par cette méthode une nouvelle espèce de Centre, que j'appelle *Centre de tension* *, où l'Hypothèse de Mr. HUYGENS, ne sauroit avoir lieu : j'expliquerai en son tems ce que j'entens par là. Et comme je n'ai encore rien publié de tout cela, je veux vous l'envoier par parties, pour pouvoir être présenté à l'Académie, si vous trouvez qu'il le mérite. Je commence par la première.

Principe du Levier tiré ou poussé par des Puissances qui sont en mouvement.

Soient [*Fig.* 1] AC, AC, AD, AD, les branches d'un Levier, mobile autour du point A : soyent C, C, D, D, des poids, ou des puissances, mûes avec des vitesses CB, CB, DE, DE, lesquelles fassent impression suivant les directions CB, CB, DE, DE, perpendiculaires aux bras de levier AC, AC, AD, AD. Je suppose, que si tous les produits des puissances C par AC & CB, sont égaux à tous les produits des puissances D [qui agissent en sens contraire] par AD, & DE ; ou bien, si tous les produits de C par AC & CB [entant qu'on conçoit toutes les puis-

* Voiez N°. CIII, Art. XXVI.

puissances agir en même sens] sont égaux à rien ; le Levier doit demeurer en équilibre. Num. XCVIII.

Ce principe a été démontré par feu Mr. MARIOTTE dans la Prop. 13, de la seconde Partie de son Traité *de la percussion des corps ;* & il n'y a personne qui en disconvienne.

SOLUTION.

Soit maintenant A [*Fig.* 2] l'axe horizontal du balancement ; AXM un plan vertical droit à l'axe ; AM le diamètre de la Figure qui balance, auquel l'on ait appliqué, dans le même plan, l'ordonnée CLD à angle donné ALD ; laquelle ait CL = LD (*). Soient de plus C & D deux petites parcelles de la Figure, lesquelles décrivent dans leur balancement, les arcs CT, DS : soit aussi AM la longueur du Pendule simple, qui fait ses vibrations dans le même tems que la Figure qui balance.

De ce que le balancement, tant de M que de C & D, s'achéve, par l'hypothèse, en même tems, il s'ensuit que les vitesses, dont ces poids se meuvent à chaque instant, sont proportionnelles à leurs distances AM, AC, AD de l'axe A ; & que par conséquent leur mouvement peut être continué avec ces vitesses, sans que les poids C & D agissent en aucune manière l'un sur l'autre : De sorte, qu'il ne faut considérer que la seule impulsion que la pesanteur ajoute à chaque moment aux vitesses acquises. Soit donc ce choc, ou cette impulsion, représentée par les petites lignes verticales & égales MN, CO, & DP : ensuite, après avoir mené les droites NK, OT, & PV, perpendiculai-

Cccccc 2 res

(*) C'est ici une restriction considérable à l'universalité de cette méthode, qui ne pourroit s'appliquer, sans de très longs calculs, aux Figures qui ne sont pas divisées en deux parties égales par un Diamétre. On ne trouvera pas ce défaut dans la Méthode de Mr. *Jean* BERNOULLI ; pour déterminer le Centre d'Oscillation, qu'on peut voir dans les *Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris*, & dans les *Actes de Leipsik*, pour l'année 1714.

Num. XCVIII. res aux arcs MK, CT, DV; soyent conçus les mouvemens par MN, CO, DP, comme étant composés chacun de deux autres, sçavoir du mouvement de M en K, & de K en N; de C en T, & de T en O; de D en V, & de V en P. Et là, il est encore visible, que celui qui se fait par KN, TO & VP, se répand tout sur l'axe A, & qu'il s'y perd entiérement. Ainsi il n'y a que le seul mouvement par MK, CT, DV, qui ait son effet; mais non sans quelque changement : d'autant que M étant parvenu en K, les poids C & D [à cause de l'isochronisme qu'on supose] ne sauroient être en T & en V; ils doivent se trouver en des points comme R & S, tels que les arcs MK, CR, DS, soient semblables. C'est ce qui fait que l'effort de pesanteur, qui agit sur le poids C, n'est pas épuisé au point R, & que le reste RT doit être employé à pousser le corps D par VS. Mais, parce que ce corps D doit résister autant qu'il est poussé, c'est comme si, étant en S, il y avoit une force qui tâchat de le repousser de S en V. De sorte, que voilà un levier CAD, sur lequel des poids, comme C, tirant ou poussant d'un côté, avec des forces ou vitesses RT, & de l'autre des poids, comme D, tirans ou repoussans en sens contraire, avec des forces ou vitesses SV, font équilibre. Donc, suivant le précédent Principe du Levier, les sommes des produits $C \times AC \times RT$, d'une part, est égale à celle des produits $D \times AD \times VS$, de l'autre; ou [ce qui revient au même] la somme des produits $C \times AC \times RT$, entant qu'on y comprend aussi ceux de l'autre côté, est égale à rien. En voici l'Analyse.

Soyent MN, CO, DP, prolongées, avec leur parallèle LH, jusques-à ce qu'elles coupent toutes l'horizontale AX en X, G, I, & H. Soit de plus AE perpendiculaire sur SD, & qu'on fasse

MN

Num. XCVIII.

MN = CO = DP =	MN : MK = AL : AH,
[Sin. tot. $= a$	$a : b = x : \frac{bx}{a}$.
MK $= b$	Sin. tot. Sin. HLC = LC : HG ou HI.
Sin. ang. LAE $= g$	$a : h = y : \frac{hy}{a}$.
Sin. ang. HLC $= h$	$AG = AH + HG = \frac{bx + hy}{a}$.
AC $= l$	$AI = AH - HI = \frac{bx - hy}{a}$.
AD $= m$	
AM $= t$	AC : AG = CO : CT.
AL $= x$	$l : \frac{bx + hy}{a} = a : \frac{bx + hy}{l}$
LC = LD $= y$	AD : AI = DP : DV.
C = D $= dp$	$m : \frac{bx - hy}{a} = a : \frac{bx - hy}{m}$.

Sin. tot : Sin. LAE = AL : LE.

$a : g = x : \frac{gx}{a}$.

$AC^2 = AL^2 + LC^2 + 2CLE$.

$ll = xx + yy + \frac{2gxy}{a}$.

$AD^2 = AL^2 + LD^2 - 2DLE$.

$mm = xx + yy - \frac{2gxy}{a}$.

AM : MK = AC : CR = AD : DS.

$t : b = l : \frac{bl}{t} = m : \frac{bm}{t}$.

$RT = CT - CR = \frac{bx + hy}{l} - \frac{bl}{t}$.

$SV = DS - DV = \frac{bm}{t} - \frac{bx - hy}{m}$.

Num. XCVIII. $C \times AC \times RT = dp \times l \times (\frac{bx+hy}{l} - \frac{bl}{t}) = (bx+hy - \frac{bll}{t}) \times dp$

[en effaçant ll] $= (bx + hy - \frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at}) \times dp$.

$D \times AD \times SV = dp \times m \times (\frac{bm}{t} - \frac{bx-hy}{m}) = (\frac{bmm}{t} - bx + hy) \times dp$

[en effaçant mm] $= (\frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at} - bx + hy) \times dp$.

Donc tous les $C \times AC \times RT$ égaux à tous les $D \times AD \times SV$, donneront $\int (bx+hy - \frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at})\, dp = \int (\frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at} - bx + hy)\, dp$. Et par conséquent [en ajoûtant $\int (\frac{bxx+byy}{t} + \frac{2bgxy}{at} + bx - hy)\, dp$, de part & d'autre] $\int 2bx\,dp = \int \frac{2bxx + 2byy}{t}\, dp$; ou [en divisant par $2b$] $\int x\,dp = \int \frac{xx+yy}{t}\, dp$; & enfin $t = \frac{\int (xx+yy)\, dp}{\int x\,dp} = \frac{\int xx\,dp + \int yy\,dp}{\int x\,dp}$.

Ou bien de cette maniére: Tous les $C \times AC \times RT = \int (bx + hy - \frac{bxx+byy}{t} - \frac{2bgxy}{at})\, dp = 0$. Et par conséquent $\int (bx+hy)\, dp = \int (\frac{bxx+byy}{t} + \frac{2bgxy}{at})\, dp$; d'où résulte $t = \frac{\int (bxx+byy+2bgxy:a)\, dp}{\int (bx+hy)\, dp}$ ou, [en effaçant les membres dans lesquels y n'a qu'une dimension, parce que toutes les y positives sont détruites par autant de y négatives de l'autre] $t = \frac{\int (xx+yy)\, dp}{\int x\,dp} = \frac{\int xx\,dp + \int yy\,dp}{\int x\,dp}$, comme ci-dessus.

Il reste maintenant à faire voir l'application de cette régle aux différentes figures dont Mr. HUYGENS a donné les Centres d'oscillation; mais ce sera pour une autre fois.

N°. XCIX.

N°. XCIX.

EXTRAIT
D'UNE LETTRE
De Mr. BERNOULLI, Profeſſ. à *Bâle*, en date du 11. *Sept.* 1703,
Contenant l'application de ſa Régle du Centre de Balancement à toutes ſortes de figures.

TOute la doctrine de Mr. HUYGENS, touchant le Centre d'Oſcillation ou de Balancement, roule ſur la dimenſion de certains coins retranchés de la figure qui balance, & de la longueur de leurs ſouscentriques [*Subcentrica cunei*] : Tellement que, pour faire voir la convenance de ma Régle avec cette doctrine, je n'aurai qu'à y faire remarquer ces coins : ce qui eſt très facile. *Hiſtoire de l'Acad. des Sciences de Paris* 1703. pag. 272, Ed. de Paris, & pag. 327, Edit. de Holl.

Soit la figure plane quelconque AB, [*Fig.* 1] dont G ſoit une des parties infiniment petites, & HAH ſa tangente en A. Imaginons enſuite un cylindre droit ſur cette figure, duquel un plan paſſant par HH, & incliné de 45 degrés ſur celui de cette figure, retranche le coin ABDA. Soit de plus L le point de cette baſe perpendiculairement ſitué ſous le centre de gravité de ce coin. Soit enfin GH la diſtance de G à la tangente HH, appellée *x*; & G appellé *dp*; Donc la hauteur du petit priſme GK [qui a G pour baſe] étant égale à GH [*x*] à cauſe de l'an-

N. XCIX. l'angle demi-droit de la section précédente, ce prisme sera $= x\,dp$; & son moment [*momentum*,] à l'égard de la tangente HH, sera de même $= xx\,dp$. Donc la solidité du coin, qui a ce prisme pour élément, c'est-à-dire, la somme de tous ces prismes, sera $= \int x\,dp$, & son moment $= \int xx\,dp$, lequel étant divisé par ce même coin, donnera la sous-centrique AL $= \frac{\int xx\,dp}{\int x\,dp}$.

Si présentement on coupe le cylindre précédent par un autre plan incliné aussi de 45 degrés sur la base AB, lequel plan rencontre cette base dans une ligne perpendiculaire à la tangente HH de cette même base, & qu'on appelle y la distance de G à cette ligne; l'on aura un autre coin, dont le moment, à l'égard de cette ligne, sera de même $= \int yy\,dp$. Et comme toutes ces quantités entrent dans l'expression litterale de ma Régle *, qui donne la distance du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement $= \int(xx+yy)\,dp : \int xdp = (\int xxdp + \int yydp) : \int xdp$, on peut déja entrevoir sa conformité avec la doctrine de Mr. HUYGENS †.

Mais il n'est pas besoin de m'expliquer davantage sur cela, ces coins m'étant inutiles. Depuis que le Calcul des différences est en vogue, on ne se charge plus l'imagination d'autres solides, ni d'autres figures, que de ceux, ou celles, qui sont données dans la question. C'est pourquoi je me contenterai de montrer ici la maniére d'appliquer ma Régle à toutes sortes de grandeurs, en faisant simplement attention à cette quantité littérale $(\int xxdp + \int yydy) : \int x\,dp$.

Pour cet effet, soit CADP [*Fig.* 2] un Conoïde ou Sphéroide quelconque, qui balance sur un axe horizontal HAH: soit BCAD la figure ou la section qui résulte de ce corps coupé par un plan vertical, droit à l'axe HH du mouvement, & BPAQ celle qui résulte de même de ce corps coupé par le plan BHH: Il

* N°. præced. pag. 936. † *De Horologio Oscillatorio*, Pars IV.

Il s'agit de trouver le Centre d'oscillation, tant du Conoïde, N. XCIX.
que des Figures BCAD, BPAQ; & des Lignes CAD, PAQ, considérées séparément hors du Conoïde : la Figure ou Ligne CAD ayant ses agitations *in latus*, & l'autre PAQ ayant les siennes *in planum*. Je conçois donc ce Conoïde divisé en une infinité de tranches parallèles à sa base & à l'axe du mouvement; qu'une de ces tranches est le cercle MKNI; que la commune intersection de ce cercle & du plan vertical, est le diamétre IK; que celle du même cercle & de la figure PAQ est le diamétre MN; & qu'une de ses ordonnées au diamétre IK, est GF. Cela conçu, je fais $AB = a$, $BC = b$, $AL = x$, $LK = v$, $LG = y$, $GF = z = \sqrt{(vv - yy)}$, AK, ou $AM = s$, la raison du diamétre à la circonférence $= r:p$; & par conséquent le cercle $IMKN = pvv:r$.

1°. Comme tous les points de l'ordonnée GF, qui est supposée parallèle à l'axe HH du mouvement, se meuvent également vite, c'est comme si le petit rectangle GF étoit tout ramassé en G; & par conséquent comme si le cercle entier IMKN [$pvv:r$] étoit étendu le long de la ligne IK: Et parce que tous les points de cette ligne répondent à une même AL [x], il s'ensuit que tous les xdp du cercle IMKN [c'est-à-dire, tous les produits de ses élémens multipliés par x] s'expriment par $pvvx:r$, & tous ses $xxdp$ par $pvvxx:r$. Il n'en est pas de même de tous ses $yydp$, à cause que les différens points du diamétre IK ne répondent pas à une même y. Pour les trouver, je considére que G étant chargé de tous les dp du petit rectangle GF [zdy], tous les $yydp$ de ce rectangle sont $yyzdy$, & que l'intégrale de $yyzdy$ doit marquer tous les $yydp$ du segment du cercle MLGF. Or l'intégrale de $yyzdy$ est $= \frac{1}{4}vv \times \int zdy - \frac{1}{4}yz^3$ [comme il paroit (*) en

Jac. Bernoulli Opera. Dddddd pre-

(*) Ou bien ainsi. Puisque $yy = vv - zz$, on aura $yyzdy = vvzdy - z^3dy$, & en integrant $\int yyzdy = vv\int zdy - yz^3 + 3\int zzydz$. Mais puisque v est constante, si l'on differentie $zz = vv - yy$, on aura $zdz = -ydy$, & par conséquent $zzydz = -yyzdy$. Donc, écrivant $3\int yyzdy$, au lieu du dernier terme de l'équation $\int yyzdy = vv\int zdy - yz^3 + 3\int zzydz$

N. XCIX. prenant la différence de chaque quantité, & en substituant $vv - yy$ au lieu de zz, & $-ydy$ au lieu de zdz]: De sorte que lorsque LG devient LK, & que l'ordonnée GF [z] s'évanouït; alors $\int zdy$ [c'est-à-dire, la somme de tous les rectangles zdy] devenant égale à tout le cercle $pvv:r$, l'on aura $\frac{1}{4}vv \times \int zdy = pv^4 : 4r$.

Après avoir ainsi trouvé que les sommes de tous les xdp, $xxdp$, & $yydp$, par raport au cercle IMKN, sont $pvvx:r$, $pvvxx:r$, & $pv^4:4r$; si l'on multiplie chacune d'elles par dx, qui est l'épaisseur du cercle, ou de la tranche IMKN, les intégrales des produits $pvvxdx:r$, $pvvxxdx:r$, & $pv^4dx:4r$, marqueront ces sommes par raport à tout le Conoïde ou Sphéroide CADP: De sorte que l'on aura la distance du Centre d'oscillation $(\int xxdp + \int yydp) : \int xdp = (\int \frac{p}{r} vvxxdx + \int \frac{p}{4r} v^4dx) : \int \frac{p}{r} vvxdx = (\int vvxxdx + \int \frac{1}{4} v^4dx) : \int vvxdx = \int (xx + \frac{1}{4}vv)\, vvdx : \int vvxdx$. D'où l'on voit que pour déterminer ce Centre, il ne reste plus que de mettre la valeur de vv en x dans cette Formule, suivant l'exigence de la Figure AKCB section du Conoïde par l'axe AB; & d'en prendre ensuite l'intégrale. En voici quelques Exemples ([b]).

$+ 3\int zzydz$, elle se changera en $\int yyzdy = vv\int zdy - yz^3 - 3\int yyzdy$, & transposant $4\int yyzdy = vv\int zdy - yz^3$, ou enfin $\int yyzdy = \frac{1}{4} vv\int zdy - \frac{1}{4} yz^3$.

([b]) Le Calcul de ces Exemples & des suivans, n'a rien que de facile pour ceux qui entendent les principes du Calcul Intégral.

Solide

Solide proposé	Valeur de vv.	Quantité $\frac{\int(xx+\frac{1}{4}vv)\,vvdx}{\int vvxdx}$	La même dans le cas de $x = a$
Cone suspendu par le sommet.	$bbxx:aa$	$\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}bbx:aa$	$\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}bb:a$
Cone rectangle suspendu par le milieu de sa base.	$aa-2ax+xx$	$\frac{3a^4-6a^3x+10a^2x^2-9ax^3+3x^4}{6aax-8axx+3x^3}$	a
Cylindre.	bb	$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}bb:x$	$\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}bb:a$
Conoïde Parabolique.	$bbx:a$	$\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}bb:a$	$\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}bb:a$
Conoïde Hyp. dont le côté transverse est = AB.	$\frac{bbx}{2a}+\frac{bbxx}{2aa}$	$\frac{10a^2b^2+15ab^2x+60a^3x+6b^2x^2+48a^2x^2}{80a^3+60a^2x}$	$\frac{27}{35}a+\frac{31}{140}bb:a$
Sphère.	$ax-xx$	$\frac{10aa+15ax-18xx}{40a-30x}$	$\frac{7}{10}a$
Demi-Sphère suspendue par le sommet.	$2ax-xx$	$\frac{20aa+15ax-9xx}{40a-15x}$	$\frac{26}{25}a$
Demi-Sphère suspendue par le centre.	$aa-xx$	$\frac{15a^4+10aaxx-9x^4}{30aax-15x^3}$	$\frac{16}{15}a$

II°. Pour trouver le Centre d'oscillation du plan BCAD, qui fait ses agitations *in latus*; je considére que tous les points de l'appliquée LK [v] répondant toûjours à une même abscisse AL [x], & ne répondant pas à une même LG [y], tous les xdp & $xxdp$ contenus dans LK, c'est-à dire, tous les xdy & $xxdy$. seront xv & xxv; mais tous les $yydp$ ou $yydy$ seront $\frac{1}{3}y^3$, & par conséquent $\frac{1}{3}v^3$ pour toute l'appliquée LK. Donc en multipliant chacune de ces grandeurs xv. xxv, & $\frac{1}{3}v^3$, par la largeur

 dx

N. XCIX. dx du petit parallélogramme LK; & en prenant ensuite les intégrales des produits $xvdx$, $xxvdx$, & $\frac{1}{3}v^3dx$, après y avoir substitué la valeur de v en x, l'on aura les $\int xdp$, $\int xxdp$, & $\int yydp$, par raport à toute la figure: Tellement que la distance $(\int xxdp + \int yydp) : \int xdp$ du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement sera $= (\int xxvdx + \int \frac{1}{3}v^3dx) : \int xvdx = \int (xx + \frac{1}{3}vv)\, vdx : \int xvdx$. Et il n'importe pas que l'angle ALK du diamétre & des appliquées soit droit ou oblique; la raison de dx à la largeur du petit rhomboïde LK, dans une même figure, demeurant toûjours la même.

EXEMPLES.

Plan proposé, oscillant *in latus*.	Valeur de v.	Quantité $\frac{\int (xx + \frac{1}{3}vv)\, vdx}{\int xvdx}$	La même pour le cas de $x = a$
Triangle isoscéle suspendu par le sommet.	$bx : a$	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}b^2x : a^2$	$\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}bb : a$
Le même suspendu par le milieu de sa base.	$b - bx : a$	$\frac{4a^3b^3 - 6a^2b^2x + 4ab^3x^2 + 4a^3x^2 - b^3x^3 - 3a^2x^3}{6a^3x - 4aaxx}$	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}bb : a$
Rectangle suspendu par le milieu d'un de ses cotés.	b	$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}bb : x$	$\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}bb : a$
Parabole suspendue par le sommet.	$\sqrt{(bbx : a)}$	$\frac{5}{7}x + \frac{1}{3}bb : a$	$\frac{5}{7}a + \frac{1}{3}bb : a$
La même suspendue par le milieu de sa base.	$b\sqrt{\frac{a-x}{a}}$	$\frac{7aabb + 8a^4 - (7aabb + 8a^4 - 14abbx + 4a^3x + 7bbxx + 3aaxx - 15ax^3) \times \sqrt{\frac{a-x}{a}}}{14a^3 - (14a^3 + 7aax - 21axx) \times \sqrt{\frac{a-x}{a}}}$	$\frac{4}{7}a + \frac{1}{3}bb : a$
Cercle.	$\sqrt{(ax - xx)}$	$\frac{(16x^3 + 8axx - 6aax - 9a^3)\, v + 9aas}{(32xx - 8ax - 12aa)\, v + 12aas}$ (e)	$\frac{3}{4}a$

Quel-

(e) Dans cette formule s désigne l'arc de cercle, dont x est le sinus verse.

Quelquefois les v font de différentes valeurs dans une même figure, comme dans le parallélogramme ACBD [*Fig.* 3] suspendu à un de ses angles A : car en prenant la diagonale AB pour le diamétre a, & les droites LK paralléles à l'autre diagonale CD pour les appliquées v, les v du triangle ACD sont $= x$, & celles du triangle CBD $= a - x$. C'est pourquoi je cherche séparément toutes les $(xx + \frac{1}{3}vv)\,vdx$ du triangle ACD, que je trouve faire $\frac{1}{48}a^4$, & toutes celles du triangle CBD, qui font $\frac{1}{16}a^4$, dont la somme entiére $\frac{1}{12}a^4$ marque $\int(xx + \frac{1}{3}vv)\,vdx$ par raport à toute la figure. Je cherche de même toutes les $xvdx$ du triangle ACD, qui font $\frac{1}{24}a^3$, & toutes celles du triangle BCD, qui font $\frac{1}{12}a^3$, & je les ajoûte ensemble ; ce qui me donne $\frac{1}{8}a^3$. D'où je conclus que la distance $\int(xx + \frac{1}{3}vv)\,vdx : \int xvdx$, du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement, doit être ici $\frac{1}{12}a^4 : \frac{1}{8}a^3 = \frac{2}{3}a$. N.XCIX.

Il en est de même du secteur de cercle ACN [*Fig.* 4], dans lequel en faisant AB $= a$, AD $= c$, DC $= b$, AL $= x$, & LK $= v$; les appliquées v du triangle ADC se trouvent $= bx : c$, & celles du segment BDC sont $= \sqrt{(aa - xx)}$. (d).

 Mais

(d) En suivant ces dénominations, on trouvera pour le triangle ADC, que $\int(xx + \frac{1}{3}vv)\,vdx$ est $= \frac{1}{4}bx^4 : c + \frac{1}{12}b^3x^4 : c^3 =$ [quand $x = c$] $\frac{1}{4}bc^3 + \frac{1}{12}b^3c$. Et pour le demi-segment BDC, on trouvera en général $(\frac{1}{12}aax + \frac{1}{6}x^3)\,v + \frac{1}{4}a^3r$. [$r$ désignant l'arc dont x est le sinus]. Mais cette grandeur se raporte à un second segment tel que ALEG. Donc faisant $x = a$, & $v = 0$, on aura pour le quart de cercle ABG, $\frac{1}{4}a^3s$, où s désigne le quart de circonférence BCG : & faisant $x = c$, & $v = b$, on aura, pour ADCG, $\frac{1}{4}a^3r + (\frac{1}{12}aacb + \frac{1}{6}c^3b) = \frac{1}{4}a^3r + \frac{1}{12}b^3c + \frac{1}{4}bc^3$, [parce que $aa = bb + cc$], ce qui étant ôté de $\frac{1}{4}a^3s$, il reste, pour le demi-segment BDC, $\frac{1}{4}a^3(s - r) - \frac{1}{12}b^3c - \frac{1}{4}bc^3 = \frac{1}{4}a^3t - \frac{1}{12}b^3c - \frac{1}{4}bc^3$ [t représentant l'arc BC], & si l'on ajoute $\frac{1}{4}bc^3 + \frac{1}{12}b^3c$, pour le triangle ADC, on aura simplement $\frac{1}{4}a^3t$ pour le secteur ABC. De même on trouve $\int xvdx$, pour le triangle ADC $= \frac{1}{3}bx^3 : c = \frac{1}{3}bcc$, quand $x = c$. Et pour le demi-segment BDC, on trouve en général, $(\frac{1}{3}xx - \frac{1}{3}aa)\,v + \frac{1}{3}a^3$, ce qui se réduit, pour le quart de cercle ABG, à $\frac{1}{3}a^3$, & pour le second segment

N. XCIX. Mais souvent l'opération devient beaucoup plus courte, en concevant la figure divisée d'une autre maniére ; comme il arrive dans le même secteur, si on le conçoit divisé en une infinité de petits secteurs A C, ou en de petits anneaux FK concentriques à l'arc BC. Pour le faire voir; soit derechef $AB = a$, $AD = c$, $DC = b$, $AL = x$, $LK = y$, $AF = s$, & l'arc $BC = t$. Cela posé, on trouve sans peine que $x = cs : a$, $xx + yy = ss$, $cdt = adb$, dp, ou MK [petite portion de la figure] $= sdsdt : a$; ce qui donnera $(xx + yy)\, dp = s^3dsdt : a$, dont l'intégrale, qui est [en faisant dt constante] $s^4dt : 4a$, ou bien [en cas de $s = a$], $\frac{1}{4}a^3dt$, marque toutes les $(xx + yy)\, dp$, par raport au petit secteur AC, & l'intégrale $ts^3ds : a$ [qui est telle, faisant s & ds constantes] marque toutes les $(xx + yy)\, dp$ par raport à l'anneau FK. Et partant $\int (xx + yy)\, dp$ sera $= \frac{1}{4}a^3t$ par raport à tous les secteurs AC; & par raport à tous les anneaux FK, cette même intégrale sera $\frac{1}{4}s^4t : a$ [en mettant a pour s] $= \frac{1}{4}a^3t$; de sorte que de l'une & de l'autre maniére la valeur $\int (xx + yy)\, dp$ du secteur entier ABC se trouve $\frac{1}{4}a^3t$. On trouve de même $xdp = cssdsdt : aa$, & $\int xdp$, par raport au secteur AC, [qui fait c & dt constantes] $= \frac{1}{3}cs^3dt : aa$ [en mettant a pour s.] $= \frac{1}{3}acdt = \frac{1}{3}aadb$. Et partant $\int xdp$, par raport au grand secteur ABC, sera $\frac{1}{3}aab$. Ou bien $\int xdp$, par raport à l'anneau FK [qui rend constantes s & ds] $= \frac{ssds}{aa}\int cdt = \frac{ssds}{aa} \times \int adb = bssds : a$. Et partant $\int xdp$, par raport à tous les anneaux, sera $\frac{1}{3}bs^3 : a$ [en mettant a pour s] $= \frac{1}{3}aab$, comme auparavant. Ainsi l'on doit conclure que $\int (xx + yy)\, dp : \int xdp$ doit être ici $\frac{1}{4}a^3t : \frac{1}{3}aab = \frac{3}{4}at : b$.

III.

ment ADCG, à $(\frac{1}{3}cc - \frac{1}{3}aa)\, b + \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}b^3$, ce qui étant ôté de $\frac{1}{3}a^3$, il reste $\frac{1}{3}b^3$, pour le demi-segment BDC; auquel ajoutant $\frac{1}{3}bcc$, pour le triangle ADC, on aura $\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}bcc = \frac{1}{3}aab$, pour le secteur ABC. Divisant donc $\int (xx + \frac{1}{3}vv)\, vdx = \frac{1}{4}a^3t$, par $\int xvdx = \frac{1}{3}aab$, on aura $\frac{3}{4}at : b$ pour la distance du Centre d'oscillation à l'axe du mouvement.

III. Pour ce qui eſt maintenant du plan PAQ, [*Fig.* 1] qui fait ſes agitations *in planum*, & dont l'appliquée LM, paralléle à l'axe du mouvement HH, ſoit $= z$; je conſidére que y étant ici nulle, la quantité $\int(xx+yy)\,dp : \int x\,dp$, ſe réduit à $\int xx\,dp : \int x\,dp$, qui marque juſtement la ſous-centrique du coin qu'on auroit dreſſé ſur la figure, & qu'un plan paſſant par HH, auroit coupé : ce qui me donne $\int xx\,dp : \int x\,dp = \int xxz\,dx : \int xz\,dx$, à cauſe que toutes les dp du petit parallélogramme LM ſont chacune $= z\,dx$, & qu'elles répondent toutes à une même x. De ſorte qu'il n'y a plus qu'à ſubſtituer la valeur de z en x, ſuivant la nature de la courbe, & en prendre l'intégrale. N. XCIX.

EXEMPLES.

Plan propoſé oſcillant *in planum.*	Valeur de z.	Quantité $\frac{\int xxz\,dx}{\int xz\,dx}$	La même dans le cas de $x = a$.
Triangle iſoſcèle ſuſpendu par le ſommet.	$bx : a$	$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}a$
Le même balançant autour de ſa baſe.	$b - bx : a$	$(4ax - 3xx) : (6a - 4x)$	$\frac{1}{2}a$
Rectangle balançant autour de ſon côté.	b	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}a$
Cercle.	$\sqrt{(ax - xx)}$	$\frac{(48x^3 - 8axx - 10aax - 15a^3)z + 15a^3s}{(64xx - 16ax - 24aa)z + 24aas}$	$\frac{5}{8}a$

IV. Qui aura compris l'application de ma Régle aux Solides & aux Surfaces, entendra aiſément la maniére de l'appliquer aux ſeules lignes, ſoit qu'elles ſe meuvent *in latus*, comme la courbe CAD [*Fig.* 2] ou qu'elles ſe meuvent *in planum* comme PAQ. Car

N. XCIX. Car les petites parties dp de ces fortes de grandeurs, n'étant que les fimples élémens ds des courbes, il eft évident que la quantité $\int(xx+yy)dp : \int xdp$ qui en détermine le Centre d'ofcillation, fe réduit à $\int(xx+yy)ds : \int xds$ dans les courbes qui balancent *in latus*, & à $\int xxds : \int xds$ dans celles qui fe meuvent *in planum*, dans lefquelles y eft nulle. De forte qu'il ne refte qu'à y fubftituer la valeur de ds en x & en dx, & à en chercher enfuite l'intégrale. C'eft ainfi qu'on trouve pour le cercle [dont $ds = \frac{1}{2}adx : \sqrt{(ax - xx)}$] $\int(xx+yy)ds : \int xds = (\frac{1}{2}aas - \frac{1}{2}aay) : (\frac{1}{2}as - \frac{1}{2}ay)$, toujours $= a$ (e); & $\int xxds : \int xds = \frac{3}{4}a - xz : (2s - 2z) =$ [en cas de $x = a$] $\frac{3}{4}a$. (f).

D'où l'on voit que la circonférence d'un cercle, ou une partie quelconque de cette circonférence étant muë *in latus*, doit avoir fon Centre d'ofcillation diftant de l'axe du mouvement de la longueur de fon diamétre, & que cette circonférence entiére muë *in planum*, doit avoir cette diftance égale aux trois quarts de fon diamétre.

En voilà, ce me femble, affez pour faire voir que ma Régle s'étend à tout ce que Mr. Huygens nous a laiffé fur cette matiére: Car ce qu'il ajoûte des figures, qui balancent fur un axe pris au dehors de leur circonférence, n'a plus aucune difficulté; il ne faut qu'aporter quelque tempérament en prenant les intégrales; ce qui eft facile. Et ce qu'il dit touchant les plans & les folides obliques, fe peut de même déduire fans peine de ce que j'ai déja dit.

(e) Ou puifque $yy = ax - xx$, on a $xx + yy = ax$, & $\int(xx+yy)ds = \int axds = a\int xds$. Donc $\frac{\int(xx+yy)ds}{\int xds} = \frac{a\int xds}{\int xds} = a$.

(f) Car $\int xxds =$ [puifque $ds = \frac{1}{2}adx : \sqrt{(ax - xx)}$] $\int(\frac{1}{2}axxdx : \sqrt{(ax - xx)}) = \frac{3}{8}aas - \frac{3}{8}aaz - \frac{1}{4}axz$. Et $\int xds = \int(\frac{1}{2}axdx : \sqrt{(ax - xx)}) = \frac{1}{2}as - \frac{1}{2}az$. Donc $\int xxds : \int xds = (\frac{3}{8}aas - \frac{3}{8}aaz - \frac{1}{4}axz) : (\frac{1}{2}as - \frac{1}{2}az) = \frac{3}{4}a - xz : (2s - 2a)$. Or quand $x = a$, alors z [$\sqrt{(ax - xx)}$] $= 0$. Donc dans ce cas $\int xxds : \int xds$ fe réduit à $\frac{3}{4}a$.

N°. C.

DEMONSTRATION

du Principe de Mr. HUYGENS, *touchant le Centre de Balancement, Et de l'identité de ce Centre avec celui de percussion.*

Par Mr. BERNOULLI, Profess. à *Bâle*,

Lettre du 3 Avril 1704.

APrès la démonstration de la doctrine du Centre de Balancement, que je donnai l'année passée à l'Académie, par un principe incontestable, tiré de la nature du Levier ; il me sera présentement facile, en retournant sur mes pas, de démontrer la vérité du Principe de Mr. HUYGENS, qui peut-être, sans cette démonstration, seroit plus sujet à être contesté : sçavoir, que *le Centre commun de gravité des parties d'un Pendule, qui descendent conjointement, & remontent ensuite séparément, chacune avec sa vitesse acquise, doit remonter précisément à la même hauteur dont il est descendu.* *Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris* 1704. pag. 136, Ed. de Paris, & pag. 188, Edit. de Holl.

Pour cet effet, soit la Figure 1, repetée de mon Mémoire du 13 Mars de l'année passée, présenté à l'Académie le 25 Avril de la même année : soit, dis-je, encore A l'axe horizontal du balancement ; AXM un plan vertical droit à l'axe ;

No. C. AM le diamétre de la figure qui balance, auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée CLD à angle donné ALD; en sorte que CL soit égale à LD, & dont C, D, soient deux petites parcelles de la figure, qui décrivent dans leur balancement les arcs CT, DS; soit aussi AM la longueur du Pendule simple qui fait ses vibrations dans le même tems que la figure. Soient de plus les verticales MX, CY, LH, DL, lesquelles rencontrent l'horizontale AX en X, G, H, I; & sur lesquelles, prolongées de haut en bas, soient prises des parties infiniment petites & égales MN, CO, DP, qui expriment chacune ce que la pesanteur ajoûte d'impulsion, à chaque moment, à chacun des poids M, C, D. Ensuite après avoir mené les droites NK, OT, PV, perpendiculaires aux arcs MK, CT, DV; soient CB, LF perpendiculaires sur LH, DI, & le reste comme on le voit dans la Figure.

Quant aux noms, soient encore, comme dans le Mémoire du 25 Avril 1703 *, MN = CO = DP = a, sinus total; le sinus de l'angle LAE = g, AC = l, AD = m, AM = t, AL = x, LC = LD = y, $C = D = dp$. D'où l'on a trouvé dans ce Mémoire, LE = $gx : a$, ll [AC^2] = $xx + yy + 2gxy : a$, mm [AD^2] = $xx + yy - 2gxy : a$, & enfin $t = \int (xx + yy)\, dp : \int x\, dp$. Outre ces noms, soient aussi NK = c, & le sinus de l'angle LCB = e.

Cela fait, supposons que le diamétre de la figure qui balance; ainsi que le Pendule simple isochrone, soit descendu de AX en AM, & que les poids M, C, D, &c. s'étant ensuite détachés d'ensemble, remontent séparément chacun avec sa vîtesse acquise. Il est clair que le poids M du Pendule simple doit remonter à la même hauteur MX, d'où il est descendu; mais que les poids C & D remonteront à des hauteurs différentes, comme CY, DZ, lesquelles se trouveront de la maniére que voici.

MN

* Ci-dessus N°. XCVIII. pag. 935.

No. C.

$MN\,[a] : NK\,[e] = AL\,[x] : LH\,[\frac{ex}{a}] = AM\,[t] : MX\,[\frac{et}{a}]$

$AM^2\,[tt] : AC^2\,[ll] = MX\,[\frac{et}{a}] : CY\,[\frac{cll}{at}]$

$AM^2\,[tt] : AD^2\,[mm] = MX\,[\frac{ct}{a}] : DZ\,[\frac{cmm}{at}]$

Sin.tot. $[a]$: Sin. ang. LCB $[e]$ = LC ou LD $[y]$: LB ou DF $[\frac{ey}{a}]$

Ce qui donne

$$\begin{cases} CG = LH - LB = (cx - ey) : a \\ DI = LH + DF = (cx + ey) : a \\ GY = CY - CG = cll : at - (cx - ey) : a \\ IZ = DI - DZ = (cx + ey) : a - cmm : at \end{cases}$$

Donc le produit du petit poids C ou Y par GY sera $= clldp : at - (cxdp - eydp) : a$, & celui du petit poids D ou Z par IZ $= (cxdp + eydp) : a - cmmdp : at$. Et par conséquent la somme de tous les produits de Y par GY [moment de tous les poids Y par raport à la ligne AX] $= \int \frac{clldp}{at} - \int \frac{cxdp}{a} + \int \frac{eydp}{a} = \frac{c}{at} \int lldp - \frac{c}{a} \int xdp + \frac{e}{a} \int ydp$. Et la somme de tous les produits de Z par IZ [moment de tous les poids Z par raport à la même ligne AX] $= \int \frac{cxdp}{a} + \int \frac{eydp}{a} - \int \frac{cmmdp}{at} = \frac{c}{a} \int xdp + \frac{e}{a} \int ydp - \frac{c}{at} \int mmdp$.

Or ces deux sommes sont égales entr'elles ; ce qui se prouve par mon Mémoire du 25 Avril de l'année passée *, en ce que j'y démontrai $t = \int (xx + yy)\, dp : \int xdp$. Car si l'on multiplie les deux parties de cette équation par $\frac{2c}{at} \int xdp$, l'on aura $\frac{2c}{a} \int xdp$

Eeeeee 2 $= 2c$

* No. XCVIII, pag. 936.

No. C. $= \frac{2c}{at}\int(xx+yy)\,dp$ [à cause de $ll+mm = 2xx+2yy$] $=$ $\frac{c}{at}\int(ll+mm)\,dp = \frac{c}{at}\int lldp + \frac{c}{at}\int mmdp$; & en ôtant de part & d'autre $\frac{c}{a}\int xdp - \frac{c}{a}\int ydp + \frac{c}{at}\int mmdp$, on trouvera $\frac{c}{a}\int xdp + \frac{c}{a}\int ydp - \frac{c}{at}\int mmdp = \frac{c}{at}\int lldp - \frac{c}{a}\int xdp + \frac{c}{a}\int ydp$; c'est-à-dire que le moment de tous les *Z* est égal au moment de tous les *Y* par raport à la ligne AX. Donc le centre commun de gravité de tous ces poids se trouve dans la même ligne AX. Et par conséquent il est remonté aussi haut qu'il étoit descendu. *Ce qu'il faloit premiérement démontrer.*

La même chose se peut encore prouver d'une autre maniére plus succincte, en faisant voir que la somme des produits de *Y* par GY, [en comprenant aussi sous *Y* les *Z* de l'autre côté,] est égale à zero; ce qui est facile. On n'a qu'à substituer simplement $xx+yy$ au lieu de ll, & effacer entiérement $\frac{c}{a}\int ydp$; parce que toutes les ydp positives d'une part, sont détruites par autant de ydp de l'autre: de cette maniére l'on aura $\frac{c}{at}\int(xx+yy)dp - \frac{c}{a}\int xdp$ pour la somme de ces produits, c'est-à-dire, [en mettant $\int(xx+yy)dp : \int xdp$ au lieu de t] $\frac{c}{a}\int xdp - \frac{c}{a}\int xdp = 0$. Car de là il suit encore, que le Centre commun de gravité de toutes les parties du Pendule se trouve dans la ligne AX (*).

(*) Puisque $\int Y \times GY - \int Z \times IZ = 0$, le Centre de gravité des corps *Y* & *Z*, ceux-là supérieurs, ceux-ci inférieurs à la droite horizontale AX, leur Centre, dis-je, de gravité se trouve sur cette droite AX, après que les poids sont remontés. Or c'est de cette même ligne horizontale qu'il est supposé descendu. Donc il remonte à la même hauteur dont il est descendu.

Identité

Identité des Centres d'oscillation & de percussion. No. C.

Pour démontrer l'identité des Centres d'oscillation & de percussion ; soient conçuës trois verges AC, AD, AT, inflexibles, sans pesanteur, & liées ensemble en un angle invariable CAD, dans la seconde Figure ; que les deux premiéres de ces verges soient chargées à leurs extrémités de poids égaux *C*, *D* ; & que la troisiéme passe par L Centre commun de gravité de ces poids. Il s'agit de trouver le Centre de percussion M, qui doit être tel, qu'ayant mû l'angle CAD autour du point A, les chocs, ou les *momens* de percussion, à l'égard du point M, comme de l'apui, soient égaux de part & d'autre. Pour cela soient menées CT, DS, perpendiculaires à AC, AD ; & MR, MS, perpendiculaires à CT, DS. Les droites CT, DS, seront les lignes de direction des poids, lorsque dans leur mouvement circulaire ils arriveront en C & en D: ainsi le produit du poids *C* par la vitesse AC & par la distance MR, & celui du poids *D* par la vitesse AD & par la distance MS, marqueront les chocs de ces poids, ou leurs *momens* de percussion, par raport à l'apui M. Ayant donc marqué les quantités homologues à celles du Mémoire du 25 Avril de l'année passée, par les mêmes lettres, repétées au commencement de cet Ecrit-ci *, nous trouverons ce qui suit.

AC : LC = Sin. ang. ALC : Sin. ang. LAC

$l : y = \sqrt{(aa - gg)} : \sqrt{((aayy - ggyy) : ll)}$

Et AD : LD = Sin. ang. ALD : Sin ang. LAD

$m : y = \sqrt{(aa - gg)} : \sqrt{((aayy - ggyy) : mm)}$

Donc Sin. ang. ATC $= \sqrt{(aa - \frac{aayy - ggyy}{ll})} = \sqrt{(aall - aayy + ggyy)} : l$

Et Sin. ang. AVD $= \sqrt{(aa - \frac{aayy - ggyy}{mm})} = \sqrt{(aamm - aayy + ggyy)} : m$

 c'est-

* Pag. 948.

No. C. c'eſt-à-dire, en mettant au lieu de ll & mm leurs valeurs

Sin. ang. ATC $= \sqrt{(aaxx + 2agxy + ggyy)} : l = (ax + gy) : l$
& Sin. ang. AVD $= \sqrt{(aaxx - 2agxy + ggyy)} : m = (ax - gy) : m$

Après cela on trouve

Sin. ang. A T C : Sin. tot. = A C : AT

$$\frac{ax+gy}{l} \quad : \quad a \quad = \quad l \quad : \frac{all}{ax+gy}$$

Sin. ang. A V D : Sin. tot. = A D : A V

$$\frac{ax-gy}{m} \quad : \quad a \quad = \quad m \quad : \frac{amm}{ax-gy}$$

Donc $\begin{cases} TM = AT - AM = all : (ax+gy) - t \\ MV = AM - AV = t - amm : (ax - gy) \end{cases}$

De plus, Sin. tot : Sin. ang. A T C = TM : MR.

$$a \quad : \quad \frac{ax+gy}{l} \quad = \frac{all}{ax+gy} - t : \frac{all - axt - gyt}{al}$$

Sin. tot : Sin. ang. MVS ou AVD = MV : MS

$$a \quad : \quad \frac{ax-gy}{m} \quad = t - \frac{amm}{ax-gy} : \frac{axt - gyt - amm}{am}.$$

Donc $c \times AC \times MR = dp \times l \times (all - axt - gyt) : al$
$= (all - axt - gyt)\, dp : a$ [en mettant pour ll ſa valeur]
$= (axx + ayy + 2gxy - axt - gyt)\, dp : a$;

Et $D \times AD \times MS = dp \times m \times (axt - gyt - amm) : am$
$= (axt - gyt - amm)\, dp : a$ [en mettant pour mm ſa valeur]
$= (axt - gyt - axx - ayy + 2gxy)\, dp : a$.

Donc auſſi puiſque la ſomme de tous les produits $c \times AC \times MR$ doit être égale à la ſomme de tous les produits $D \times AD \times MS$; l'on aura $\int xxdp + \int yydp + \frac{2}{a}\int gxydp - t\int xdp - \frac{t}{a}\int gydp$
$= t\int xdp$

$= t\int x dp - \frac{t}{a}\int g y dp - \int xx dp - \int yy dp + \frac{2}{a}\int g x y dp$; ce qui nous fournit $t = (\int xx dp + \int yy dp) : \int x dp = \int (xx + yy) dp : \int x dp$. On trouvera encore la même chose, en ne considérant qu'une seule des deux sommes précédentes, en effaçant tous les termes où y n'a qu'une dimension, & en égalant le reste à zéro : on trouvera, dis-je, encore de cette maniére $t = \int (xx + yy) dp : \int x dp$, qui est la même quantité que nous avons trouvé pour le Centre d'oscillation, dans le Mémoire du 25 Avril de l'année passée. Donc le Centre d'oscillation & de percussion ne sont toûjours qu'un seul & même point, *Ce qui est la seconde chose qu'il faloit ici démontrer.* No. C.

N°. CI.

N°. CI.

POSITIONUM
DE
SERIEBUS INFINITIS,
EARUMQUE USU

In quadraturis Spatiorum & rectificationibus Curvarum,

PARS QUINTA,

Quam

Sub Præsidio

VIRI CLARISSIMI

JACOBI BERNOULLI, Math. Prof.

Utr. Soc. Reg. Scient. Gall. & Brandeb. Sodalis,

Patrui sui honoratissimi,

defendit

NICOLAUS BERNOULLI, NIC. FIL. Basil. Mag. Cand.

Ad diem 8 *Aprilis M. DCC. IV.*

Edita primum

BASILEÆ,

1704.

POSITIONUM
DE
SERIEBUS INFINITIS
Pars Quinta.

No. CI.

CUM *non omnes quantitates ſurdæ, nedum tranſcendentes, differentialibus admixtæ, præcedentibus modis in rationales transformari, inque Series converti poſſint, ad alia ſubinde nobis artificia recurrendum eſt ad obtinendum propoſitum; inter quæ, ob univerſalitatem ſuam, eminent* Interpolationes *Wallisianæ*, *vel* Exaltatio binomii ad poteſtatem indefinitam, *vel* Aſſumtio Seriei fictæ inſtar quæſitæ, *aut conſimilia ſubſidia alia, quorum, pro re nata, nunc unum, nunc plura in uſum verti queunt. Nos pauca eorum ſpecimina, poſt generalia nonnulla, in uno alterove exemplo ſubjungemus.*

No. CI.

PROPOSITIO LIII.

Quantitatem quamcunque surdam, vel irrationalem, in Seriem infinitam rationalium convertere, per interpolationes Wallisianas.

Reducatur quantitas rationalis, cujus poteſtas fracta, ſive radix, aut latus quæritur, ad fractionem hujus formæ $l:(m-n)$ [ponendo $m>n$]. Hujus fractionis poteſtates integræ, prima, ſecunda, tertia, &c. convertantur ope diviſionis continuæ in totidem Series, per XXXVI uſque ad XL Propp. * hoc pacto:

Exp.	*Poteſt.*
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$ &c.
1	$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5}$ &c.
2	$\frac{ll}{(m-n)^2} = \frac{ll}{mm} + \frac{2lln}{m^3} + \frac{3llnn}{m^4} + \frac{4lln^3}{m^5} + \frac{5lln^4}{m^6}$ &c.
3	$\frac{l^3}{(m-n)^3} = \frac{l^3}{m^3} + \frac{3l^3n}{m^4} + \frac{6l^3nn}{m^5} + \frac{10l^3n^3}{m^6} + \frac{15l^3n^4}{m^7}$ &c.
4	$\frac{l^4}{(m-n)^4} = \frac{l^4}{m^4} + \frac{4l^4n}{m^5} + \frac{10l^4nn}{m^6} + \frac{20l^4n^3}{m^7} + \frac{35l^4n^4}{m^8}$ &c.

In his Seriebus obſervabis, coefficientes primorum terminorum conſtituere unitates, coefficientes ſecundorum numeros laterales, tertiorum trigonales, quartorum pyramidales, & ſic porro; terminos vero puros ordine oriri ex ductu fractionis $l:m$ [ad poteſtatem elevatæ ſimilem ei ad quam elevanda fractio $l:(m-n)$] in 1, $n:m$, $nn:mm$, $n^3:m^3$ &c. Hinc ad inveniendas poteſtates intermedias, ſive radices [ceu media quædam geometrica, quorum exponentes ſunt arithmetice medii inter exponentes integrorum] numeri terminorum figurati tantum ſunt interpolandi, juxta

* N°. LXXIV, pag. 749. & ſeq.

juxta doctrinam WALLISII Prop. 172. seqq. *Arithm. Infin.* No. CI.
Est vero, posito exponente vel indice potestatis p, generalis character lateralium quoque p, trigonalium $\frac{p.\overline{p+1}}{1.\ 2}$, pyramidalium, $\frac{p.\overline{p+1}.\overline{p+2}}{1.\ 2.\ 3}$, &c. ut ibid. docetur Prop. 182. Quare si p interpreteris per $\frac{1}{2}$, invenies potestatem dimidiam quantitatis $\frac{l}{m-n}$, nempe $\sqrt{\frac{l}{m-n}} = \sqrt{\frac{l}{m}} \times (1 + \frac{1\,n}{2m} + \frac{1.\,3\,nn}{2.4mm} + \frac{1.3.\,5\,n^3}{2.4.6\,m^3}$ $+ \frac{1.3.5.7\,n^4}{2.4.6.8\,m^4} +$ &c.). Si p explices per $\frac{1}{3}$, habebis trientem potestatis seu $\sqrt[3]{\frac{l}{m-n}} = \sqrt[3]{\frac{l}{m}} \times (1 + \frac{1\,n}{3m} + \frac{1.\,4\,nn}{3.6\,mm} + \frac{1.\,4.7\,n^3}{3.6.9\,m^3} +$ $\frac{1.4.7.10\,n^4}{3.6.9.12m^4}$ &c.). Si per $\frac{3}{2}$, obtinebis sesquialteram potestatem seu $\frac{l}{m-n}\sqrt{\frac{l}{m-n}} = \frac{l}{m}\sqrt{\frac{l}{m}} \times (1 + \frac{3\,n}{2m} + \frac{3.\,5\,nn}{2.4\,mm} + \frac{3.\,5.\,7\,n^3}{2.\,4.\,6\,m^3} +$ $\frac{3.5.7.9\,n^4}{2.4.6.8m^4} +$ &c.) &c.

COROLL. Quoniam positis l, m & n æqualibus inter se, fit quantitas $\frac{l}{m-n} = \frac{l}{0} = \infty$, Series autem prædictæ abeunt in Series purorum coefficientium $1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}$ &c., $1 + \frac{1}{3}$ $+ \frac{1.4}{4.6} + \frac{1.4.7}{3.6.9}$ &c., $1 + \frac{3}{2} + \frac{3.5}{2.4} + \frac{3.5.7}{2.4.6}$ &c.; colligimus, Series ejusmodi natas ex ductu continuo fractionum, quarum numeratores & denominatores in progressione arithmetica per differentias primo denominatori æquales insurgunt, summas fundere infinitas; quod apertius ita constabit: Minue numeratores, eosque æquales constitue denominatoribus singulos singulis, nempe secundum numeratorem primo denominatori, tertium secundo, quartum tertio, & ita deinceps; sic enim, ex. gr. loco primæ Se-

No. CI. riei habebis $1+\frac{1}{2}+\frac{1.2}{2.4}+\frac{1.2.4}{2.4.6}+\frac{1.2.4.6}{2.4.6.8}$ &c. $=$ [perimentibus se mutuo dictis numeris] $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. $=\infty$, per Cor. 2, XVI †; unde fortius altera $1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}$ &c. ob numeratores majores, infinita erit. Cæterum postremus terminus cujusque Seriei nunc nullus est, nunc infinitus; prout exponens potestatis p, vel prima Seriei fractio, unitate minor est, majorve. Sic ultimus terminus primæ Seriei $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$ &c. nullus est; nam si quantus esset, etiam hic foret quantus $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}$ &c., utpote cujus singuli factores singulis factoribus præcedentis termini ordine sumtis sunt majores; quare & utriusque productum quantum foret, nempe $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$ &c. in $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}$ &c. $=$ [permistis alternatim utriusque factoribus] $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\ldots\frac{\infty-1}{\infty}$ $=$ [ob numeratores omnes primum sequentes, & denominatores ultimum præcedentes se mutuo perimentes] $\frac{1}{\infty}=0$; quod absurdum. Ultimus contra terminus tertiæ Seriei $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\frac{9}{8}$ &c. infinitus est; nam si finitus esset, etiam hic foret finitus $\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\frac{8}{7}\times\frac{10}{9}$ &c. utpote cujus singuli factores singulis illius sunt minores; quocirca & utriusque productum finitum foret; nempe $\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}$ &c. in $\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\frac{8}{7}$ &c. $=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\ldots\ldots\frac{\infty}{\infty-1}=$ [destruentibus se mutuo numeratoribus qui ultimum præcedunt, & denominatoribus qui primum sequuntur] $\frac{\infty}{2}=\infty$; quod pariter absurdum.

LIV.

Idem præstare per exaltationem binomii ad potestatem indefinitam.

Quantitas rationalis, cujus potestas per Seriem desideratur, sit expres-

† N°. XXXV. pag. 394.

expressa per binomium $1+n$ [ponendo $1 > n$]. Hujus binomii potestas indefinita p, ut jam passim inter Geometras notum, per Seriem exprimitur $1+\frac{p}{1}n+\frac{p.p-1}{1.2}nn+\frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}n^3+\frac{p.p-1.p-2.p-3}{1.2.3.4}n^4+$ &c. ubi perspicuum est, quod quotiescunque exponens potestatis p est numerus integer & positivus, Series necessario aliquando abrumpetur; quandoquidem in continuatione ulteriori coefficientium $p.p-1.p-2.$ &c. necessario tandem devenietur ad $p-p=0$; quod proin illum terminum & ab illo deinceps omnes evanescere facit. Sed quoties p numerus fractus est, aut negativus, coefficientes nunquam in nihilum abibunt; ac ideo Series in infinitum excurret: qua ratione habetur ex. gr. $\sqrt{(1+n)}$ [ubi p valet $\frac{1}{2}$] $=1+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2.4}nn+\frac{1.3}{2.4.6}n^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}n^4+$ &c. & $\sqrt[3]{(1+n)}$ [ubi p valet $\frac{1}{3}$] $=1+\frac{1}{3}n-\frac{2}{3.6}nn+\frac{2.5}{3.6.9}n^3-\frac{2.5.8}{3.6.9.12}n^4$ &c. & $1:\sqrt{(1+n)}$ [ubi p notat $-\frac{1}{2}$] $=1-\frac{1}{2}n+\frac{1.3}{2.4}nn-\frac{1.3.5}{2.4.6}n^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^4-$ &c. & pariter in cæteris. No. CI.

Nota, quod exaltatio binomii ad potestatem indefinitam, & interpolationis negotium reapse in idem recidunt, unoque & eodem nituntur fundamento; quod consistit in proprietate quadam numerorum figuratorum supra jam prælibata Propos. XIX †; sed cujus demonstrationem, ne hic nimii simus, in aliam occasionem reservamus.

L V.

Duarum quantitatum indeterminatarum relationem unius ad alteram per Seriem exprimere, ope assumtæ Seriei fictæ instar quæsitæ.

Ponatur

† N°. LIV. pag. 521. Vide ibi Notam (b).

No. CI. Ponatur alterutra indeterminatarum x & y, quarum relatio ad se invicem quæritur, puta y, æquari Seriei $a+bx+cxx+ex^3+fx^4$, &c. aut $a+bxx+cx^4+ex^6$, &c. aut $a+bx^4+cx^8+ex^{12}$, &c. aut simili, prout opus videbitur ([a]); atque tum, in quantitate vel æquatione proposita, loco y substituatur hæc Series, nec non loco dy & ddy, &c. Seriei differentiale aut differentio-differentiale, &c. quo facto, ex comparatione homologorum terminorum determinari poterunt assumti coefficientes a, b, c, &c. Sequuntur Exempla.

LVI.

Invenire relationem coordinatarum Curvæ Elasticæ per Seriem.

Flectatur Elater in curvaturam AQR [*Fig.* 1] a potentia applicata in A, & trahente juxta directionem AZ; sitque AB, vel $RZ=a$, AE vel $PQ=x$, AP vel $EQ=y$, & $AQ=z$; ostensum est in *Act. Lipſ.* 1694, p. 272, & 1695, p. 538, † naturam hujus curvæ exprimi æquatione $dy=xxdx:\sqrt{(a^4-x^4)}$, e qua qui methodo DIOPHANTI, qua in præcedenti parte usi fuimus, irrationalitatem tollere vellet, ætatem consumeret; cum deprehensum sit a Geometris, summam vel differentiam duorum biquadratorum, qualis est a^4-x^4, nunquam posse constituere quadratum. Quare nobis confugiendum est vel ad Interpolationes, vel ad indefinitam Potentiam binomii, hoc pacto:

Primus

([a]) Id nimis vagum est. Nam pro diversa relatione quantitatum x & y, forma Seriei assumendæ varianda est, tum quoad terminum primum, qui non semper erit quantitas constans a, tum quoad progressionem exponentium indeterminatæ x. Hanc formam invenire docuit NEWTONUS ope parallelogrammi cujusdam, quam methodum secutus est TAYLORUS, perfecerunt Cl. STIRLING & s'GRAVESANDE, ita tamen ut pauca quædam in melius mutari adhuc possint. Sed non satis generalem esse methodum parallelogrammi ostendit Cl. *Nic.* BERNOULLI, ille ipse qui Positiones istas defendit, aliamque longe universaliorem substituit. At eam hic exponere non vacat.

† N°. LVIII, pag. 592, & N°. LXVI, pag. 641.

Primus Modus. Interpretemur x^4 tam per l, quam per n, & a^4 per m; erit $x^4:(a^4-x^4)=l:(m-n)$; unde, per LIII, habetur $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$, id est, $\sqrt{\frac{x^4}{a^4-x^4}}$ aut $\frac{xx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}=\frac{xx}{aa}+\frac{1x^6}{2a^6}+\frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}}+\frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}}+$ &c. & [facta multiplicatione per dx] $\frac{xxdx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ seu $dy=\frac{xxdx}{aa}+\frac{1x^6dx}{2a^6}+\frac{1.3x^{10}dx}{2.4a^{10}}+\frac{1.3.5x^{14}dx}{2.4.6a^{14}}$ &c. & denique summando, AP seu $y=\frac{x^3}{3aa}+\frac{1x^7}{2.7a^6}+\frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}}+\frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}}+$ &c. No. CI.

Secundus Modus. Explicemus nunc a per 1, & $-x^4$ per n; erit $a^4-x^4=1+n$, & $\frac{1}{\sqrt{(a^4-x^4)}}=\frac{1}{\sqrt{(1+n)}}$: unde, per LIV, fit $\frac{1}{\sqrt{(1+n)}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{(a^4-x^4)}}=1+\frac{1}{2}x^4+\frac{1.3}{2.4}x^8+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12}+$ &c. & [multiplicand. per $xxdx$] $\frac{xxdx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}=xxdx+\frac{1}{2}x^6dx+\frac{1.3}{2.4}x^{10}dx+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^{14}dx+$ &c. & integrando, $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2.7}x^7+\frac{1.3}{2.4.11}x^{11}+\frac{1.3.5}{2.4.6.15}x^{15}+$ &c. seu denique supplendo unitatem, $\frac{x^3}{3aa}+\frac{1x^7}{2.7a^6}+\frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}}+\frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}}+$ &c. ut antea.

COROLL. Sumta $x=a=1$, fit tota $AZ=\frac{1}{3}+\frac{1}{2.7}+\frac{1.3}{2.4.11}+\frac{1.3.5}{2.4.6.15}+$ &c. Conf. *Act. Lips.* 1694, pag. 274. & 369 *.

* N°. LVIII. pag. 596. & N°. LXIV. pag. 632.

No. CI.

LVII.

Rectificare eandem curvam per Seriem.

Quia æquatio curvæ, ut dictum, est $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, fiet quadrando $dy^2 = x^4dx : (a^4 - x^4)$ & $dz^2 = dy^2 + dx^2 = x^4dx : (a^4 - x^4) + dx^2 = a^4dx^2 : (a^4 - x^4)$, adeoque $dz = aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Exponamus a^4 nunc per l, nunc per m, & x^4 per n, erit $\frac{aa}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ seu $\sqrt{\frac{a^4}{a^4 - x^4}} = \sqrt{\frac{l}{m - n}}$; unde, per LIII, fit $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ sive $\sqrt{\frac{a^4}{a^4 - x^4}} = 1 + \frac{1\, x^4}{2a^4} + \frac{1.3\, x^8}{2.4\, a^8} + \frac{1.3.5\, x^{12}}{2.4.6\, a^{12}} +$ &c. & [multiplic. per dx] $\frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ seu $dz = dx + \frac{1x^4dx}{2a^4} + \frac{1.3x^8dx}{2.4a^8} + \frac{1.3.5x^{12}dx}{2.4.6a^{12}} +$ &c. tandemque summando, z sive $AQ = x + \frac{1x^5}{2.5\, a^4} + \frac{1.3x^9}{2.4.9\, a^8} + \frac{1.3.5\, x^{13}}{2.4.6.13\, a^{12}} +$ &c. Idem etiam, per LIV, simili modo ostendetur.

COROLL. Facta $x = a = 1$, habetur tota $AQR = 1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} +$ &c. Vid. *Act. Lips.* 1694, p. 274. †

LVIII.

Definire limites præcedentium serierum.

Quoniam Series his methodis repertæ nimis lente convergunt, non abs re erit, si modum ostendam quo, levi labore, summis earum, quantum ad usum sufficit, approximare & limites constituere possimus. In exemplum propositæ sint proximæ duæ Series, quibus exprimitur applicata Elasticæ *BR* vel *AZ*, & longitudo ipsius curvæ *AR*; nempe $\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} +$ &c. &,

† No. LVIII. pag. 596.

&, $1+\frac{1}{2.5}+\frac{1.3}{2.4.9}+\frac{1.3.5}{2.4.6.13}+$ &c. Sumo quantitatem; cujus integrale haberi possit, datis $xxdx:\sqrt{(a^4-x^4)}$ & $aadx:\sqrt{(a^4-x^4)}$, e quibus Series propositæ fluxerunt, affinem, puta $x^3dx:\sqrt{(a^4-x^4)}$, cujus integrale est $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}\sqrt{(a^4-x^4)}$, camque pari methodo in Seriem resolvo, & Seriei terminis summatis, pro x & a unitatem pono; quo pacto Series emerget $\frac{1}{4}+\frac{1}{2.8}+\frac{1.3}{2.4.12}+\frac{1.3.5}{2.4.6.16}+$ &c. æqualis proinde $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}\sqrt{(a^4-x^4)}=\frac{1}{2}$, seu 0.5000000. Colligo jam singularum Serierum terminos aliquot ab initio in unam summam [quod expedite fit per Logarithmos] ex. gr. decem primos terminos, qui collecti efficiunt, in prima Serie, 0.5102560; in secunda Serie, 1.2207187; in tertia, 0.4119014. Hujus igitur reliqui post decimum termini [ad complendum $\frac{1}{2}$ seu 0.5000000] constituent 0.0880986, qui numerus additus summæ 10 primorum terminorum in prima & secunda Serie exhibet 0.5983546 & 1.3088173, summis totarum Serierum justo minores, ob singulos tertiæ Seriei terminos minores homologis terminis reliquarum. No. CI.

Deinde, quia undecimi termini in tribus istis Seriebus sunt $\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19}{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.43}$, $\frac{1.3.5\ldots19}{2.4.6\ldots20.41}$, $\frac{1.3.5\ldots19}{2.4.6\ldots20.44}$; liquet terminum hunc in Serie tertia ad eundem in Serie prima reciproce esse ut 43 ad 44, & ad eundem in secunda ut 41 ad 44; terminorum vero sequentium singulos in tertia Serie ad ejusdem ordinis terminos in reliquis Seriebus habere rationem majorem quam 43 ad 44, & quam 41 ad 44: unde & summa omnium sequentium decimum in tertia Serie ad summam omnium post decimum in reliquis Seriebus majorem rationem habebit. Idcirco si fiat, ut 43 ad 44, nec non ut 41 ad 44, ita summa terminorum post decimum in tertia Serie, nimirum 0.0880986, ad 0.0901474 & ad 0.0945448; erunt hi numeri majores summis terminorum decimum sequentium in prima & secunda Serie: quapropter si addantur summis 10 priorum, quæ sunt 0.5102560 & 1.2207187, erunt quoque numeri provenien-

No. CI. nientes 0.6004034 & 1.3152635 majores summis totarum Serierum.

Reperti ergo sunt limites, quibus summæ primæ & secundæ Seriei definiuntur: limites illius sunt 0.5983546 & 0.6004034; hujus 1.3088173 & 1.3152635: unde applicata *BR* vel *AZ* major est quam 0.598, & minor quam 0.601 (b); ipsa vero curva $AR > 1.308$, & < 1.316 (c), sic ut tres istæ lineæ *RZ*, *AZ* & *AQR* proxime se habeant ut 10, 6, 13. Conf. *Act. Lips.* 1694, p. 274. *

SCHOLIUM. Quoniam ex natura descensus gravium demonstratur, quod tempus descensus Penduli alicujus per quadrantem circuli ad tempus descensus perpendicularis per ejus radium eam rationem habet, quam habet curva Elastica *AR* ad ejus axem *RZ* (d), hoc est majorem, ut ostendimus, quam 1308 ad 1000, & minorem quàm 1316 ad 1000: tempus autem descensus perpendicularis per circuli radium ad tempus per semiradium, se habet ut $\sqrt{2}$ ad 1: & tempus per semiradium ad tempus per arcum minimum [consentiente HUGENIO in *Horol. Oscillat.* pag. 155. †] ut diameter circuli ad ejus semiperipheriam, hoc est ut 226 ad 355: inferri potest ex æquo, quod tempus descensus Penduli per quadrantem integrum ad tempus descensus ejus per arcum

(b) Applicatam BR invenit Cel. STIRLING esse $= 0.59907011736779611$, quam proxime.

(c) Curvam vero Elasticam idem reperit $= 1.31102877714605987$.

* No. LVIII, pag. 596.

(d) Sit $s = \int(adu : \sqrt{(aa - uu)})$ arcus circuli, cujus sinus $= u$, radius $= a$; & quia celeritas gravis delapsi per altitudinem u est $\sqrt{u}$, erit tempus descensus per arcum ad tempus descensus per sinum ut $\int(ds : \sqrt{u})$ ad $\int(du : \sqrt{u})$, hoc est ut $\int(adu : \sqrt{(aau - u^3)})$ ad $\int(du : \sqrt{u})$. Pone $u = xx : a$, & erunt tempora descensus per arcum & per sinum, ut $\int(2xdx : \sqrt{(axx - x^6 : a^3)}) = \int(2adx\sqrt{a} : \sqrt{(a^4 - x^4)})$ ad $\int \frac{2xdx : a}{\sqrt{(xx : a)}} = \int 2dx : \sqrt{a}$, hoc est, multiplicando utrumque terminum per $\frac{1}{2}\sqrt{a}$, ut $\int(aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$ ad $\int dx = x$, sive, per Prop. LVII, ut arcus AQ Elasticæ ad ejus abscissam A E vel PQ. Itaque, quando $x = a = u$, tempus descensus per quadrantem est ad tempus descensus per radium, ut curva Elastica AR ad ejus axem AB vel RZ.

† Part. II. Prop. XXV.

arcum minimum, se habet in ratione majore quam 3400 ad 2888, No. CI. & in minore quam 3400 ad 2869 ([e]); unde rationem 3400 ad 2900, sive 34 ad 29, quam præfatus Auctor ibid. pag. 9, temporibus horum descensuum assignat, extra hos limites cadere liquet.

LIX.

Dati Logarithmi Numerum invenire per Seriem.

Intelligatur Curva Logarithmica *PCQ* [*Fig.* 1 N[I]. LXXIV], cujus axis *AD*, subtangens constans $= t$, applicata $BC = 1$, Logarithmus datus *BI* [*Bι*] $= x$, ejusque Numerus *IO* [*ιo*] $= y$; erit, ex generali curvarum natura, $\pm dy : dx = y : t$, adeoque $y = \pm t dy : dx$. Fiat, juxta præscriptum Prop. LV, $y = 1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c. & differentiando, $dx{:}dy = b + 2cx + 3exx + 4fx^3$ &c. eritque $1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. $[= y = \pm t dy : dx] = \pm bt \pm 2ctx \pm 3etxx \pm 4ftx^3 \pm 5gtx^4$, &c. & facta comparatione homologorum terminorum elicietur, $b = \pm \frac{1}{t}$, $c\ [\pm - \frac{b}{2t}] = \frac{1}{1.2tt}$, $e\ [\pm \frac{c}{3t}] = \pm \frac{1}{1.2.3t^3}$, $f\ [\pm \frac{e}{4t}] = \frac{1}{1.2.3.4t^4}$, &c. unde, valoribus istis coefficientium b, c, e, &c. substitutis, resultat $y = 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2tt} \pm \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4t^4} \pm$ &c. Conf. *Act. Lips.* 1693, p. 179. ([f])

Aliter idem absque differentialium adminiculo. Concipiatur Logus *BI* [*Bι*] divisus in partes quotlibet æquales *BE*, *EF*, *FG*, &c. [*Bε*, *εφ*, *φγ*, &c.], quarum numerus sit n, & singulæ dicantur d, sic ut nd sit $= BI\ [Bι] = x$. Tum applicatis curvæ rectis totidem *EK*, *FL*, *GM*, &c. [*εx*, *φλ*, *γμ*, &c.] jungantur extremita-

([e]) Ope numeri *Stirlingiani* Not. c inveni rationem hanc esse quam proxime 1.18034059901609618 ad 1, sive 34 ad 28.800524430242689441, salvo errore calculi.

([f]) Ibi LEIBNITIUS idem, eodem fere modo, demonstrat.

No. CI. mitates C & K [κ] duarum BC, EK [$\epsilon\kappa$] per rectam CK [$C\kappa$]; sitque axis portio inter productam CK [$C\kappa$] & applicatam BC intercepta $= t$; quo pacto, propter triangula similia, fiet $t : 1$ [BC] $= t \pm d : 1 \pm \frac{d}{t} = EK[\epsilon\kappa]$. Et quoniam, ob æquales BE, EF, FG, &c. [$B\epsilon$, $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$, &c.], ipsæ BC, EK, FL, &c. [BC, $\epsilon\kappa$, $\varphi\lambda$, &c.] in continua sunt proportione, earumque prima $BC = 1$, idcirco designabit FL [$\varphi\lambda$] secundam potestatem, QM [$\gamma\mu$] tertiam, RN [$\rho\nu$] quartam, &c. tandemque ultima IO [ιo], seu y, ipsam n potestatem applicatæ EK [$\epsilon\kappa$] seu $1 \pm d : t$ [pro numero videlicet particularum, in quas divisa est BI [$B\iota$]]; quæ quidem potestas, per LIV, reperitur $= 1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{n.n-1.dd}{1.2\,tt}$ $\pm \frac{n.n-1.n-2.d^3}{1.2.3\,t^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.d^4}{1.2.3.4\,t^4} \pm$ &c. Quod si jam numerus particularum n ponatur infinitus; producta CK [$C\kappa$] abibit in tangentem, & ipsa t in subtangentem Logarithmicæ; atque præterea numeri 1, 2, 3, &c. evanescent præ n, sic ut $n-1$, $n-2$, $n-3$, tantundem valeant ac n: quare tum fiet $y = 1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{nndd}{1.2\,tt} \pm \frac{n^3d^3}{1.2.3\,t^3} + \frac{n^4d^4}{1.2.3.4\,t^4} \pm$ &c. $=$ [propter $nd = x$] $1 \pm \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2\,tt} \pm \frac{x^3}{1.2.3\,t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4\,t^4} \pm$ &c. ut supra.

Nota, quod existente $x > t$, termini quidem Seriei aliquousque crescunt, tandem tamen decrescere pedetentim occipiunt, ultimoque vergunt in nihilum. Nam sumtis ab initio m terminis, erit, ex lege progressionis, sumtorum ultimus $\frac{x^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)t^{m-1}}$, & sequens ultimum $\frac{x^m}{1.2.3\ldots m\,t^m}$; adeoque ratio illius ad hunc, ut mt ad x: unde cum ratio t ad x determinata sit, numerus vero terminorum m usque & usque major possit accipi, ratio quo-

quoque mt ad x tandem quavis data major fiet. Exiſtente autem $x =$ vel $< t$, Series iſta, & aliæ hujus generis, ſtatim ab initio celerrime convergunt, eoque celerius quo minor x: unde diſcimus quod multo commodius & minori cum labore Logarithmorum Canon adornari poſſit, ſi, per hanc Propoſitionem, ex Logarithmis datis Numeri, quam ſi viciſſim, per XLVII, ex Numeris datis Logarithmi quærantur. Quanquam & illic compendium ſeſe nobis offerat non contemnendum; quod quia in dicta Propoſitione intactum præteriit, breviter hic indicandum reſtat: Quoniam poſitis in Logarithmica [*Fig.* 1 N°. XC] $AB = a$, ſubtangens $AK = t$, $BI = u$, & $B\iota = s$, adeoque $RE = a - u$, & $\rho\iota = a + s$, invenitur, per XLVII, AR [Log-us RE] $= t \times (\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} +$ &c.) & $A\rho$ [Log-us $\rho\iota$] $= t \times (\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} +$ &c.); ſequitur ex natura Logarithmicæ, has duas Series inter ſe æquari, ſi tres applicatæ RE, AB, $\rho\iota$, ſeu, $a - u$, a & $a + s$ continue proportionentur; hoc eſt, ſi ſtatuatur $u = as : (a + s)$; ſed quia, per hanc hypotheſin, perpetuo fit $u < s$, & nominatim hac ſumta $= a$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. illa fit $= \frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, &c. multo ſemper celerius prior Series converget poſteriore: unde plurimum laboris in practica effectione Logarithmorum reſcindi poterit, ſi loco hujus illa ſurrogetur; ex. gr. ſi [facta $s = a$] loco Seriei $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ &c. hoc eſt, loco $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} +$ &c. ſubſtituatur $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} +$ &c. quippe per cujus primos 18 terminos tantundem approximatur, quantum per mille terminos alterius; quod ipſum etiam ad Coroll. 3, XLVII, * in ſubtangente Logarithmicæ definienda obſervabitur. Sed rei utiliſſimæ uberiorem explicationem anguſtia paginæ non permittit. ([d]) No. CI.

SCHO-

* N°. XC. pag. 853.

([d]) Dato, v. g. Log-mo binarii, dabitur Log-mus fractionis $\frac{1}{2} =$ Log. 1 — Log. 2 $=$ — Log. 2. Itaque

No. CI. SCHOLIUM. Si summa quædam pecuniæ fœnori elocata sit, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ in sortem computetur; exponatur autem ipsa sors per BC seu 1, [*Fig.* 1 N^{i}. LXXIV] tempus annuum per BI, seu x, divisum in punctis E, F, G, &c. in momenta innumera æqualia, atque usura annua per $\frac{x}{t}$; inventa Series $1 + \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2tt} + \frac{x^3}{1.2.3t^3} +$ &c. hoc est, [explicata sorte 1 per a, & usura $\frac{x}{t}$ per b] $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3aa} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} +$ &c. indicabit valorem ejus, quod finito anno debebitur. Cum enim, ut tempus annuum BI ad primum ejus momentum BE, seu ut x ad d, ita se habeat usura annua $\frac{x}{t}$ ad partem proportionalem usuræ, erit hæc $\frac{d}{t}$, significabitque $1 + \frac{d}{t}$, seu applicata EK, sortem dicta parte proportionali usuræ auctam: unde sors aucta EK secundo momento pariet FL, & hæc pariter tertio momento pariet GM, & sic porro, propter BC, EK, FL, GM, &c. proportionales. Quare postrema applicata IO, quam Series inventa exprimit, denotabit valorem ejus, quod creditori elapso toto anno debetur. Conf. *Act. Lips.* 1690, p. 222. *

L X.

Invenire aream spatii comprehensi a Curva genitrice Elasticæ, seu quæ evolutione sui Elasticam describit. Fig. 1.

Describatur Elastica AQR ex evolutione curvæ MNT, & sit filum evolvens QN [DG], quod productum secet axem in V; pona-

Itaque cum in Coroll. 3, XLVII, subtangens Logarithmicæ inveniretur dividendo Log. 2, per Seriem $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ &c., quæ lente convergit, eadem inveniri poterit dividendo eundem Log. 2 per Seriem $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4}$ &c. celerius convergentem.

* N°. XL. pag. 429. 430.

ponaturque, ut supra, $RZ = a$, $PQ = x$, $AP = y$. Quoniam ex *Act. Lipf.* 1694, p. 273 *, manifestum est, quod $QN = \frac{1}{2} QV$, erit & $NH = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} x$, & $NS = \frac{1}{2} FQ = \frac{1}{2} dx$; ac proinde, ob angulum rectum DQN, $DF : FQ$ seu $dy : dx =$ [ex natura Elasticæ] $xx : \sqrt{(a^4 - x^4)} = \frac{1}{2} dx\, [NS] : \frac{dx\sqrt{(a^4 - x^4)}}{2xx} = SG$ vel HI. Quare $HI \times NH$ seu rectang. $NI = xdx\sqrt{(a^4 - x^4)} : 4xx = (a^4x - x^5)dx : 4xx\sqrt{(a^4 - x^4)} = a^4xdx : 4xx\sqrt{(a^4 - x^4)} - x^3dx : 4\sqrt{(a^4 - x^4)} =$ elemento spatii $MNHZ$, de cujus summatione jam agitur. Posterioris membri $x^3dx : 4\sqrt{(a^4 - x^4)}$ integrale, pertinens ad partem curvæ RQ vel MN, est $\frac{1}{8}\sqrt{(a^4 - x^4)}$. Prius autem $a^4xdx : 4xx\sqrt{(a^4 - x^4)}$ cum absolute summari nequeat, sublata irrationalitate in Seriem convertetur, ut sequitur. No. CI.

Ponatur $\sqrt{(a^4 - x^4)} = txx : a - aa$, fiet $xx = 2a^3t : (aa + tt)$, & differentiando $-xdx = (a^3tt - a^5)dt : (aa + tt)^2$; nec non $txx : a - aa$ seu $\sqrt{(a^4 - x^4)} = (aatt - a^4) : (aa + tt)$, & denique $-a^4xdx : 4xx\sqrt{(a^4 - x^4)} = aadt : 8t$. Jam quia existente maxima $x = a$, ipsa quoque $t = a$, & illa decrescente crescit hæc, statuatur $t = a + s$, ut sit $aadt : 8t = aads : (8a + 8s) = \frac{1}{8} aa \times ds : (a + s) = \frac{1}{8} aa \times (\frac{ds}{a} - \frac{sds}{aa} + \frac{ssds}{a^3} - \frac{s^3ds}{a^4} + \&c.)$ per XXXVII: unde facta summatione habetur $\int(aadt : 8t) = \int(a^4xdx : 4xx\sqrt{(a^4 - x^4)})$, dissimulato nempe signo $-$, quod hic nota tantum est respectivi decrementi ipsarum x] $= \frac{1}{8} aa \times (\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.)$ demtoque $\int(x^3dx : 4\sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{1}{8}\sqrt{(a^4 - x^4)}$, resultat $\int(a^4xdx : 4xx\sqrt{(a^4 - x^4)}) - \int(x^3dx : 4\sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{1}{8} aa \times (\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.) - \frac{1}{8}\sqrt{(a^4 - x^4)} =$ spatio nempe quæsito $MNHZ$. Et quia, sumta $x =$ as:

* No. LVIII, pag. 593.

No. CI. $as:(a+s)$, Series $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3}$ — &c. æquatur Seriei $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4}$ + &c. per Annot. præcedentis Propositionis, idcirco dictum spatium $MNHZ$ quoque sic exprimetur, $\frac{1}{4}aa \times (\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c) - \frac{1}{8}\sqrt{(a^4 - x^4)}$.

Nota, si statuantur $aa = 8$, & $s = a$, adeoque t sive $a+s = 2a$, & x seu $\sqrt{(a^3t:(aa+tt))} = 2a\sqrt{\frac{1}{5}}$, & u vel $as:(a+s) = \frac{1}{2}a$: hoc est, si constructo super MZ, semisse ipsius RZ, semicirculo, inscribatur triangulum isosceles MCZ, cujus crus MC unitatem designet, atque curvæ MNT applicetur $NH\,[\frac{1}{2}x] = \sqrt{\frac{4}{5}}$, prædictum spatium $MNHZ$ fiet $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ — &c. $- \frac{2}{3}$, vel etiam $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32}$ + &c. $- \frac{2}{3}$. Conf. *Act. Lips.* 1694, p. 273, *.

COROLL. 1. Quoniam ex iis, quæ loco modo citato *Actorum* docuimus, colligi potest, quod $QV = aa:x$, & $QN = \frac{1}{2}QV = aa:2x$, & DQ seu $dz = aadx:\sqrt{(a^4 - x^4)}$; sequitur, triangulum $QGD\,[QD \times \frac{1}{2}QN] = a^4dx:4x\sqrt{(a^4 - x^4)}$, & per consequens omnia triangula QGD seu spatium $RMNQR = \int(a^4dx:4x\sqrt{(a^4 - x^4)}) =$ [ut ostensum] spatio $MNHZ + \int(x^3dx:4\sqrt{(a^4 - x^4)})$: unde cum $\int(x^3dx:4\sqrt{(a^4 - x^4)})$ seu $\frac{1}{8}\sqrt{(a^4 - x^4)}$ exprimat quadrantem spatii Elastici $PQRZ$ [ut per se liquet], concludimus, spatium $RMNQR$ excedere aream $MNHZ$ quarta parte ipsius $PQRZ$.

COROLL. 2. Quia differentiale $aadt:8t$, ad quod reduximus elementum spatii $MNHZ$ vel $RMNQR$, elementum quoque denotat spatii hyperbolici inter asymptotas, cujus abscissa a centro est $= t$, ipsa vero t, in assumta hypothesi $\sqrt{(a^4 - x^4)} = txx$:

* N°. LVIII, pag. 591.

$= txx : a - aa$, propter x decreſcentem ad nihilum, excreſcat in infinitum; & ſpatium hyperbolicum in infinitum protenſum ſit infinitum; idcirco & ſpatium totum interminatum genitricis Elaſticæ $MNTXZ$, ſeu $NTXH$, infinitum erit. Vid. *Act. Lipſ.* loc. cit. No. CI.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Logarithmus Sinus vel Tangentis arcus abſolute nullius non eſt o, *ut vulgo habent Canones, ſed* $-\infty$: *accurate enim loquendo,* o *eſt Logarithmus Sinus vel Tangentis arcus* $0^{\circ}.0'.0''.0'''.0^{iv}.4^{v}.27^{vi}$. &c. *& Logarithmi arcuum minorum ſunt negativi* (e).

II.

In Sciothericis planis hora quidem Italica & Babylonica recte, ſed Judaica male per lineas rectas exhibentur (f).

III.

Regula, quam in Notis *noſtris* Tumultuariis in Geometriam Cartesii * *pro invenienda elevatione mortarii ad efficiendum jactum globi longiſſimum in plano inclinato attulimus, brevius ita contrahetur*: Angulus quæſitæ elevationis mortarii eſt aggregatum ex ſemiſſe recti & ſemiſſe anguli inclinationis Plani (g).

 IV.

(e) Nam, ex conſtructione Canonis Logarithmici, o eſt Logarithmus unitatis. Quare o eſt Log-mus illius ſinus qui eſt $= 1$, poſito radio $= 10000000000$, hoc eſt, quia in tam parvis arcubus, arcus, ſinus & tangens æquales cenſentur, illius arcus qui eſt radii pars 10000000000^a, ſeu peripheriæ pars 62831853071^a, qui continet igitur minuta quinta 4, ſexta 27 &c.

(f) Conſule Scriptores Gnomonicos. Neque enim id ſat paucis verbis demonſtrare poſſum.

* N°. LXVII, pag. 684.

(g) Ibi demonſtratum eſt angulum elevationis mortarii eum eſſe cujus tangens æquatur aggregato tangentis & ſecantis inclinationis dati plani ad horizontem: hoc eſt, ſi AB [*Fig.* A] ſit horizon, AC planum datum,

No. CI.

IV.

Imago in Speculis convexis & concavis non conspicitur in concursu catheti incidentiæ & continuatæ reflexionis, ut ex ALHAZENO *&* VITELLIONE *docent* HEINLINUS, *pag.* 805, *&* DECHALES *in* Mundo Mathem. *Tom.* III. *pag.* 599: *nec etiam, ut vult* STEVINUS, *in concursu lineæ reflexionis cum catheto incidentiæ ductâ ad planum tangens speculum in puncto reflexionis* (h).

V.

Quantitates infinite parvæ haud recte finitis, seu ordinariis, incomparabiliter minores *vel* incomparabiles *dicuntur, cum his sæpe comparentur: ut cum radius osculi, elementum curvæ & subtensa anguli contactus vocantur continue proportionales.*

VI.

In casu Maximæ vel Minimæ y, *ejus differentiale* dy *non semper est* $= 0$, *vel* $= \infty$, *ut vulgo existimant: potest enim habere ad* dx *rationem quamcunque. Nec tamen hoc obstat, quominus per fictionem* $dy = 0$, *solutio semper obtineri possit: cum verus & adæquatus conceptus Maximi Minimive requirat, ut posita* y *constante differentietur æquatio* (i).

VII.

datum, cujus inclinationis tangens sit BC, secans AC; sumto nimirum AB pro sinu toto; & capiatur, in BC producta, CD æqualis CA, fore BAD angulum quæsitum elevationis mortarii. Itaque isosceles erit triangulum ACD, & æquales erunt anguli CAD, CDA, cui æqualis alternus DAE. Sunt igitur anguli BAC, BAD, BAE in progr. arithm. Medius igitur BAD est æqualis aggregato ex semisse extremorum, scil. recti BAE, & anguli BAC inclinationis plani.

(h) Vide BARROWII *Lectiones Opticas*, Sect. VI, VII, VIII, IX & X.

(i) Etenim, ibi *y* Maxima est vel Minima, ubi vel crescere desinit nec dum incepit decrescere, vel decrescere cessat nec dum crescere cepit; hoc est ubi stat & quasi constans est. Ceterum in hoc Corollario Auctor digitum intendere videtur ad puncta Curvarum duplicia sive nodos, qui quanquam *dy* ad *dx* rationem habere possit finitam, nihilominus inveniuntur ponendo *dy* vel *dx* $= 0$. Sed de his vide quæ commentati sunt in *Actis Acad. Scient. Paris.* Viri Cl. GUISNÉE a°. 1706, & SAURIN, a^is. 1716, 1723, & 1725.

VII.

No. CI.

Pro differentiali ipsius xx, *quod proprie est* $2xdx + dx^2$, *omnes semper sine delectu scribunt* $2xdx$, *omisso* dx^2; *sed perperam: dantur enim casus ubi omisso* $2xdx$ *ponendum* dx^2; *& rursus alii, ubi ponendum utrumque. De observationis pretio cognoscet, qui sciverit illam nos manu duxisse ad singulare illud inventum de radiis osculi expedite determinandis in curvis quibusvis algebraicis, in* Actis Lipſ. 1700 *, *publicatum, quod sine hac observatione fortassis aeternum latiturum fuisset.*

VIII.

Dum. Cl. PAPINUS, *in Tractatu suo* de Offibus emolliendis, *modum nostrum ponderandi aeris sub aqua in recipiente* † *superfluitatis damnat, illique* Boyleanos *suosve aequiparat, non videtur comprehendisse quid discriminis inter ambos intersit. Melius id agnovit* Societas Regia Anglicana, *quae nostri experimentum, ipso fatente* PAPINO, *cum successu instituit.*

IX.

Idem etiam inique conqueritur de injuria BOYLEO *per assertionem meam illata, qua dixi,* ‡ *ponderationem aeris in vesica Philosopho huic non improbari. Fatemur quod hunc ponderandi modum agnoverit esse minus perfectum [quis enim hoc non videret?] At quod eundem sophisticum prorsus atque fallacem esse ipse, vel quisquam alius, ante nos fuerit suspicatus, pernegamus. Perpendat, si placet, verba quae habet in suo Praeloquio ad D.* BROWNCKER, *immediate ante Paradoxum primum hydrostaticum*: Etenim non poterat hic objici, uti fit contra ponderationem aeris in vesica [quibus tamen objectionibus facile mihi esset respondere, si nunc conveniret] aerem &c. *& judicet, num ita scripsisset, si tale quid ominatus fuisset.*

* N°. XCIV, pag. 888 & seq. Vide N^{um}. CIII, Art. XXII, XXIII, XXIV.

† N°. XI. pag. 199.

‡ N°. XIII. pag. 204.

FINIS.

N°. CII.

VERITABLE HYPOTHESE
DE LA RESISTANCE
DES SOLIDES,

Avec la Démonſtration de la Courbure des Corps qui ſont reſſort :

Par Mr. BERNOULLI, Profeſſ. à *Bâle.*

Lettre du 12 Mars 1705.

Hiſtoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1705. pag. 176, Ed. de Paris, & pag. 250, Edit. de Holl.

POur faire mieux entendre ce que je dirai en ſon temps du *Centre de Tenſion* *, ſuivant la promeſſe que j'en ai faite dans mon Mémoire du 13 Mars 1705 †, je crois devoir expliquer auparavant une hypothèſe qui me paroit le véritable Principe de la Réſiſtance des Solides, & en tirer la démonſtration de la courbure que prennent les reſſorts pliés, à laquelle on a donné le nom d'*Elaſtique.*

GALILÉE (a) eſt le premier qui ait examiné cette Réſiſtance des corps, & qui ait cherché, combien il faloit plus de force

* Voiez N°. CIII, Art. XXVI.

† N°. XCVIII, pag. 932.

(a) Dans ſes *Diſcours ſur la Méchanique & le Mouvement*, Dial. I. & II.

ce pour rompre un corps solide, en le tirant directement suivant sa longueur, que pour le rompre transversalement. Pour cet effet, il considéra une poutre, une planche, ou une perche prismatique ABCD [*Fig.* 1] fichée horizontalement dans un mur AB, avec un poids P suspendu à son extrémité; & s'imaginant un levier mobile sur son apui A, il a trouvé par son raisonnement, que la force qui arracheroit cette poutre du mur, suivant la direction horizontale AD ou BC, doit être au poids P capable de la rompre transversalement suivant la direction CD, comme la longueur AD à la moitié de la hauteur AB [b]. No. CII.

Mrs. LEIBNITZ [c] & MARIOTTE [d] poussérent ensuite cette spéculation; & retenant la même hypothèse du levier, ils conçurent de plus dans tous les corps solides une infinité de fibres, lesquelles, avant que ces corps plient & rompent transversalement, doivent être tenduës plus ou moins, suivant qu'elles sont plus ou moins éloignées de l'apui du levier, & doivent par conséquent résister autant qu'elles sont tenduës. C'est ce qui leur a fait trouver que la force nécessaire pour arracher une poutre directement, est à celle qu'il faut employer pour la rompre transversalement, en raison de AD au tiers de la hauteur AB [e]. Ce

[b] GALILÉE a supposé les corps inflexibles & incapables d'extension, ensorte que toutes les fibres BF, HK, NM, résistent également & se rompent en même tems. Dans cette hypothèse, il est clair qu'on doit concevoir chaque point du bras AB du levier coudé ABD, comme tiré par des puissances égales; lesquelles on peut supposer toutes réunies & concentrées dans leur centre de gravité, qui sera au milieu de la droite AB. Ainsi la résistance de la section AB est au poids P, comme AD à $\frac{1}{2}$ AB, par la nature du Levier.

[c] Dans un Mémoire intitulé, *Demonstrationes novæ de Resistentia Solidorum*, inseré dans les *Actes de Leipsic*, 1684, Juillet, pag. 319.

[d] Dans le *Traité du Mouvemens des eaux*, Part. V. Disc. 2.

[e] Ils ont supposé la résistance de chaque fibre proportionelle à son extension. D'où ils ont conclu que chaque point H du bras de levier AB doit être conçu tiré par une puissance HK proportionelle à la distance HA du point H au point d'apui A. Ainsi toutes ces puissances seront représentées par toutes les ordonnées BF,

No. CII. Ce qui approche beaucoup plus de la vérité que ce qu'en a dit GALILÉE. Mais aucun de ces Auteurs (f) ne confidérant les corps comme fujets à compreffion, & fur-tout leur hypothèfe des tenfions des fibres proportionnelles aux forces tendantes, ne s'accordant pas précifément avec la nature, c'eft la raifon pourquoi ils n'ont pas encore rencontré affez jufte, & que leur doctrine a befoin de quelque correction. Ainfi Mr. VARIGNON a eu raifon de dire dans les *Mémoires de l'Acad.* de 1702, pag. 88, *que cette hypothèfe, quoique très vraifemblable, pourroit n'être pas encore au gré de tout le monde.* Voici [je crois] la véritable, à laquelle Mr. VARIGNON pourra appliquer fa Régle générale, comme il l'a déja appliquée aux deux hypothéfes précédentes.

Pour ce qui eft de la courbure des Corps à reffort; on n'en a parlé jufqu'ici que d'une maniére fort douteufe. GALILÉE y a auffi penfé; il s'eft imaginé que cette courbure étoit parabolique; mais cette conjecture eft très fauffe. Depuis lui, je ne fai perfonne qui ait rien donné de meilleur. Il y a environ onze ans que j'entrepris le premier de déterminer cette courbure géométriquement: j'en donnai la conftruction dans les *Journaux de Leipfic*;

BF, HK, NM du triangle BAF. On peut les fuppofer toutes réunies à leur centre de gravité, qui eft en H, prenant AH $= \frac{2}{3}$ AB. Donc le *moment* de toutes les puiffances qui tirent ce bras eft ABF $\times \frac{2}{3}$ AB. Et le *moment* du poids P étant P $\times$ AD, on aura, à caufe de l'égalité de ces momens, P : ABF $= \frac{2}{3}$ AB : AD. Mais pour arracher directement la poutre, il faut une puiffance capable d'étendre toutes les fibres de la fection AB, de la longueur BF, ou de furmonter une réfiftance repréfentée par le rectangle ABFO, double du triangle ABF. Soit R cette réfiftance. Donc ABF $= \frac{1}{2}$ R; ce qui étant fubftitué dans la proportion ci-deffus, la change en P : $\frac{1}{2}$ R $= \frac{2}{3}$ AB : AD ou P : R $= \frac{1}{3}$ AB : AD.

(f) Mr. MARIOTTE fait mention de cette compreffion. Il eft vrai qu'il fuppofe deux chofes très-douteufes, & même oppofées à l'expérience; 1°. qu'une moitié des fibres eft comprimée, tandis que l'autre eft étendue. 2°. qu'il ne faut ni plus, ni moins de forces pour comprimer une moitié des fibres, & étendre l'autre moitié, que pour étendre toutes les fibres, dans l'hypothèfe de la Note précédente.

Leipsic ([1]); mais d'une maniére encore assez imparfaite, ne considérant alors que les fibres extérieures des surfaces de la lame pliée, au lieu qu'il faut faire attention à toutes celles qui composent son épaisseur. C'est pourquoi, je vai tâcher de suppléer à ce défaut, & de perfectionner le principe de la Résistance des Solides, & ma construction de la courbe Elastique. L'un & l'autre se fera en même temps en se servant des Lemmes qui suivent. No. CII.

LEMME I.

Des Fibres de même matiére & de même largeur, ou épaisseur, tirées ou pressées par la même force, s'étendent ou se compriment proportionellement à leurs longueurs.

DEMONSTRATION.

1°. Soient deux fibres AB, AE [*Fig.* 2] dont la plus longue AE soit divisée en parties AB, BC, CD, DE, égales chacune à la plus courte AB de ces deux fibres: qu'on affermisse la plus longue au point D, & qu'on attache à son extrémité E le poids P; la partie DE s'étendra autant que la plus courte fibre AB l'est par son poids P égal à l'autre; à cause de (*hyp.*) DE = AB. Qu'on affermisse ensuite la fibre AE en C, & qu'on ôte l'arrêt, ou l'attache qu'on vient de supposer en D; la partie CD s'étendra aussi autant que fait la plus courte fibre AB, à cause de l'action continuelle de la pesanteur du poids P. Qu'on lâche l'arrêt en C, & qu'on affermisse la fibre AE en B & enfin en A; on trouvera de même que chacune de ces parties BC, AB, s'étendra encore autant. Donc l'extension EK de toute la fibre AE, sera à l'extension BI de la plus courte fibre AB, comme AE est à AB. *Ce qu'il faloit premiérement démontrer.*

 2°. Soient

([1]) N°. LVIII, pag. 580 & suiv. & N°. LXVI, pag. 639 & suiv.

No. CII. 2°. Soient encore deux fibres de longueur inégale A D, A B [*Fig.* 3], dont la plus grande AD soit encore divisée en parties AB, BC, CD, égales chacune à la moindre A B de ces fibres. Qu'on soutienne l'autre A D en B; sa partie A B se comprimera par le poids P, qu'on aura mis dessus, autant que fait la plus courte fibre A B par un poids égal; à cause de (*hyp.*) A B = A B. Qu'on soutienne ensuite la fibre A B en C, & puis en D, ôtant chaque fois le soûtien de l'endroit où il étoit auparavant; chacune de ses parties BC, CD souffrira encore la même compression, à cause de l'action continuelle du poids P. Donc la compression AK de toute la fibre AD, est à la compression AI de la fibre AB, comme AD est à AB. *Ce qu'il faloit secondement démontrer.*

LEMME II.

Des Fibres homogènes & de même longueur, mais de différentes largeurs ou épaisseurs, s'étendent ou se compriment également par des forces proportionelles à leurs largeurs.

DEMONSTRATION.

Soit A F [*Fig.* 3 & 4.] la plus grosse de ces fibres, laquelle on imaginera divisée selon sa largeur BF en d'autres fibres, qui soient chacune de la largeur ou grosseur de la plus menue A B. Il est clair que chacune de ces fibres, résultantes de la division de la grosse AF, pour être étenduë ou comprimée autant que la fibre AB, demande un poids égal au sien; & par conséquent que toutes ces fibres ensemble, c'est-à-dire, la fibre entiére AF, pour arriver au même degré d'extension ou de compression AI que la moindre fibre AB, requiert un poids Q, d'autant plus grand que le poids P, que la largeur ou épaisseur de la fibre AF est plus grande que celle de la fibre AB. *Ce qu'il faloit démontrer.*

LEMME

No. CII.

LEMME III.

Des Fibres homogènes de même longueur & largeur, mais chargées de differens poids, ne s'étendent ni ne se compriment pas proportionellement à ces poids; mais l'extension ou la compression causée par le plus grand poids, est à l'extension ou à la compression causée par le plus petit, en moindre raison que ce poids-là n'est à celui ci.

DEMONSTRATION.

Si les compressions étoient proportionelles aux poids qui les causent, il s'ensuivroit qu'ayant chargé la fibre AB [*Fig.* 3] d'un poids R qui fut au poids P en plus grande raison que la longueur de la fibre AB n'est à AI quantité de la compression faite par le poids P; la fibre AB se comprimeroit plus que de toute sa longueur: ce qui est absurde. Donc la compression d'une même fibre, ou de fibres égales en tout, causée par le plus grand poids R, doit nécessairement être à la compression faite par le plus petit P, en moindre raison que le poids R n'est au poids P.

Il en doit être de même des extensions des fibres; l'extension n'étant autre chose qu'une compression négative; comme la force tendante n'est autre chose qu'une force négativement comprimante. *Ce qu'il faloit démontrer.*

SCHOLIE.

C'est aussi ce que l'expérience confirme. Car ayant pris une corde de boyaux longue de 3 piés, je l'ai chargée successivement de 2, 4, 6 & 8 livres; j'ai remarqué qu'elle s'étendoit de 9, 17, 23 & 27 lignes: au lieu qu'elle eût dû s'étendre 9, 18, 27, 36 lignes, si les extensions étoient proportionelles aux poids.

No. CII.

COROLLAIRE.

Si l'on conçoit une ligne TVN$\upsilon\theta$ [*Fig.* 5], dont les abſciſſes NR, NQ marquent les forces tendantes, & Nρ, N$\varkappa$ les forces comprimantes; les appliquées RT, QV les extenſions, & $\rho\theta$, $\varkappa\upsilon$ les compreſſions d'une fibre de longueur & groſſeur données : Cette ligne TVN$\upsilon\theta$, que j'appelle *ligne de tenſion & de compreſſion*, ne peut être droite, mais courbe, concave vers l'axe Rρ, ayant du côté de Nθ une aſymptote parallèle à cet axe; parceque la raiſon de RT à QV [$\rho\theta$ à $\varkappa\upsilon$] doit être moindre que celle de NR à NQ [Nρ à N$\varkappa$], & que $\rho\theta$ ne ſauroit jamais excéder la longueur donnée de la fibre. Au reſte, il eſt probable que cette Courbe eſt différente à l'égard de différens corps, à cauſe de la différente ſtructure de leurs fibres.

LEMME IV.

La même force qui fait plier une poutre ou perche ABCD [Fig. 1] *de* AB *en* GF, *en étendant une partie de ſes fibres de la quantité du triangle* BSF, *& comprimant l'autre de la quantité du triangle* ASG, *ſeroit capable d'étendre l'aſſemblage de toutes les fibres, ſur l'apui* A, *de la quantité du triangle* ABF; *ou bien de comprimer cet aſſemblage, ſur l'apui* B *ou* F, *de la quantité du triangle* BAG *ou* FAG.

DEMONSTRATION.

Concevons, pour un moment, la poutre apuiée en A pour empêcher ſa compreſſion; le poids P la fera un peu plier, comme de AB en AF. Qu'on ôte enſuite l'apui A, après que la fibre BF eſt tenduë autant qu'elle le peut être; le point F ſervira d'apui, & le même poids P fera encore baiſſer la poutre, comme de FA en FG. Or il eſt clair, que ſi l'on eut laiſſé librement

aller

aller la poutre, sans l'appuier en A, le poids P l'auroit d'abord fait plier de AB en GF. Donc la force qui peut tout à la fois étendre une partie de ses fibres de la quantité du triangle BSF, & comprimer l'autre de la quantité du triangle ASG, est la même que celle qu'il faudroit, pour étendre l'assemblage de toutes les figures sur l'apui A de la quantité du triangle ABF, ou pour les comprimer sur l'apui F de la quantité du triangle AFG ([h]). No. CII.

Cela paroit encore, en ce que la fibre en H étant tenduë sur l'apui A de la longueur HK, & comprimée en même tems sur l'apui F de la longueur KI, c'est tout comme si elle étoit seulement tenduë de la longueur $HI = HK - KI$, & que la fibre en N étant tenduë sur l'apui A de la longueur MN, & comprimée sur F de la longueur ML, c'est tout comme si elle étoit seulement comprimée de la longueur $NL = ML - NM$. Or toutes les HI & NL font les triangles BSF & ASG, ainsi que toutes les HK font le triangle ABF, & toutes les KI le triangle AFG ([i]).

 Co-

([h]) J'avouë que ce raisonnement ne me paroit point concluant, & je ne vois pas ce que l'Auteur pourroit répondre à Mrs. PARENT [*Essais & Recherches de Math. & de Phys.* Tom. III. Art. 14] & BULLFINGER [*Comm. Acad. Petrop.* Tom. IV. pag. 178], qui lui objectent qu'il est vrai, géométriquement parlant, ou quant à la simple situation, que c'est la même chose de porter AB d'abord en AF, & puis en FG, ou de le porter tout d'un coup en FG: mais qu'il ne s'ensuit nullement que la même force soit capable de produire indifféremment l'un ou l'autre de ces effets. Et il est aisé de voir que la force requise pour produire la compression ASG doit être plus grande que la force nécessaire pour produire la compression AFG; quoique, géométriquement parlant, ASG ne soit qu'une partie de AFG. Mais il faut remarquer que les fibres qui remplissent le Triangle ASF, loin de résister à la compression, aident au contraire le poids P à comprimer les fibres du triangle ASG, parce qu'elles ont été tenduës au delà de leur longueur naturelle, & qu'elles font effort pour se resserrer. Donc il faudra moins de force pour comprimer AFG que pour comprimer ASG, & à plus forte raison il en faudra moins que pour comprimer ASG, & étendre en même tems BSF.

([i]) Ce raisonnement ne conclud pas mieux que le précédent, parce qu'on

No. CII.

COROLLAIRE.

La force qui peut étendre la poutre sur l'apui A de la quantité du triangle ABF, est donc la même que celle qui peut la comprimer sur l'apui B ou F de la quantité du triangle BAG ou FAG : parceque chacune de ces forces est la même que celle qui peut l'étendre & le comprimer tout à la fois, sans apui, de la quantité des deux triangles BSF & ASG.

PROBLEME I.

Trouver combien il faut plus de force pour rompre une poutre directement, c'est-à-dire, en la tirant suivant sa longueur, que pour la rompre transversalement.

SOLUTION. *

Soit la poutre ABCD [*Fig.* 1] que l'on regarde comme composée d'une infinité de fibres homogènes de même longueur, & chargée à son extrémité du poids P, qui la fasse plier de AB en GF, en étendant une partie de ses fibres de la quantité du triangle BSF, & comprimant l'autre de la quantité du triangle ASG; &

qu'on n'y considére pas les points d'apui sur lesquels se font ces extensions & ces compressions. De ce que HI est égale à HK moins KI, comment suit-il que la fibre en H résistera autant à être étenduë de la longueur HK sur l'apui A, & à être comprimée de la longueur KI sur l'apui F, qu'à être étenduë simplement de la longueur HI sans apui. Ce *Lemme* reste donc sans démonstration. On peut même prouver qu'il est erroné & que cette erreur influë sur les deux Problêmes suivans. Il seroit trop long d'y substituer des Solutions plus exactes. Cette matiére demanderoit un Volume. Contentons-nous donc de renvoier le Lecteur aux Dissertations de Mrs. PARENT & BULLFINGER citées dans la Note précédente, & à celle de Mr. MUSCHENBROEK dans son Recueil intitulé *Dissertationes physicæ experimentales & geometricæ*, Lugd. Bat. 1729. 4°.

& que la force de ce poids soit précisément celle qu'il faut pour rompre la poutre. Il paroit, par le *Lemme* 4, que si l'on soûtenoit la poutre d'un apui en A, le même poids P étendroit ses fibres de la quantité du triangle ABF, c'est-à-dire, sa fibre extrême de la même longueur BF, & une des moyennes de la longueur HK, qui sont les appliquées du triangle ABF. Qu'on représente ces longueurs BF & HK par les appliquées de la ligne de tension RT & QV [*Fig.* 5] ainsi que les forces requises pour étendre ces longueurs, par les abscisses NR & NQ. Soient nommées AB, b; AD, c; BF [RT], t; HK [QV], p; NR, m; NQ, n. L'on aura BF [t]: HK [p] = AB [b]: AH [$bp:t$]; dont la différentielle $bdp:t$ marquera la largeur de la fibre EH. Et parceque la résistance que fait la fibre en H, est proportionnée à la force absoluë NQ dont elle est tirée, à la largeur de la fibre EH par le *Lemme* 2, & à la distance de l'apui AH par la nature du levier; cette résistance sera $n \times \frac{bdp}{t} \times \frac{bp}{t} = \frac{bbnpdp}{tt}$; & par conséquent la résistance que font toutes les fibres ensemble, sera $= \frac{bb}{tt} \int npdp$, c'est-à-dire, $\frac{bb}{tt} \int mtdt$ par raport à tout le triangle ABF. Donc cette résistance étant égale à l'action du poids P, laquelle a pour valeur [*momentum*] AD × P, l'on aura $\frac{bb}{tt} \int mtdt = AD \times P = c \times P$, & par conséquent aussi $P = \frac{bb}{ctt} \int mtdt$. No. CII.

Supposons maintenant qu'il faille rompre la poutre suivant la direction AD ou BC; il est clair que toutes les fibres comprises dans l'épaisseur AB [b] de la poutre, doivent être toutes également tenduës, chacune de la longueur BF; & par conséquent tirées chacune de la même force NR, ou m; ce qui donne bm pour la somme de toutes ces petites forces. D'où l'on voit que la force requise pour rompre la poutre en BF directement, c'est-à-dire, en la tirant suivant sa longueur AD ou BC, est à celle que doit avoir le poids P pour la rompre transversalement au mê-

me

No. CII. me endroit, comme bm eſt à $\frac{bb}{ctt}\int mtdt$, c'eſt-à-dire, comme la longueur [c] de la poutre eſt à $\frac{b}{mtt}\int mtdt$. Or cette quantité $\frac{b}{mtt}\int mtdt$ eſt toûjours plus petite que le tiers de la hauteur AB. Car de ce que $t:p < m:n$, par le *Lemme* 3, il s'enſuit que n eſt toûjours $< mp:t$, $npdp < mppdp:t$ & $\int npdp < \frac{m}{t}\int ppdp = \frac{1}{3}mp^3:t$. Donc tout le triangle ABF donnera $\int mtdt < \frac{1}{3}mt^3:t < \frac{1}{3}mtt$, & enfin $\frac{b}{mtt}\int mtdt < \frac{b}{mtt}\times\frac{1}{3}mtt = \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}$ AB. Ce qui s'accorde avec les expériences de Mr. Mariotte, qui a toûjours trouvé cette quantité moindre que le tiers, & plus grande que le quart de la hauteur AB. Voyez ſon *Traité du Mouvement des Eaux*, Part. 5. Diſc. 2.

Corollaire.

Si l'on conçoit la poutre comme ſoûtenuë d'un apui en F, & comprimée de la quantité du triangle AFG, & qu'on repréſente les racourciſſemens de la fibre extrême AG, & d'une de ſes moyennes KI, par les appliquées de la ligne de compreſſion [*Fig.* 5] $\rho\theta$, $\kappa\upsilon$, ainſi que les forces comprimantes de ces fibres par les abſciſſes $N\rho$, $N\kappa$; nommant AG [$\rho\theta$], τ; KI [$\kappa\upsilon$], ϖ; $N\rho$, μ; $N\kappa$, ν; on trouvera de même que la réſiſtance que toutes les fibres font enſemble à leur compreſſion, par raport au triangle KFI, eſt $\frac{bb}{\tau\tau}\times\int\pi\nu\, d\pi$, & $=\frac{bb}{\tau\tau}\int\mu\tau\, d\tau$, par raport au triangle AFG. Donc puiſque [*Lem.* 4.] il faut la même force pour vaincre la réſiſtance que les fibres font à leur compreſſion, que pour vaincre celle qu'elles font à leur extenſion, l'on aura $\frac{bb}{tt}\int mtdt$

$= bb$

$= \frac{bb}{\tau\tau} \int \mu\tau\, d\tau$, & par conſéquent auſſi $tt : \tau\tau = \int mt\, dt : \int \mu\tau\, d\tau$. No. CII.

D'où il paroit que les lignes de tenſion & de compreſſion étant données, c'eſt-à dire, m étant donnée par t, & μ par τ, le raport qu'il y a entre t & τ [entre BF & AG, ou entre BS & AS] ſera auſſi donné; & qu'ainſi le point S, qui ne ſouffre ni extenſion ni compreſſion, ſera trouvé.

PROBLEME II.

Trouver la courbure de la Ligne Elaſtique, c'eſt-à-dire, celle des lames à reſſort qui ſont pliées.

SOLUTION.

La lame IKCN [*Fig.* 5] eſt un parallélogramme rectangle en ſon état naturel, affermie ou clouée à l'un de ſes bouts IK, & chargée à l'autre N du poids P, qui lui fait prendre la courbure IBN ou KAC; EA eſt une de ſes parties infiniment petite, étenduë en déhors de la quantité du triangle BSF, & comprimée en dedans de la quantité du triangle ASG; EH & FG prolongées concourent au point M, centre du cercle oſculateur de la courbe. Soient maintenant AD ou NX $= x$, ND ou AX $= y$, l'épaiſſeur de la lame IK ou AB $= b$, le poids P $= bb$, la longueur de la fibre EB ou AH $= dz$, la longueur de celle pour laquelle eſt conſtruite la ligne de tenſion & de compreſſion $= f$. & enfin la force qui peut étendre la fibre EB de la longueur BF ſoit marquée par NR $= m$, & celle qui peut comprimer la fibre AH de la longueur AG, par N$\rho = \mu$.

Or [*Lem.* 4.] le poids P pourroit étendre la particule EA de la lame ſur l'apui A de la quantité du triangle ABF, en vertu du levier DAB; ou bien la comprimer ſur l'apui F de la quantité du triangle FAG, en vertu du levier CFG; les bras des leviers AD & FC ſont ici conſiderés comme égaux, à cauſe du peu

No. CII. d'épaiſſeur AF de la lame. C'eſt ce qui nous donne bbx [P× AD, moment du poids P] $= \frac{bb}{tt} \int mtdt$ quantité de la réſiſtance des fibres [par le *Probl.* 1.] Ainſi en diviſant par bb, l'on aura $x = \frac{1}{tt} \int mtdt$. Le *Corol. du Prob.* 1. donne auſſi $\frac{1}{tt} \int mtdt = \frac{1}{\tau\tau} \int \mu\tau d\tau$. On aura de plus [*Lem.* 1.] $f : t$ [RT] $= dz$ [EB]: $\frac{tdz}{f}$ [BF]; comme auſſi $f : \tau$ [$\rho\theta$] $= dz$ [HA]: $\frac{\tau dz}{f}$ [AG]. Et parceque BF : AG = BS : AS; donc BF + AG [$(tdz + \tau dz) : f$]: BF [$tdz : f$] = AB [b] : BS [$bt : (t + \tau)$]. Enfin à cauſe des triangles ſemblables BSF & HMG, l'on aura BF [$tdz : f$] : BS [$bt : (t + \tau)$] = HG [qui ne différe pas ſenſiblement de AH ou dz] : HM [$bf : (t + \tau)$] rayon du cercle oſculateur, lequel, comme l'on ſait, dans toutes les courbes s'exprime généralement par $dxdz : ddy$. Donc on aura $bf : (t + \tau) = dxdz : ddy$, ou $bfddy = (t + \tau) dxdz$, & en prenant les ſommes, $bfdy = dz \int (t + \tau) dx$ & en quarrant $bbffdy^2 = dz^2 \times (\int (t + \tau) dx)^2 = (dx^2 + dy^2) \times (\int (t + \tau) dx)^2$, ou bien $(bbff - (\int (t + \tau) dx)^2) \times dy^2 = dx^2 (\int (t + \tau) dx)^2$; & en tirant la racine quarrée $dy \sqrt{(bbff - (\int (t + \tau) dx)^2)} = dx \int (t + \tau) dx$, ou enfin $dy = dx \int (t + \tau) dx : \sqrt{(bbff - (\int (t + \tau) dx)^2)}$, qui eſt la différentielle de l'ordonnée de la courbe que l'on cherche.

Nous avons donc trouvé trois équations: ſavoir $x = \frac{1}{tt} \int mtdt$; $\frac{1}{tt} \int mtdt = \frac{1}{\tau\tau} \int \mu\tau d\tau$, & $dy = dx \int (t + \tau) dx : \sqrt{(bbff - (\int (t + \tau) dx)^2)}$; dont la premiére exprime le raport qui eſt entre t & x, l'autre entre t & τ, & la troiſiéme celui d'entre x & y; ce qui détermine entiérement les points de la courbe.

Pour la conſtruire, on tracera premiérement la courbe ONZ, telle que faiſant OX = RT = t, & YZ = $\rho\theta$ = τ, NX ſoit = 1

$= \frac{1}{tt} \int mtdt$. & $NY = \frac{1}{\tau\tau} \int \mu\tau d\tau$; car ayant coupé indéfiniment No. CII.
dans l'axe $NX = NY$, si l'on fait $XA = \int (dx \int (t+\tau) dx : \sqrt{(bbff - (\int (t+\tau) dx)^2)})$, le point A sera dans la courbe requise K A C.

Supposé donc, par exemple, que les lignes de tension & de compression fussent droites [quoiqu'elles ne soient jamais telles par le *Corol. du Lem.* 3.] ayant alors $NR : RT [= m : t] = a : g$ & $N\rho : \rho\theta [= \mu : \tau] = a : h$; l'équation différentielle de la courbe sera $dy = xxdx : \sqrt{(4aabbff : 9(g+h)^2 - x^4)} = (g+h)xxdx : \sqrt{(\frac{4}{9} aabbff - (g+h)^2 x^4)}$, & $BS : AS = g : h$.

Mais supposé que ces lignes-là fussent des paraboles, que g fût le paramétre de la premiére, & h celui de la seconde ; alors cette équation deviendra $dy = xdx\sqrt{x} : \sqrt{(gbbff : 16(g+h+2\sqrt{gh}) - x^3)}$, & $BS : AS = \sqrt{g} : \sqrt{h}$, &c.

Voiez N°. CIII, Art. XXVI & XXVIII.

N°. CIII.

VARIA POSTHUMA JACOBI BERNOULLI.

VARIA POSTHUMA JACOBI BERNOULLI.

No. CIII.

ARTICUL. I.

Attollere Infinitinomium ad potestatem indefinitam.

AUDIO Cl. MOIVRÆUM docere, in *Transact. Anglicanis* 1697, modum attollendi Infinitinomium $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 +$ &c. ad potestatem indefinitam m. Sed quia Infinitinomium hoc est particulare, nec adeo Canones Auctoris applicari possunt ad quævis alia Infinitinomia, ex. gr. ad $ax + bx^3 + cx^6 + dx^{10} + ex^{15}$ &c. (a); methodum

(a) Quidni possent? Pone modo $a = a$, $b = 0$, $c = b$, $d = 0$, $e = 0$, $f = c$,

No. CIII. dum docebo conficiendi rem generalissime, posito Infinitinomio $a+b+c+d+e+f+$ &c. ubi per litteras a, b, c &c. non soli coefficientes, sed ipsi termini integri intelliguntur. Id vero gemino modo efficio.

MODUS PRIMUS.

Quia per combinationum Doctrinam [Vide *Stochasticen* meam Part. II. cap. 8.] discimus, membra potestatis cujusvis Multinomii alicujus aliter non exprimi, nisi per coacervationem combinationum partium radicis, factarum secundum exponentem aequalem potestatis indici; coefficientem vero termini cujusvis exprimi, per numerum permutationum litterarum illum terminum constituentium ([b]): idcirco si Series convergens $a+b+c+d+e$ &c. elevanda sit ad potestatem m, multiplico a^m per 1; a^{m-1} per

$f = c$, $g = 0$, $h = 0$, $i = 0$, $k = d$, &c., & formula quae exhibet $(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 + ix^9 + kx^{10}$ &c.$)^m$, dabit $(ax + bx^3 + cx^6 + dx^{10} +$ &c.$)^m$. Imo si terminus primus esset a, non ax; nihil aliud requireretur quam ut Infinitinomii potestas m divideretur per x^m.

([b]) Etenim multinomii $a+b+c+d+$ &c. quadratum habetur ducendo singulos terminos in singulos; unde nascuntur omnes biniones aa, ab, ac, &c. ba, bb, bc &c. ca, cb, cc &c. omnium litterarum. Cubus habetur ducendo quadratum in radicem, hoc est, jungendo singulas litteras cum singulis binionibus; unde fiunt omnes terniones a^3, aab; aac &c. aba, abb, abc, &c. aca, acb, acc &c: nec non baa, bab, bac &c. bba, bbb, bbc, &c. bca, bcb, bcc &c. atque caa, cab, cac, &c. cba, cbb, cbc &c. cca, ccb, ccc &c. &c. Pariter biquadratum est coacervatio omnium quaternionum, &c.

Solent autem in unum conflari termini, qui iisdem constant litteris varie tantum transpositis, quippe qui eandem quantitatem designant. Sic pro $aab + aba + baa$ scribere expedit $3aab$, & pro $abc + acb + bac + bca + cab + cba$ scribitur $6abc$, &c. Igitur coefficiens termini cujusvis est numerus permutationum litterarum ex quibus ille terminus constituitur.

per fingulas reliquarum b, c, d, e, &c.; a^{m-2} per fingulos biniones cæterarum bb, bc, bd, be, &c., nec non cc, cd, ce, &c., &c.; a^{m-3} per fingulos earum terniones b^3, b^2c, b^2d, &c. bcc, bcd, &c., &c., & ita confequenter, quoufque progredi neceffe fuerit; hac ratione

$$1 \quad \times a^m$$

$$b+c+d+e+f+g, \text{\&c.} \quad \times a^{m-1}$$

$$\left.\begin{array}{r} bb+bc+bd+be+bf\ \text{\&c.} \\ +cc+cd+ce\ \text{\&c.} \\ +dd\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \times a^{m-2}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^3+b^2c+b^2d+b^2e\ \text{\&c.} \\ +bc^2+bcd\ \text{\&c.} \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \times a^{m-3}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^4+b^3c+b^3d\ \text{\&c.} \\ +b^2c^2\ \text{\&c.} \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \times a^{m-4}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^5+b^4c\ \text{\&c.} \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \times a^{m-5}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^6\ \text{\&c.} \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} \times a^{m-6}$$

$$\text{\&c.} \quad \times \text{\&c.}$$

Coefficiens cujufque termini invenitur confiderando numerum permutationum litterarum quotcunque $a^p\, b^q\, c^r\, d^s$ [fumpto $p+q+r+s=m$] generaliter effe $\frac{1.2.3.4\ldots\ldots m}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times 1.2\ldots s}$, hoc eft, facta divifione per $1.2\ldots p = \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots p+1}{1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times 1.2\ldots s}$;

Ita;

No. CIII. Ita, ex. gr. terminus $a^{m-3}b^3$, [ubi p valet $m-3$, & q 3] coefficientem habebit $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$; terminus $a^{m-3}bcc$, [ubi $p=m-3$, $q=1$, $r=2$] pro ſuo adſumet $\frac{m.m-1.m-2}{1\times 1.2}$; terminus $a^{m-10}b^2c^3d^5$, [ubi $p=m-10$, $q=2$, $r=3$, $s=5$] pro ſuo obtinebit $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7\ m-8.m-9}{1.2\times 1.2.3\times 1.2.3.4.5}$.
Et ſic de reliquis omnibus.

MODUS ALTER.

Elegantior eſt & legem progreſſionis melius ob oculos ponit. Ponatur $(a+b+c+d+e+f\ \&c.)^m = p+q+r+s+t+u$ &c.: unde, ſumptis utrinque logarithmis, fit $ml(a+b+c+d+e+f\ \&c.) = l(p+q+r+s+t+u\ \&c.)$; differentiandoque emergit $(m\mathrm{d}a+m\mathrm{d}b+m\mathrm{d}c+m\mathrm{d}d+m\mathrm{d}e+m\mathrm{d}f\ \&c.):(a+b+c+d+e+f\ \&c.) = (\mathrm{d}p+\mathrm{d}q+\mathrm{d}r+\mathrm{d}s+\mathrm{d}t+\mathrm{d}u\ \&c):(p+q+r+s+t+u\ \&c.)$ [ubi pro nota differentialis ponitur d ad diſtinctionem termini d], &, multiplicando decuſſatim,

$$
\begin{array}{rcr}
mp\mathrm{d}a+mp\mathrm{d}b+mp\mathrm{d}c+mp\mathrm{d}d+mp\mathrm{d}e+mp\mathrm{d}f\ \&c. & = & a\mathrm{d}p+a\mathrm{d}q+a\mathrm{d}r+a\mathrm{d}s+a\mathrm{d}t+a\mathrm{d}u\ \&c. \\
+mq\mathrm{d}a+mq\mathrm{d}b+mq\mathrm{d}c+mq\mathrm{d}d+mq\mathrm{d}e\ \&c. & & +b\mathrm{d}p+b\mathrm{d}q+b\mathrm{d}r+b\mathrm{d}s+b\mathrm{d}t\ \&c. \\
+mr\mathrm{d}a+mr\mathrm{d}b+mr\mathrm{d}c+mr\mathrm{d}d\ \&c. & & +c\mathrm{d}p+c\mathrm{d}q+c\mathrm{d}r+c\mathrm{d}s\ \&c. \\
+ms\mathrm{d}a+ms\mathrm{d}b+ms\mathrm{d}c\ \&c. & & +d\mathrm{d}p+d\mathrm{d}q+d\mathrm{d}r\ \&c. \\
+mt\mathrm{d}a+mt\mathrm{d}b\ \&c. & & +e\mathrm{d}a+e\mathrm{d}b\ \&c. \\
+mu\mathrm{d}a\ \&c. & & +f\mathrm{d}a\ \&c. \\
\&c. & & \&c.
\end{array}
$$

Igitur, facta comparatione terminorum ejuſdem ordinis, habetur

1. $mp\mathrm{d}a$

No. CIII.

1. $mpda - adp = 0$
2. $mqda - adq = bdp - mpdb$
3. $mrda - adr = bdq - mqdb + cdp - mpdc$
4. $msda - ads = bdr - mrdb + cdq - mqdc + ddp - mpdd$
5. $mtda - adt = bds - msdb + cdr - mrdc + ddq - mqdd + edp - mpde$;

&c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c.

quarum æquationum prima $mpda - adp = 0$, dat $p = a^m$ (e). Ad cæteras resolvendas (d), fingatur generalis æquatio $myda - ady = dz$; sitque $y = a^m h$, erit $dy = a^m dh - ma^{m-1} hda$; adeoque $myda - ady$ [$= dz$] $= ma^m hda - a^{m+1}dh - ma^m hda = - a^{m+1}dh$; indeque $dh = - dz : a^{m+1}$, & $h = \int(- dz : a^{m+1})$, & y [$a^m h$] $= a^m \int(- dz : a^{m+1})$; quo canone ad præcedentes æquationes applicato, [quod fit interpretando pro secunda y per q & dz per $bdp - mpdb$, pro tertia y per r & dz per $bdq - mqdb + cdp - mpdc$, &c.] eliciuntur

(e) Æquationis $mpda - adp = 0$ vel $adp - mpda =$ seu, dividendo per a^{m+1}, æquat. $(adp - mpda) : a^{m+1} = 0$, aut $(a^m dp - ma^{m-1} pda) : a^{2m} = 0$, integrale est $p : a^m =$ const. $= C$ unde est $p = Ca^m$. Simplicioris formæ ergo, Noster posuit $C = 1$, & $p = a^m$.

(d) Sine assumpta æquatione, facile resolvuntur æquationes 2, 3; &c. Verbi gr. $mqda - adq = bdp - mpdb$, vel $adq - mqda = mpdb - bdp$, dividendo per a^{m+1}, abit in $(adq - mqda) : a^{m+1}$, seu $(a^m dq - ma^{m-1} qda) : a^{2m} = (mpdb - bdp) : a^{m+1}$ cujus integrale est $q : a^m = \int \frac{mpdb - bdp}{a^{m+1}}$: unde fit $q = a^m \int \frac{mpdb - bdp}{a^{m+1}}$.

No. CIII.

1. $p = a^m$

2. $q = a^m \int \frac{mpdb - bdp}{a^{m+1}}$

3. $r = a^m \int \frac{mqdb - bdq + mpdc - cdp}{a^{m+1}}$

4. $s = a^m \int \frac{mrdb - bdr + mqdc - cdq + mpdd - ddp}{a^{m+1}}$

5. $t = a^m \int \frac{msdb - bds + mrdc - cdr + mqdd - ddq + mpde - edp}{a^{m+1}}$

&c. &c.

e quibus lex progreſſionis facile pateſcit. Liquet igitur, cum data ſint a & m, dari p, adeoque & dp; igitur cum & data ſint b & db, dari quoque q & dq; ac proinde propter data c & dc, dari quoque r & dr; & ſic porro.

Nota. Iidem valores litterarum $p, q, r, s, t,$ &c. valent etiam pro Multinomio finito, puta Trinomio $a + b + c$, ad poteſtatem indefinitam m elevando: ſolum enim litteræ ſequentes, d, e, f, &c. earumque differentialia dd, de, df, &c. nihilo ſunt æquales ponendæ.

Exemplo ſit Infinitinomium $\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^6 + \delta x^{10} + \varepsilon x^{15} +$ &c. ubi

$a = \alpha x$	$da = \alpha dx$	e quibus eliciuntur
$b = \beta x^3$	$db = 3\beta x^2 dx$	$p = \alpha^m x^m$ - - - - - - - - $dp = m\alpha^{m-1} x^{m-1} dx$
$c = \gamma x^6$	$dc = 6\gamma x^5 dx$	$q = m.\alpha^{m-1} \beta x^{m+2}$ - - $dq = m.(m+2)\alpha^{m-1} \beta x^{m+1} dx$
$d = \delta x^{10}$	$dd = 10\delta x^9 dx$	$r = \frac{m.m-1}{1.2} \alpha^{m-2} \beta^2 x^{m+4} + m.\alpha^{m-1} \gamma x^{m+5}$
$e = \varepsilon x^{15}$	$de = 15\varepsilon x^{14} dx$	
&c.	&c.	

ARTI-

ARTICUL. II.

Regulæ pro constructionibus curvarum quarundam transcendentium per rectificationes algebraicarum ([a]).

SIt indeterminata x, & ponantur coordinatarum quæsitæ curvæ algebraicæ una $\sqrt{(bx^m + cx^n)}$, altera $\sqrt{(bx^m - cx^n)}$; erunt, facta differentiatione, elementa coordinatarum $(bmx^{m-1} + cnx^{n-1})dx : 2\sqrt{(bx^m + cx^n)}$, & $(bmx^{m-1} - cnx^{n-1})dx : 2\sqrt{(bx^m - cx^n)}$; indeque quadrata elementorum coordinatarum $(bbmmx^{2m-2} + 2bcmnx^{m+n-2} + ccnnx^{2n-2})dx^2 : (4bx^m + 4cx^n)$ & $(bbmmx^{2m-2} - 2bcmnx^{m+n-2} + ccnnx^{2n-2})dx^2 : (4bx^m - 4cx^n)$, quibus ad idem nomen reductis & additis, habetur quadratum elementi curvæ algebraicæ $(b^3mmx^{3m-2} + (bccnn - 2bccmn)x^{m+2n-2})dx^2 : (2bbx^{2m} - 2ccx^{2n})$, & facta divisione per x^{2m}, extractaque radice, ipsum elementum $= dx\sqrt{(b^3mmx^{m-2} + (bccnn - 2bccmn)x^{2n-m-2})} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2n-2m})}$. Ut evanescat quantitas $(bccnn - 2bccmn)x^{2n-m-2}$, ponatur $n = 2m$, & erit hoc elementum $dx\sqrt{b^3mmx^{m-2}} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2m})} = bmx^{\frac{1}{2}m-1}dx\sqrt{b} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2m})} = \frac{bm}{c}x^{\frac{1}{2}m-1}dx\sqrt{\tfrac{1}{2}b} : \sqrt{(\frac{bb}{cc} - x^{2m})}$. Sunt autem

 coor-

([a]) Methodum universalem reducendi quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad longitudines curvarum algebraicarum dedit Vir celeb. *Joh.* BERNOULLI, in *Actis Erud. Lips.* 1724. Aug. pag. 356.

No. CIII. coordinatæ, per hypothesin, una $\sqrt{(bx^m + cx^n)}$, altera $\sqrt{(bx^m - cx^n)}$, hoc est, propter $n = 2m$, una $\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}$, altera $\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}$; quæ si nominentur y & z, habebitur

$$\left.\begin{array}{l|l|l} yy = bx^m + cx^{2m} & yy + zz = 2bx^m & x^m = (yy+zz):2b \\ zz = bx^m - cx^{2m} & yy - zz = 2cx^{2m} & x^{2m} = (yy-zz):2c \end{array}\right\} \text{Ergo } \frac{yy+zz}{2b} = \sqrt{\frac{yy-zz}{2c}}.$$

Est igitur $\frac{bm}{c} x^{\frac{1}{2}m - 1} dx \sqrt{\tfrac{1}{2}b} : \sqrt{(\frac{bb}{cc} - x^{2m})}$ elementum curvæ algebraicæ, cujus æquatio relationem coordinatarum exprimens est $(yy + zz) : 2b = \sqrt{(yy - zz)} : \sqrt{2c}$, posita $y = \sqrt{(bx^m + cx^{2m})}$ & $z = \sqrt{(bx^m - cx^{2m})}$. Hinc

REGULA.

Si Fractio differentialis talis sit, vel ad talem reduci possit, ut numerator fiat rationalis, denominator radix quadrata differentiæ quantitatis datæ & potestatis indeterminatæ x, *cujus potestatis index quadruplus sit indicis ejusdem* x *unitate aucti in numeratore, erit ejus integrale portio curvæ algebraica.*

EXEMPLA.

I. $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Quia hic $2m = 4 = 4 \times (0 + 1)$ & $\frac{bm}{c} \sqrt{\tfrac{1}{2}b} = aa$, & $bb : cc = a^4$, erit $m = 2$, $b = \tfrac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2aa}$; $y\,[\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{aaxx + x^4}{2aa}}$, $z\,[\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{aaxx - x^4}{2aa}}$, & tandem $yy + zz = a\sqrt{(yy - zz)}$.

II. $adx\sqrt{a} : \sqrt{(aax - x^3)}$, facta divisione per $\sqrt{x}$ reducatur ad $\frac{adx\sqrt{(a:x)}}{\sqrt{(aa - xx)}}$. Quia hic $2m = 2 = 4 \times (-\tfrac{1}{2} + 1)$ & $\frac{bm}{c}\sqrt{\tfrac{1}{2}b} = a\sqrt{a}$, & $bb : cc = aa$; erit $m = 1$, $b = 2a$, $c = 2$;

$y\,[\sqrt{}$

$y\,[\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}] = \sqrt{(2ax + 2xx)}$, $z\,[\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}] = \sqrt{(2ax - 2xx)}$, & tandem $yy + zz = 2a\sqrt{(yy - zz)}$. No. CIII.

III. $aadx : \sqrt{(x^4 - a^4)}$, facta divisione per $aaxx$ reducatur ad $\frac{1}{xx}dx : \sqrt{(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{x^4})}$. Quia hic $2m = -4 = 4 \times (-2+1)$, & $\frac{bm}{c}\sqrt{\frac{1}{2}b} = 1$, & $bb : cc = 1 : a^4$, erit $m = -2$, $b = \frac{1}{2}a^4$, $c = \frac{1}{2}a^6$; $y\,[\sqrt{(bx^m + cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{a^4xx + a^6}{2x^4}}$; $z\,[\sqrt{(bx^m - cx^{2m})}] = \sqrt{\frac{a^4xx - a^6}{2x^4}}$, & tandem $yy + zz = a\sqrt{(yy - zz)}$.

Hoc modo rectificationem curvæ Elasticæ & constructionem Isochronæ paracentricæ Leibnitianæ inveni, mediante rectificatione curvæ algebraicæ Lemniscatæ. Vide *Act. Lipf.* menf. Sept. 1694, pag. 336. [b]

ALIA REGULA.

Posita $m = 2$ in superiori generali elementi formula, reducitur hoc elementum ad $dx\sqrt{(4b^3 + (bccnn - 4bccn)\,x^{2n-4})} : \sqrt{(2bb - 2ccx^{2n-4})}$, & facta divisione per $\sqrt{2cc}$, ad $dx\sqrt{\frac{2b^3}{cc}} + (\frac{1}{2}bnn - 2bn)\,x^{2n-4}) : \sqrt{(\frac{bb}{cc} - x^{2n-4})}$.

Sit igitur differentiale datum $dx\sqrt{\frac{f + gx^r}{h - x^r}}$; fient, instituta collatione, æquationes hæ: $2n - 4 = r$, $2b^3 : cc = f$, $\frac{1}{2}bnn - 2bn = g$, & $bb : cc = h$; unde reperiuntur $n = \frac{1}{2}(r+4)$, $c = f : 2h\sqrt{h}$, $b = f : 2h$, ut & $b = 2g : (nn - 4n) = 8g : (rr - 16)$; adeoque $f : h = 16g : rr - 16$. Quod hanc Regulam fuggerit.

REGULA.

(b) N°. LX, pag. 608. Vide Notam b, pag. 610.

No. CIII.

REGULA.

Si fractio differentialis talis sit forma $dx\sqrt{\frac{f+gx^r}{h-x^r}}$, *aut ad talem reduci possit; sitque* $f:h = 16g:rr-16$, *erit ejus integrale portio curvæ algebraicæ, cujus ordinatæ sunt* $[\sqrt{(bx^m + cx^n)}]\sqrt{(\frac{f}{2h}xx \pm \frac{f}{2h\sqrt{h}}x^{\frac{1}{2}r+2})}$ *&* $[\sqrt{(bx^m - cx^n)}]\sqrt{(\frac{f}{2h}xx - \frac{f}{2h\sqrt{h}}x^{\frac{1}{2}r+2})}$.

EXEMPLUM.

$dx\sqrt{\frac{4a^6+5x^6}{a^6-x^6}}$; quia hic $f[4a^6]:h[a^6] = 16g[80]:rr-16[20]$; idcirco integrabitur rectificatione curvæ, cujus ordinatæ sunt $\sqrt{(2xx+2x^5:a^3)}$ & $\sqrt{(2xx-2x^5:a^3)}$.

TERTIA REGULA.

Sit differentiale hujus formæ $dx\sqrt{(ffx^m - ggx^n)}$, cujus quadratum dispescatur in duas partes $(ffx^m - 2fgx^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n} + ggx^n)dx^2$ & $(2fgx^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n} - 2ggx^n)dx^2$; quarum partium radices sunt $(fx^{\frac{1}{2}m} + gx^{\frac{1}{2}n})dx$ & $dx\sqrt{(2fgx^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n} - 2ggx^n)} = x^{\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}n}dx\sqrt{(2fg - 2ggx^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}m})}$.

Manifestum est integralia harum radicum fore coordinatas curvæ, cujus elementum exprimitur per differentiale propositum; quæ curva proin erit algebraica, si ambæ radices absolute integrari possint. Prioris quidem $(fx^{\frac{1}{2}m} - gx^{\frac{1}{2}n})dx$ integrale semper est $\frac{f}{\frac{1}{2}m+1}x^{\frac{1}{2}m+1} - \frac{g}{\frac{1}{2}m+1}x^{\frac{1}{2}n+1}$. Posterius autem tantum integrationem admittit, quando index potestatis indetermina-

minatæ extra vinculum [$\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}n$] ab indice poteſtatis intra [$\frac{1}{2}n$ — $\frac{1}{2}m$], vel a multiplo hujus indicis [$\frac{1}{2}cn - \frac{1}{2}cm$] unitate deficit ([e]), hoc eſt, quando $\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}n+1 = \frac{1}{2}cn - \frac{1}{2}cm$, ſeu quando $n = (2cm+m+4):(2c-1)$, hoc eſt, [poſita ſucceſſive $c = 1, 2, 3, 4$, &c.], quando $n = \frac{3m+4}{1}$, aut $\frac{5m+4}{3}$, aut $\frac{7m+4}{5}$, aut $\frac{9m+4}{7}$, &c. Unde No. CIII.

REGULA.

Si differentiale talis ſit forma, aut ad talem reduci poſſit, $dx\sqrt{(ffx^m - ggx^n)}$, *in qua* n *æquatur vel* $\frac{3m+4}{1}$, *vel* $\frac{5m+4}{3}$, *vel* $\frac{7m+4}{5}$, *vel* $\frac{9m+4}{7}$, *& ſic porro* ([d]): *erit ejus integrale portio alicujus curvæ algebraicæ, ordinatam unam habentis* $\frac{f}{\frac{1}{4}m+1}x^{\frac{1}{4}m+1}$ — g

(e) Nondum conſtat alios dari caſus, quibus integrari poſſit quantitas $x^p dx\sqrt{(e+fx^q)}$ præter hos: quando ſcil. $(p+1):q$, numerus eſt poſitivus integer; qui caſus ille eſt quem Auctor indicat, & demonſtrabitur N°. ſequenti; vel etiam quando $(p+1+\frac{1}{2}q):q$ numerus eſt integer negativus, qui caſus ex præcedenti facile fluit, dividendo $\sqrt{(e+fx^q)}$ per $\sqrt{x^q}$ & multiplicando $x^p dx$ per $x^{\frac{1}{2}q}$. Ex iſto autem ſequitur quantitatem $x^{\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}n}dx\sqrt{(2fg - 2ggx^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}m})}$ eſſe integrabilem, atque ideo $dx\sqrt{(ffx^m - ggx^n)}$ ad rectificationes reduci, quoties $n = \frac{m-2}{2}$, vel $\frac{2m-2}{3}$, vel $\frac{3m-2}{4}$, vel $\frac{4m-2}{5}$, &c.

(d) In genere $n = \frac{(2c+1)m+4}{2c-1}$; vel etiam, ex Nota præced. $= \frac{cm-2}{c+1}$, poſito c integro poſitivo.

No. CIII. $-\frac{g}{\frac{1}{2}n+1}x^{\frac{1}{2}n+1}$, *alteram* $\int(x^{\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}n}dx\sqrt{(2fg-2ggx^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}m})}$, *quæ quantitas quomodo fummetur fequenti articulo docebitur.*

E x e m p l a.

I. $dx\sqrt{(a^4-x^4)}$; quia hic $f=aa$, $g=1$, $m=0$ & $n=4$ $[=\frac{3m+4}{1}]$; idcirco integratur rectificatione curvæ, cujus ordinatæ funt $aax-\frac{1}{3}x^3$ & $\int(xdx\sqrt{(2aa-2xx)})=-\frac{1}{3}(aa+xx)\sqrt{(2aa-2xx)}$.

II. $dx\sqrt{(aax-x^3)}$. Quia nunc $f=a$, $g=1$, $m=1$, & $n=3$ $[=\frac{5m+4}{3}]$; ideo rectificatione curvæ integrabitur, cujus ordinatæ funt $\frac{2}{3}ax\sqrt{x}-\frac{2}{5}xx\sqrt{x}$ & $\int(xdx\sqrt{(2a-2x)})=(\frac{2}{5}xx-\frac{2}{15}ax-\frac{4}{15}aa)\sqrt{(2a-2x)}$. (e)

Q U A R T A   R E G U L A.

Sit differentiale tale $(fx^m+gx^{m+n})dx:\sqrt{(ff-ggx^{2n})}$, hoc eft $(f+gx^n)x^m dx:\sqrt{(ff-ggx^{2n})}$; erit [divifione facta per $\sqrt{(f}$

(e) Exemp. III. $dx\sqrt{(x^2-a^2)}$: quia hic $f=1$, $g=a$; $m=2$, & $n=0$ $[=\frac{2-2}{2}]$, integrabitur, fecundum Notam c, rectificatione curvæ, cujus ordinatæ funt $\frac{1}{2}xx-ax$, & $\int(dx\sqrt{(2ax-2aa)})=\frac{2}{3}(x-a)\sqrt{(2ax-2aa)}$, quæ Parabola eft biquadratico-cubica. Eft autem $\int dx\sqrt{(xx-aa)}$ area Hyperbolæ æquilateræ, cujus complementum quadratur per rectificationem Parabolæ vulgaris. Itaque quoniam area curvæ, una cum ejus complemento, efficit rectangulum fub coordinatis, erit arcus Parabolæ vulgaris, una cum arcu Parabolæ biquadratico-cubicæ, rectificabilis: uti jam olim docuit Cel. *Joh.* Bernoulli in *Actis Lipf.* 1698. Octob. pag. 464. Calculum non addo, qui nihil habet difficultatis.

$\sqrt{(f+gx^n)}]\ x^m dx\sqrt{\frac{f+gx^n}{f-gx^n}}$, ejusque quadratum $\frac{f+gx^n}{f-gx^n}x^{2m}dx^2$, No. CIII,
hoc est $\frac{f-gx^n+2gx^n}{f-gx^n}x^{2m}dx^2$, quod in partes duas dispescitur $\frac{f-gx^n}{f-gx^n}x^{2m}dx^2 = x^{2m}dx^2$ & $2gx^{2m+n}dx^2:(f-gx^n)$, quarum partium radices sunt $x^m dx$, & $x^{m+\frac{1}{2}n}dx\sqrt{\frac{2g}{f-gx^n}}$. Patet igitur harum radicum integralia denotare coordinatas curvæ, cujus elementum sit differentiale propositum: ipsius autem $x^m dx$ integrale semper est $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$, alterius $x^{m+\frac{1}{2}n}dx\sqrt{\frac{2g}{f-gx^n}}$ integrale tantum habetur [idque per doctrinam sequentis articuli] quando index potestatis indeterminatæ extra vinculum [$m+\frac{1}{2}n$] ab indice potestatis intra [n], aut duplo, triplo, quadruplo, &c. hujus indicis unitate deficit; quod fit ubi $n=\frac{2m+2}{1}$, aut $\frac{2m+2}{3}$, aut $\frac{2m+2}{5}$, aut $\frac{2m+2}{7}$ &c. (f). Unde

REGULA.

Si differentiale talem habeat formam, aut ad talem reduci possit, $(fx^m+gx^{m+n})dx:\sqrt{(ff-ggx^{2n})}$, *ubi* n *æquatur ipsi* $2m+2$, *vel ejus tertiæ, quintæ, septimæ, parti, & sic porro; erit ejus integrale portio curvæ algebraicæ ordinatarum unam haben-*

Mmmmmmm 2 *tis*

(f) Nam, posito c integro quovis, positivo esse debet $m+\frac{1}{2}n+1=cn$, unde fit $n=(2m+2):(2c-1)$. Sed $x^{m+\frac{1}{2}n}dx\sqrt{\frac{2g}{f-gx^n}}$ integrari potest etiam, atque ideo $(fx^m+gx^{m+n})dx:\sqrt{(ff-ggx^{2n})}$, ad rectificationem reduci, quando $1-m$ æquatur multiplo ipsius n, uti patet dividendo tam $x^{m+\frac{1}{2}n}dx\sqrt{2g}$; quam $\sqrt{(f-gx^n)}$ per $x^{\frac{1}{2}n}$ vel $\sqrt{x^n}$,

No. CIII. *tis* $\frac{1}{m+1} x^{m+1}$, *alteram* $\int (x^{m+\frac{1}{2}n} dx \sqrt{\frac{2g}{f - gx^n}})$; *qua quomodo summetur sequenti articulo docebitur.*

EXEMPLA.

I. Sit differentiale $(aa + xx) dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, quo exprimitur summa elementorum curvæ Elasticæ & applicatæ ejusdem ([g]): Quia hic $f = aa$, $g = 1$, $2n = 4$, $n = 2$, $m + n = 2$, adeoque $m = 0$, & $n [2] = 2m + 2$; integrabitur illud ope curvæ, cujus ordinatæ sunt x & $\int (x dx \sqrt{\frac{2}{aa - xx}}) = \sqrt{(2aa - 2xx)}$. Est autem hæc curva Ellipsis, cujus axis minor est $2a$ & major $2a\sqrt{2}$. Unde patet, quomodo aggregatum Elasticæ curvæ & applicatæ ejus æquetur arcui alicujus Ellipsis: veluti docui in *Actis Lipf.* m. Sept. 1694, pag. 338 ([h]).

II. $(aaxx + x^4) dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Quia hic $f = aa$, $g = 1$, $m = 2$, $n = 2$ $[= \frac{2m+2}{3}]$; igitur integrabitur rectificatione curvæ, cujus ordinatæ sunt $\frac{1}{3} x^3$ & $\int (x^3 dx \sqrt{\frac{2}{aa - xx}}) = (\frac{1}{3} xx + \frac{2}{3} aa) \sqrt{(2aa - 2xx)}$.

([g]) Vide Num. LVIII, pag. 590 & seq.
([h]) N°. LX, pag. 611 & 612.

ARTI-

No. CIII.

ARTICUL. III.

Regulæ quædam de ſummatione differentialium.

I.

Summatio quantitatis $ax^n dx (fx^m + g)^{l-1}$.

REGULA.

Si index poteſtatis indeterminatæ extra vinculum unitate auctus æquatur indici in vinculo, aut ejuſdem eſt multiplus; hoc eſt, ſi $n + 1 = m$, *aut* = *multiplo ipſius* m; *hoc eſt, ſi* $\frac{n+1-m}{m} = 0$, *aut* = *numero cuicunque integro & poſitivo; quantitas propoſita eſt abſolute integrabilis* (*).

(* Pone $fx^m + g = z$, & erit $x = (\frac{z-g}{f})^{1:m}$, atque $dx = \frac{1}{m}(\frac{z-g}{f})^{(1-m):m} dz$, quibus ſubſtitutis, erit $ax^n dx (fx^m + g) = \frac{a}{mf}(\frac{z-g}{f})^{(n+1-m):m} z^{l-1} dz$. Hæc autem quantitas eſt manifeſte integrabilis, quoties $(n+1-m):m$ eſt vel 0, vel integer poſitivus. Nam iſto in caſu, elevetur $\frac{z-g}{f}$ ad poteſtatem $(n+1-m):m$ quæ conſtabit terminis numero finitis, & multiplicentur ſinguli termini per $\frac{a}{mf} z^{l-1} dz$, eruntque ſinguli integrabiles, niſi forſan unus adſit, in quo, poſt multiplicationem per $\frac{a}{mf} z^{l-1} dz$, index indeterminatæ z ſit $= -1$, id quod accidet quando $l = 0$, vel integer negativus. Tunc vero, terminus ille unicus ad Logarithmos reduci poterit. Sed, quod non videtur animadvertiſſe Auctor noſter, eſt etiam quantitas $ax^n dx (fx^m + g)^{l-1}$ integrabilis, quoties $(-lm-n-1):m$ eſt vel 0, vel poſitivus integer. Nam ſi dividatur quantitas in vinculo per

No. CIII. Posito enim hoc numero $\frac{n+1-m}{m} = p$, integrale ejus fiet $(qx^{mp} + rx^{m(p-1)} + sx^{m(p-2)} + tx^{m(p-3)} + ux^{m(p-4)} \ldots + w) \times (fx^m + g)^l$;

$$\text{existentibus} \quad q = +\frac{a}{fm(l+p)}$$

$$r = -\frac{agp}{ffm(l+p)(l+p-1)}$$

$$s = +\frac{ag^2p.(p-1)}{f^3m(l+p)(l+p-1)(l+p-2)}$$

$$t = -\frac{ag^3p.(p-1)(p-2)}{f^4m(l+p)(l+p-1)(l+p-2)(l+p-3)}$$

$$u = +\frac{ag^4p.(p-1)(p-2)(p-3)}{f^5m(l+p)(l+p-1)(l+p-2)(l+p-3)(l+p-4)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w = \frac{ag^p.p(p-1)(p-2)\ldots\ldots\ldots 1}{f^{p+1}m(l+p)(l+p-1)(l+p-2)\ldots\ldots\ldots l}.$$

Exem-

x^m & multiplicetur quantitas extra vinculum per x^{ml-m}, quantitas $ax^ndx(fx^m+g)^{l-1}$ mutabitur in $ax^{n+ml-m}dx(f+gx^{-m})^{l-1}$ quæ erit integrabilis si index $n+ml-m$ unitate auctus sit $=-m$ vel ejus multiplo, hoc est si $\frac{n+ml-m+1}{-m}$ sit $=1$, vel numero integro positivo, aut dempta unitate si $\frac{n+ml+1}{-m}$ sit vel $=0$, vel $=$ integro positivo.

Id omne vero, magis ad mentem Auctoris, demonstrabitur sic. Quantitatis $qx^{mp}(fx^m+g)^l$ differentiale est $lqx^{mp}(fx^m+g)^{l-1}mfx^{m-1}dx + mpqx^{mp-1}dx(fx^m+g)^l = lqmfx^{mp+m-1}dx(fx^m+g)^{l-1} + mpqx^{mp-1}dx(fx^m+g)(fx^m+g)^{l-1} = (lqmf+pqmf)x^{mp+m-1}dx(fx^m+g)^{l-1} + pqmgx^{mp-1}dx(fx^m+g)^{l-1}$. Igitur $\int((lqmf+pqmf)x^{mp+m-1}dx(fx^m+g)^{l-1}) = qx^{mp}(fx^m+g)^l - \int(pqmgx^{mp-1}dx(fx^m+g)$

EXEMPLA. No. CIII.

I. $x^5 dx \sqrt{(2bb - 2xx)}$: quia hic $a = 1$, $f = -2$, $g = 2bb$, $l - 1 = \frac{1}{2}$, adeoque $l = \frac{3}{2}$, $m = 2$, $n = 5$, & $\frac{n+1-m}{m} = p = 2$; invenietur ejus integrale per hos Canones $(-\frac{1}{14}x^4 - \frac{2}{35}bbxx - \frac{4}{105}b^4) \times (2bb - 2xx)\sqrt{(2bb - 2xx)}$, hoc est, $(\frac{1}{7}x^6 - \frac{1}{35}bbx^4 - \frac{4}{105}b^4xx - \frac{8}{105}b^6)\sqrt{(2bb - 2xx)}$.

II. $x^5 dx : \sqrt{(2bb - 2xx)}$; quia hic rursus $a = 1$, $f = -2$, $g = 2bb$, $m = 2$, $n = 5$, & $\frac{n+1-m}{m} = p = 2$; at $l - 1 = -\frac{1}{2}$, & $l = \frac{1}{2}$; reperitur ejus integrale per Canones $(-\frac{1}{10}x^4 - \frac{2}{15}bbxx - \frac{4}{15}b^4)\sqrt{(2bb - 2xx)}$.

II.

Summatio quantitatis $(ax^n + bx^{n+m})dx.(fx^m + g)^{l-1}$.

Ponatur ejus integrale $hx^s(fx^m + g)^l$, quod differentiatum facit $hsx^{s-1}dx(fx^m+g)^l + fhlmx^{s+m-1}dx(fx^m+g)^{l-1} = hsx^{s-1}dx(fx^m+g)(fx^m+g)^{l-1} + fhlmx^{s+m-1}(fx^m+g)^{l-1} = (ghsx +g)^{l-1})$. Pone $mp + m - 1 = n$ seu $p = (n+1-m) : m$, & $lqmf + pqmf = a$, seu $q = a : mf(l+p)$, & erit $\int(lqmf + pqmf)x^{mp+m-1} dx(fx^m+g)^{l-1}) = [\int(ax^n dx(fx^m +g)^{l-1}) =] \frac{a}{mf(l+p)}x^{mp}(fx^m+g)^l - \int(\frac{apg}{f(l+p)}x^{mp-1}dx(fx^m+g)^{l-1})$ Et eodem ratiocinio $\int(\frac{apg}{f(l+p)}x^{mp-1} dx(fx^m+g)^{l-1})$ erit $= \frac{apg}{mff(l+p)(l+p-1)}x^{m(p-1)}(fx^m +g)^l - \int\frac{aggp(p-1)}{ff(l+p)(l+p-1)}x^{m(p-1)-1} dx(fx^m+g)^{l-1})$, atque ita porro, donec per $p-1$, $p-2$, $p-3$, &c. pervenias ad $p - p = 0$, quæ quantitas, cum afficiat terminum in quo primum comparet atque sequentes omnes, ibi series terminatur.

No. CIII. $(ghsx^{s-1}dx + fhsx^{s+m-1}dx\,(fx^m+g)^{l-1} + fhlmx^{s+m-1}dx\,(fx^m+g)^{l-1} = (ghsx^{s-1} + (fhs+fhlm)\,x^{s+m-1})\,dx\,(fx^m+g)^{l-1}$. Facta nunc comparatione inter $ghsx^{s-1}$ & ax^n, nec non inter $(fhs+fhlm)\,x^{s+m-1}dx$ & bx^{n+m}; habentur $s-1=n$, $ghs=a$, $fhs+fhlm=b$; indeque $s=n+1$, $h=[a:gs]=a:g(n+1)$, ut & $h=[b:f(s+lm)=]\,b:f(lm+n+1)$; unde apparet esse debere $a:g(n+1)=b:f(lm+n-1)$, hoc est $a:b=g(n+1):f(lm+n+1)$. Hinc

R E G U L A.

Si in proposita quantitate $(ax^n+bx^{n+m})\,dx\,(fx^m+g)^{l-1}$, *sit* $a:b=g(n+1):f(lm+n+1)$, *erit illa absolute integrabilis, etiamsi neutra partium* $ax^n dx\,(fx^m+g)^{l-1}$, *nec* $bx^{n+m}dx\,(fx^m+g)^{l-1}$, *seorsim talis sit: fiet enim ejus integrale* $[hx^s(fx^m+g)^l]$ $\frac{a}{g(n+1)}x^{n+1}(fx^m+g)^l$.

E X E M P L U M.

$(3ccxx-4x^4):\sqrt{(cc-xx)}$; quia hic $a=3cc$, $b=-4$, $n=2$, $m=2$, $f=-1$, $g=cc$, $l-1=-\frac{1}{2}$, & $l=\frac{1}{2}$; insuperque $a:b=[3cc:-4=]\,g(n+1):f(lm+n+1)$; erit integrale quæsitum $x^3\sqrt{(cc-xx)}$.

III.

Summatio quantitatis $(ax^n+bx^{n+m}+cx^{n+2m})\,dx \times (fx^m+g)^{l-1}$.

Sit ejus integrale $hx^s+ix^{s+m})(fx^m+g)^l$, quod differentiatum, ut supra, facit $(ghsx^{s-1}+(fhs+gi\,(s+m)+fhlm)x^{s+m-1}+(fi\,(s+m)+film)\,x^{s+2m-1})\,dx\,(fx^m+g)^{l-1}$: ubi, facta comparatione cum terminis propositæ quantitatis, emergit $s=n+1$,

$+1$, $h = a : g(n+1)$, $i = c : f(lm+m+n+1)$, & denique $(lm+n+1)\,af : g(n+1) - b + (m+n+1)\,cg : f(lm+m+n+1) = 0$. Unde No. CIII.

REGULA.

Si in proposita quantitate $(ax^n + bx^{n+m} + cx^{n+2m})\,dx\,(fx^m + g)^{l-1}$ *observetur quod* $(lm+n+1)\,af : g(n+1) - b + (m+n+1)\,cg : f(lm+m+n-1) = 0$; *quantitas proposita est absolute integrabilis, tametsi nec singulae, nec binae ejus partes tales sint: est autem integrale* $\left(\frac{a}{g(n+1)}x^{n+1} + \frac{c}{f(lm+m+n+1)}x^{n+m+1}\right)(fx^m+g)^l$. *Nota, hoc procedere etiam cum* $b = 0$.

EXEMPLA.

I. $(xx + 3x^4 + 2x^6)\,dx : \sqrt{(1+xx)}$. Quoniam hic $a = 1$; $b = 3$, $c = 2$, $f = 1$, $g = 1$, $n = 2$, $m = 2$, $l = \frac{1}{2}$, adeoque $(lm+n+1)\,af : g(n+1) - b + (m+n+1)\,cg : f(lm+m+n+1) = \frac{4}{3} - 3 + \frac{5}{3} = 0$, idcirco reperitur integrale $(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^5)\sqrt{(1+xx)}$.

II. $(5xx - * - 8x^6)\,dx : \sqrt{(1+xx)}$. Quia hic $a = 5$, $b = 0$, $c = -8$, $f = 1$, $g = 1$, $n = 2$, $m = 2$, $l = \frac{1}{2}$, ideoque $(lm+n+1) : af : g(n+1) - b + (m+n+1)\,cg : f(lm+m+n+1) = \frac{20}{3} - 0 - \frac{40}{6} = 0$; ideo reperitur integrale $(\frac{5}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^5)\sqrt{(1+xx)}$.

IV.

Summatio quantitatis $(ax^p + bx^{p+m} + cx^{p+n})\,dx$
$(fx^m + gx^n + h)^{l-1}$.

Sit ejus integrale $ix^s(fx^m + gx^n + h)^l$, quod differentiatum, ut nuper, exhibet $(hisx^{s-1} + (film + fis)\,x^{s+m-1} + (giln + gis)$

No. CIII. $g\,i\,s)\;x^{s+n-1})\;dx.\,(fx^m + g\,x^n + h)^{l-1}$; ex cujus collatione cum proposita eruuntur $s = p + 1$, $i = a : h\,(p + 1)$, nec non $\frac{af}{h}(\frac{lm}{p+1} + 1) = b$ & $\frac{ag}{h}(\frac{lm}{p+1} + 1) = c$. Unde

REGULA.

Si, in quantitate proposita $(a\,x^p + b\,x^{p+m} + c\,x^{p+n})\,dx\,(fx^m + gx^n + h)^{l-1}$, *habeatur simul* $\frac{af}{n}(\frac{lm}{p+1} + 1) = b$, *& simul* $\frac{ag}{n}(\frac{lm}{p+1} + 1) = c$; *erit illa absolute integrabilis, ut maxime nulla partium ejus talis sit: integrale autem hoc erit* $\frac{a}{h(p+1)}\,x^{p+1}\,(fx^m + gx^n + h)^l$.

EXEMPLUM.

$(3\,x + 6x^4 + 8xx)\,dx : \sqrt[3]{(x^3 + 2\,x + 1)}$. Quia hic $a = 3$, $b = 6$, $c = 8$, $f = 1$, $g = 2$, $h = 1$, $m = 3$, $n = 1$, $p = 1$, $l = \frac{2}{3}$, & præterea $\frac{af}{n}(\frac{lm}{p+1} + 1) = 6 = b$, nec non $\frac{ag}{n}(\frac{lm}{p+1} + 1) = 8 = c$: igitur integrale invenitur $\frac{3}{2}\,xx\,\sqrt[3]{(x^3 + 2\,x + 1)^2}$.

V.

Regula generalissima pro summanda quantitate quotlibet terminorum [integrorum & rationalium] in & extra vinculum.

Sit integrandæ quantitatis Typus, $(a\,x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + d\,x^{n-3} + e\,x^{n-4} \ldots\ldots + \gamma x^2 + \beta x + \alpha)\,dx \times (fx^m + g\,x^{m-1} + h\,x^{m-2} + i\,x^{m-3} + k\,x^{m-4}$ &c.$)^{l-1}$, Dico, si absolute summari possit,

possit, ejus integrale fore $(qx^p + rx^{p-1} + sx^{p-2} + tx^{p-3} + ux^{p-4}$ &c. $) \times (fx^m + gx^{m-1} + hx^{m-2} + ix^{m-3} + kx^{m-4}$ &c. $)^l$; positis, ut sequitur, No. CIII.

$$p = n + 1 - m$$

$$q = \frac{a}{f(p + lm)}$$

$$r = \frac{b - gq(p + l(m-1))}{f(p - 1 + lm)}$$

$$s = \frac{c - gr(p - 1 + l(m-1)) - hq(p + l(m-2))}{f(p - 2 + lm)}$$

$$t = \frac{d - gs(p - 2 + l(m-1)) - hr(p - 1 + l(m-2)) - iq(p + l(m-3))}{f(p - 3 + lm)}$$

$$u = \frac{e - gt(p-3+l(m-1)) - hs(p-2+l(m-2)) - ir(p-1+l(m-3)) - kq(p+l(m-4))}{f(p - 4 + lm)}.$$

&c.

Sin quantitas proposita absolute summabilis non sit, erit ejus integrale rursum hæc quantitas $(qx^p + rx^{p-1} + sx^{p-2}$ &c. $) \times (fx^m + gx^{m-1} +$ &c. $)^l$, sed assumpta secum hac quantitate transcendente, $\int (\varphi + \chi x + \psi xx \text{-----} \xi x^{m-2})\, dx \times (fx^m + gx^{m-1} + hx^{m-2} + ix^{m-3}$ &c. $)^{l-1})$, positis q, r, s, &c. ut antea, & præterea

$$\varphi = \alpha - liu - kt$$

$$\chi = \beta - 2lhu - (1+l)it - 2ks$$

$$\psi = \gamma - 3lgu - (1+2l)ht - (2+l)is - 3kr$$

&c. &c.

ubi tamen observandum, quod litteræ u, t, s, &c. k, i, h, &c. non semper eosdem terminos denotant, quos in majori laterculo indicant: Sed quod hic u & k semper ultimos terminos, in quibus x nullius dimensionis est; t & i coefficientes penultimorum,

Nnnnnn 2 ubi

No. CIII. ubi x eſt unius; s & h antepenultimos, ubi x eſt duarum dimenſionum; & pari ratione reliqui anteriorum terminorum coefficientes deſignare intelliguntur ([b]).

Patet hinc, quod ſi omnes coefficientes quantitatis tranſcendentis φ, χ, ψ, &c. nihilo æquales reperiantur, evaneſcere quoque debeat ipſa quantitas tranſcendens; adeo ut, illo caſu, propoſita quantitas abſolute ſit ſummabilis. Si autem non omnes φ, χ, ψ, &c. evaneſcant, quantitas propoſita quadantenus tantum integrata fuerit; ſed, in illa parte quæ non integrata manet, index maximæ poteſtatis extra vinculum ab indice maximæ poteſtatis in vinculo ſemper binario aut amplius deficiat. Unde cum nullum, quantum ſciam, detur exemplum differentialis ejuſmodi, ubi index maximus extra vinculum binario aut amplius ab indice maximo intra deficiat, quod abſolute ſummari poſſit, aut a quoquam unquam ſummatum ſit, [intellige tamen, ſi prius omnis

([b]) Quantitatis $(ax^n + bx^{n-1} \cdots + a)$ termini ſunt $n+1$ numero: quantitas autem $(qx^p + rx^{p-1} + \&c.)$ non habet niſi $p+1$, hoc eſt, $n+2-m$ coefficientes. Quare ſi differentiale ipſius $(qx^p + rx^{p-1} \&c.)$ $(fx^m + gx^{m-1} \&c.)^l$ comparetur cum $(ax^n + bx^{n-1} \&c.)\,dx.\ (fx^m + gx^{m-1} \&c.)^{l-1}$, habebuntur $n+1$ æquationes ad determinandos $n+2-m$ coefficientes. His igitur determinatis, reſtarent $m-1$ æquationes, quæ eſſent totidem conditiones, ſive relationes coefficientium a, b, c, &c. quibus locum obtinentibus, quantitas $(ax^n + bx^{n-1} \&c.)\,dx\ (fx^m + gx^{m-1} \&c.)^{l-1}$ eſſet integrabilis. At vero, ſi locum non habeant hæ conditiones, quantitati $(qx^p + rx^{p-1} \&c.)(fx^m + gx^{m-1})^l$ adjicienda eſt quantitas tranſcendens $\int(\varphi + \chi x + \psi x^2 \&c.)\,dx.\ (fx^m + gx^{m-1} \&c.)^{l-1}$, ut introducantur novi coefficientes φ, χ, ψ, &c. qui eſſe debent $m-1$ numero, ut ſatis fiat $m-1$ æquationibus ſuperſtitibus. Quamobrem incipiendo a $\varphi + \chi x +$ &c. pergendum eſt uſque ad ξx^{m-2}. Denique ut determinentur coefficientes omnes, ſumendum eſt differentiale quantitatis $(qx^p + rx^{p-1} \&c.)$. $(fx^m + gx^{m-1} \&c.)^l + \int(\varphi + \chi x \cdots + \xi x^{m-2})\,dx.\ (fx^m + gx^{m-1} \&c.)^{l-1})$ & illud comparandum cum quantitate propoſita $(ax^n + bx^{n-1} \&c.)\,dx,\ (fx^m + gx^{m-1} \&c.)^{l-1}$.

omnis possibilis reductio sub vinculo instituta fuerit: nam ex. gr. $x\sqrt{(aax^4 + x^6)}$ summari potest, ut maxime index 1 extra vinculum plus quam binario deficit ab indice 6 intra, ob rationem quod quantitas $x\sqrt{(aax^4 + x^6)}$ reducitur ad $x^3\sqrt{(aa + xx)}$] colligi potest, me hic omne præstitisse, quodcunque præstari potuit: nam aut totam quantitatem per Canones meos absolute summo, aut partem tantum ejus, relicta alia parte quam certum est summari non posse. No. CIII.

Exempla.

I. Sit integrandum differentiale $(x^7 - 2x^6 + 3x^5 * - 2x^3 + \frac{731}{40}x^2 - \frac{357}{16}x + \frac{997}{240})dx : \sqrt{(x^4 * - 3xx + 2x + 1)}$. Notentur valores coefficientium, computatis etiam terminis qui deficiunt, non secus ac si adessent, ita

$a = 1$		$f = 1$	
$b = -2$	$\gamma = +\frac{731}{40}$	$g = 0$	$l = \frac{1}{2}$
$c = +3$	$\beta = -\frac{357}{16}$	$h = -3$	$n = 7$
$d = 0$	$\alpha = +\frac{997}{240}$	$i = 2$	$m = 4$
$e = -2$		$k = 1$	

Hinc $p = n + 1 - m = 4$; sic ut quæsitum integrale $(qx^p + \&c.).(fx^m + \&c.)^l$, fiat $(qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u)\sqrt{(x^4 * - 3xx + 2x + 1)}$, ubi tantum determinandæ supersunt per Canones nostros litteræ q, r, s, t, u; hoc pacto.

$q = a : f(p + ml) = 1 : 1 \times 6 = \frac{1}{6}$

$r = (b - gq(p + (m-1)l)) : f(p - 1 + ml) = (-2 - 0) : 1 \times 5 = -\frac{2}{5}$

$s = (c - gr(p - 1 + (m-1)l) - hq(p + (m-2)l)) : f(p - 2 + ml) = (+3 - 0 + \frac{1}{2}(4+1)) : 1 \times 4 = (3 + \frac{5}{2}) : 4 = \frac{11}{8}$

$t = (d - gs(p - 2 + (m-1)l) - hr(p - 1 + (m-2)l) - iq(p + (m-3)l)) : f(p - 3 + ml) = (0 - 0 - \frac{6}{5}(3+1) - \frac{1}{3}(4 + \frac{1}{2})) :$ 1×3

No. CIII. $1 \times 3 = (-\frac{24}{5} - \frac{3}{2}) : 3 = -\frac{21}{10}$

$u = (e - gt(p - 3 + (m - 1)l) - hs(p - 2 + (m - 2)l) - ir(p - 1 + (m - 3)l) - kq(p + (m - 4)l) : f(p - 4 + ml) = (-2 - 0 + \frac{33}{8}(2 + 1) + \frac{6}{5}(3 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{6}(4 + 0)) : 1 \times 2 = (-2 + \frac{99}{8} + \frac{24}{5} - \frac{2}{3}) : 2 = + \frac{1501}{240}$.

Priusquam autem constet totum differentiale integratum esse, quærendi sunt etiam coefficientes φ, χ, ψ, &c. quantitatis transcendentis $\int((\varphi + \chi x + \psi x^2) dx : \surd(x^4 * - 3xx + 2x + 1))$ juxta breviores Canones, ubi contingit litteras u, t, s &c., k, i, h, &c. eosdem terminos denotare quos in amplioribus. Quare

$$\varphi = \alpha - liu - 1kt = + \frac{997}{240} - \frac{1501}{240} + \frac{21}{10} = 0$$
$$\chi = \beta - 2lhu - (i + l)it - 2ks = - \frac{357}{16} + \frac{1501}{80} = \frac{63}{10} - \frac{11}{4} = 0$$
$$\psi = \gamma - 3lgu - (1 + 2l)ht - (2 + l)is - 3kr = + \frac{731}{40} - 0 - \frac{63}{5} - \frac{55}{8} + \frac{6}{5} = 0$$

Unde cum singuli hi coefficientes evanescant, colligitur quantitatem propositam totam esse integratam, ejusque integrale perfectum fore $(\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{21}{10}x + \frac{1501}{240}) \surd(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1)$.

II. Esto differentiale $(x^7 - 2x^6 + 5x^5 * - 2x^3 * + 4x + 3) dx : \surd(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1)$. Quia coefficientes omnes, exceptis ultimis α, β, γ, sunt iidem qui in præcedenti Exemplo; hinc etiam per majores Canones eædem quantitates reperiuntur pro q, r, s, t, u. Sed variant φ, χ, ψ. Nam

$$\varphi = \alpha - liu - 1kt = + 3 - \frac{1501}{240} + \frac{21}{10} = - \frac{277}{240}$$
$$\chi = \beta - 2lhu - (1 + l)it - 2ks = + 4 + \frac{1501}{80} + \frac{63}{10} - \frac{11}{4} = + \frac{421}{16}$$
$$\psi = \gamma - 3lgu - (1 + 2l)ht - (2 + l)is - 3kr = 0 - 0 - \frac{63}{5} - \frac{55}{8} + \frac{6}{5} = - \frac{731}{40}$$

Unde colligitur integrale quantitatis propositæ esse $(\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{21}{10}x + \frac{1501}{240}) \surd(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1) + \int((- \frac{277}{240} + \frac{421}{16}x - \frac{731}{40}xx) dx : \surd(x^4 * - 3x^2 + 2x + 1))$.

NOTA. Operatio, qua Prima & Quinta Regula hujus Articuli inventæ sunt, ob prolixitatem non apponitur, sed uniformis est

eſt in omnibus. Ponitur enim integrale fictum, cujus differen- No. CIII.
tiale termino tenus confertur cum differentiali propoſito, ad eliciendum exinde aſſumptos coefficientes.

ARTICUL. IV.

Demonſtratio Anagrammatis
Ephemerid. Pariſ. 11. Auguſt: 1698. (a) *inſerti.*

$a^{44}\ b^{8}\ c^{25}\ d^{20}\ e^{65}\ f^{3}\ g^{4}\ h^{2}\ i^{58}\ l^{22}\ m^{32}\ n^{32}\ o^{27}\ p^{19}\ q^{8}\ r^{30}\ s^{39}\ t^{42}\ u^{54}\ x.$

cujus hic eſt ſenſus.

Ex infinitis curvis genere iiſdem, illa gravi celerrimum deſcenſum ad datum perpendiculum concedit, quæ tempus totius deſcenſus, poſitis celeritatibus in ratione ſubduplicata altitudinum, duplum; in ſubtriplicata, triplum; in ſubſeſquialtera ſeſquialterum efficit ſumma quorundam elementorum, quæ ad reſpectiva tempuſcula rationem habent duplicatam elementorum applicatæ ad elementa curvæ. Conſtat igitur, quomodo hæc per interſectionem duarum tranſcendentium determinetur. Imo dico amplius, in ſpecialibus quibusvis curvis, quæſitam etiam unius tranſcendentis & algebraicæ ope ſemper inveniri poſſe (b).

DEMONSTRATIO.

Sit optata curva ABD [*Fig.* 1], eique infinite propinqua & genere eadem AIN: ergo, ex natura *minimi*, tempora deſcenſuum

(a) No. LXXXVII. pag. 839.
(b) Vide Nⁱ. LXXVIII. Notam f, pag. 792.

No. CIII. suum per utramque præcise æquabuntur. Ductæ intelligantur Tangentes BF, IF, quæ, propter curvas genere easdem, in eodem axis puncto concurrent. Sitque constans $EN = p$, $ND = dp$: indeterminatæ $AG = x$, $GI = y$, $FG = r$, $FI = t$, $AI = s$; ipsi vero IL parallela intelligatur BM; eritque EN $[p]$: ND $[dp]$ = GI $[y]$: IB $[ydp:p]$, & FI $[t] = \sqrt{(FG^2 + GI^2)}$ $[\sqrt{(rr+yy)}]$; loco y sumendo $y + ydp:p$, & differentiando habebitur $FB - FI = \frac{y}{t} \times \frac{ydp}{p} = yydp : tp$; quare FI $[t]$: FB — FI $[yydp : tp]$ = IL $[ds]$: BC — IL $[yydpds : ptt]$. Ponantur IL, BC, seorsim, & super illis erigantur rectangula IQ, BP, quorum altitudines LQ, CP reciprocentur celeritatibus quibus describuntur particulæ, hoc est, radicibus altitudinum IG, BG; adeo ut LQ sit $= 1 : \sqrt{y}$; significabunt utique rectangula hæc IQ, BP tempora quibus particulæ IL, BC describuntur: Omnia ergo rectangula IQ omnibus BP æquari debent, ut &, ablatis communibus segmentis IS, omnia residua RQ omnibus LP æquari debent. Sed pro y ponendo $y + ydp:p$ & differentiando $1 : \sqrt{y} = LQ$, habebitur LQ — CP, seu $SQ = -dp : 2p\sqrt{y}$; quare $RS \times SQ = RQ = -dpds : 2p\sqrt{y}$, & $(BC - IL) \times CP = LP = yydpds : ptt\sqrt{y}$; adeoque $\int(dpds : 2p\sqrt{y}) = \int(yydpds : ptt\sqrt{y})$ seu $\int(ds : \sqrt{y}) = 2\int(yyds : tt\sqrt{y})$ seu, [quia $t:y = ds:dy$] $\int(ds : \sqrt{y}) = 2\int dy^2 : ds\sqrt{y})$. Si celeritates quibus particulæ IL, BC describuntur sint ut $\sqrt[m]{y}$, erit $\int(ds : \sqrt[m]{y}) = m\int(dy^2 : ds\sqrt[m]{y})$ ([c]). Quare constat propositio. ([d])

EXEM-

([c]) Nam si sit $LQ = 1:\sqrt[m]{y}$, erit ejus differentiale $LQ - CP = SQ = dy : my\sqrt[m]{y}$; seu, scribendo $ydp:p$ pro dy, $- dp:mp\sqrt[m]{y}$. Igitur $RS \times SQ = - dpds : mp\sqrt[m]{y}$. Sed $(BC - IL) \times CP = LP = yydpds : ptt\sqrt[m]{y}$; quarum summæ cum æquales sint, erit $\int(dpds : mp\sqrt[m]{y}) = \int(yydpds : ptt\sqrt[m]{y})$ aut, dividendo per constantem $dp : mp$, $\int(ds : \sqrt[m]{y}) = m\int(yyds : tt\sqrt[m]{y})$, vel denique, scribendo

EXEMPLUM.

No. CIII.

Si curvæ AIN, ABD ſint Ellipſes, ſitque natura vel æquatio unius ex infinitis ſuper eodem axe tranſverſo deſcriptis, $abx - bxx = ayy$, reperitur $\int dy \sqrt{((4ayy - 4byy + abb) : (abby - 4by^3))} = 2\int dy \sqrt{((abb - 4byy) : (4ay^3 - 4by^3 + abby))}$ (c).

Aliter in ſpeciali quavis Curva per unam tantum tranſcendentem.

Sint AIN, ABD Ellipſes, quarum ſemi-axis tranſverſus AE $= a$, EN $= p$, EH $= x$, HL $= y$, & ducantur LT, IO parallelæ axi AE; erit natura Ellipſis $aayy = aapp - ppxx$, quæ ſi differentietur, poſita x conſtante, habebitur pro dy [LC] $= ydp : p$; & ſi differentietur, poſita y conſtante, habebitur pro dx [LT] $= aayydp : p^3x$; & ſi differentietur, poſita p conſtante, habebimus pro dx [GH] $= -aaydy : ppx$; adeoque IL $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{(a^4yy + p^4xx)} : ppx = dy \sqrt{(aayy + p^4 - ppyy)} : \sqrt{(p^4 - ppyy)}$, & differentiando, poſita y & dy conſtante, IL $-$ OT $= a^6y^2.(2pp - yy). - dydp : p^5x^3 \sqrt{(a^4yy + p^4xx)}$, nec

bendo $dy^2 : ds^2$ pro $yy : u$, $\int (ds : \sqrt[m]{y}) = m\int (dy^2 : ds\sqrt[m]{y})$.

(d) Nam $\int (ds : \sqrt[m]{y})$ tempus deſcenſus eſt multiplum, juxta exponentem m, ſummæ elementorum $[dy^2 : ds\sqrt[m]{y}]$ quæ ad tempuſcula $[ds : \sqrt[m]{y}]$ rationem habent duplicatam elementorum applicatæ $[dy]$ ad elementa curvæ $[ds]$.

(c Cum ſit $abx - bxx = ayy$; erit $xx - ax = -\frac{a}{b}yy$, atque $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - ayy : b)}$ & $dx = \pm \frac{a}{b}ydy : \sqrt{(\frac{1}{4}aa - ayy : b)}$, nec non $ds = dy \sqrt{\frac{abb + 4(a-b)yy}{abb - 4byy}}$. Igitur $\int (ds : \sqrt{y}) = \int dy \sqrt{((abb + 4(a-b)yy) : (abby - 4by^3))}$ & $2\int (dy^2 : ds\sqrt{y}) = 2\int dy \sqrt{((abb - 4byy) : (abby + 4(a-b)y^3))}$.

No. CIII. nec non $CT = \surd(LC^2 + LT^2) = \surd(yydp^2 : pp + a^4y^4dp^2 : p^6x^2) = -ydp\surd(a^4yy + p^4xx) : p^3x$. Jam, quoniam celeritas in I & O eadem, tanto plus requiret temporis I L quam O T ad describendum, quanto IL major quam OT: idcirco $(IL - OT) \times 1 : \surd y$, seu $a^6yy.(2pp - yy). - dydp : p^5x^3\surd(a^4y^3 + p^4xxy)$ significat excessum temporis, qui requiritur ad describendum IL, ultra id quod requiritur ad describendum OT, & propterea $\int(a^6yy(2pp - yy). - dydp : p^5x^3\surd(a^4y^3 + p^4xxy))$ = toti differentiæ per AL [id est, per hypothesin, per AC] = tempori per $CT = CT \times (1 : \surd y) = -dp\surd(a^4y^3 + p^4xxy) : p^3x$, factaque divisione per constantem $-dp$, habetur $\int(a^6yy(2pp - yy).dy : p^5x^3\surd(a^4y^3 + p^4xxy)) = \surd(a^4y^3 + p^4xxy) : p^3x$.

Eodem modo, si A I N, A B D sint Parabolæ diversorum graduum, & sit $AH = x$, sic ut $y = x^p$, fiet $\int((1 + lx)xxdy : py\surd(xxy + ppy^3)) = lx\surd(xx + ppyy) : \surd y$ (f). Juxta priorem modum fit $\int(dx\surd(xx + ppyy)x\surd y) = 2p^2(yydx : x\surd(xxy + ppy^3))$ (g).

(f) Cum sit $y = x^p$, erit $ly = plx$, quod differentiatum, posita x constante, dabit $dy : y = dplx$, vel [LC] $dy = ydplx$; posita y constante, erit $dplx + pdx : x = 0$, adeoque [LT] $dx = -xdplx : p$; & denique posita p constante, habebitur [GH] $dx = xdy : py$, unde fit $IL = \surd(dx^2 + dy^2) = dy\surd(xx + ppyy) : py$, ac differentiando, positis y & dy constantibus, $IL - OT = (1 + lx)xx. - dpdy : ppy\surd(x^2 + p^2y^2)$. Igitur $\int(IL - OT) : \surd y) = -dp\int((1 + lx)xxdy : ppy\surd(x^2y + p^2y^3))$ cum æquale esse debeat $CT : \surd y$, sitque $CT = \surd(LC^2 + LT^2) = \surd(yydp^2lx^2 + xxdp^2lx^2 : p^2) = -\frac{dplx}{p}\surd(x^2 + p^2y^2)$, erit, dividendo utrinque per $-dp : p$, $\int((1 + lx)xxdy : py\surd(x^2y + p^2y^3)) = lx\surd(x^2 + p^2y^2) : \surd y$.

(g) Cum sit $ds = dx\surd(x^2 + p^2y^2) : x$, mutabitur æquatio $\int(ds : \surd y) = 2\int(dy^2 : ds\surd y)$, pag. 1018. demonstrata in $\int(dx\surd(xx + p^2y^2) : x\surd y) = 2p^2\int(yydx : x\surd(xxy + ppy^3))$.

ARTI-

No. CIII.

ARTICUL. V.

Demonstratio posterioris Anagrammatis Ephemer. Paris. 11 Aug. 1698 (a) *inserti.*

$a^{45}\ b^{8}\ c^{16}\ d^{10}\ e^{50}\ f^{3}\ g^{7}\ h^{2}\ i^{40}\ l^{7}\ m^{15}\ n^{33}\ o^{7}\ p^{13}\ q^{4}\ r^{18}\ s^{33}\ t^{40}\ v^{10}\ x^{4}$.

cujus hic est sensus.

Tangens linea ex infinitis genere iisdem curvis æquales arcus abscindentis ita reperitur. Ductis per datum in abscindente punctum una ex infinitis, ejusque tangente & applicata; fiat, ut excessus hujus tangentis supra summam tertiorum proportionalium ad elementa abscissæ curvæ & elementa applicatæ ad ipsam tangentem ita subtangens ad quartam. Denotabit hæc portionem axis tangentibus utriusque curvæ, abscindentis & abscissæ, interceptam.

DEMONSTRATIO.

Curva GM [*Fig.* 2.] abscindit ex curvis genere iisdem AB, AC æquales arcus AG, AM: quæritur ejus tangens ME in dato puncto M.

Sunto $FC = p$	$NM = y$	$NE = q$
$BC = dp$	$ML = dy$	$ND = r$
$AN = x$	$HG = ds$	$DM = t$
$LG = dx$	$LH = dz$	

erit, ex natura curvarum AB, AC; FC [p] : BC [dp] = NM [y]:

Oooooo 2

(a) N°. LXXXVII. pag. 839.

No. CIII. $[y]:MH\,[ydp:p]=ML+LH\,[dy+dz]$; adeoque $dy=(ydp-pdz):p$; item $ML\,[dy]:LG\,[dx]=MN\,[y]:NE\,[q]$. Hinc fit $ydx:q=dy=(ydp-pdz):p$, atque inde $dz=(qydp-pydx):pq$. Sed $LH\,[dz]:LG\,[dx]=HN\,[y]:NP\,[r]$, unde $ydx:r=dz=(qydp-pydx):pq$; indeque $dx=qrdp:(pr+pq)$; nec non $LG\,[dx]:GH\,[ds]=ND\,[r]:DH\,[t]$ unde $rds:t=dx=qrdp:(pr+pq)$; indeque $ds=qtdp:(pr+pq)$. Jam vero, ſuppoſita HI parallela & æquali ipſi PM; erit $DH\,[t]:HM\,[ydp:p]=GH\,[ds]:GI\,[ydpds:pt]$, & poſita GR perpendiculari ſuper HI, $DH\,[t]:HN\,[y]=GI\,[ydpds:pt]:IR\,[yydpds:ptt]=$ [propter $y:t=dz:ds$] $=dpdz^2:pds=IH-GH=PM-GH$. Unde $\int(dpdz^2:pds)=AP-AG=AP-AM=PM=ds=qtdp:(pr+pq)$; &, facta diviſione per conſtantem $dp:p$, fit $\int(dz^2:ds)=qt:(r+q)$ ſeu $q=r\int(dz^2:ds):(t-\int(dz^2:ds))$, & $q+r=tr:(t-\int(dz^2:ds))$. Q. E. D.

Solutio generalis pro quibuſvis aliis curvis, quæ per communem æquationem parametro variabili gaudentem exprimuntur. (b)

Differentietur æquatio harum curvarum, tam juxta coordinatas x & y, quam juxta parametrum p, & emergat $fdx+gdy+hdp=0$. Poſita itaque x conſtante, fiet $dy\,[HM]=-hdp:g=ML+LH=ML+dz$; unde $ML=-dz-hdp:g=ydx:q$; indeque $dz=-hdp:g-ydx:q=ydx:r$, indeque $dx=-hqrdp:(gry+gqy)=rds:t$, & $ds=-hqtdp:(gry+gqy)$. Sed poſito p conſtante, habebitur $dy\,[LH]=-fdx:g$, & $LH^2=ffdx^2:gg$; & $GH^2=(LH^2+GL^2)=dx^2+ffdx^2:gg$, & $GH=ds=dx\sqrt{(ff+gg)}:g$. Poſita x & dx conſtante, differentientur $\sqrt{(ff+gg)}:g$, ſitque $d(\sqrt{(ff+gg)}:g)=mdy+ndp$

(b) Vide Nr. LXXVIII. Notam f, pag. 792.

$+ndp =$ [quia dy eſt HM] $- hmdp:g + ndp$: quare dds ſeu No. CIII.
$PM - GH = -(hmdpdx + gndpdx):g$; adeoque $\int((-hmdpdx + gndpdx):g) = AP - AG = AP - AM = ds = -hqtdp:(gry + gqy)$; factaque diviſione per dp, $\int((gn - hm)dx:g) = -hqt:(gry + gqy)$. Unde fit $(q+r)$ ſeu $DE = tr:(t + \frac{gy}{h}\int((gn - hm)dx:g)) =$ [propter $t:r = \sqrt{(ff+gg)}:g$] $= hrr\sqrt{(ff+gg)}:(hr\sqrt{(ff+gg)} + ggy\int((gn - hm)dx)g) =$ [ob $y:r = dy:dx = f:-g$] $= hggyy\sqrt{(ff+gg)}:(-hgyf\sqrt{(ff+gg)} + ffggy\int((gn - hm)dx:g)) = -gy:f + ggy\int((gn - hm)dx:g):(-h\sqrt{(ff+gg)} + fg\int((gn - hm)dx:g)) = r + ggy$ &c. Unde dempto r, erit $q = -ggy\int((gn - hm)dx:g):(h\sqrt{(ff+gg)} - fg\int((gn - hm)dx:g))$.

ARTICUL. VI.

In Superficie Conoïdis ducere lineam omnium inter eoſdem terminos breviſſimam. ([a])

Esto curva quæcunque ABC [*Fig.* 3.] rotata circa AD, quæ gignat Conoides ABCFDA, in cujus ſuperficie ducenda ſit linea BKH inter eoſdem terminos breviſſima. QF eſt arcus peripheriæ æquatoris; ABC, AKI, AHF tres meridiani; BN, KL arculi deſcripti a punctis B & K. Sunto autem B, H, C, I, F puncta data, K punctum indeterminatum in meridiano AKI, adeoque BG data, KP indeterminata. Sint

$CD = ID = FD = a$	$KP = LP = g$	$BK = s$	$NK = p$
$BG = NG = f$	$CI = FI = m$	$KH = v$	$LH = q$

Oooooo 3 Hiſce

([a]) Vid. No. LXXX. Probl. I. pag. 796 ſeq.

No. CIII. Hisce positis, propter arcus similes CI, BN, fiet

$$CD : CI = BG : BN \quad \text{pariter} \quad ID : IF = KP : KL$$
$$a : m = f : (mf : a) \qquad a : m = g : (mg : a)$$
$$\text{unde} \qquad \& $$
$$\sqrt{(BN^2 + NK^2)} = BK \qquad \sqrt{(KL^2 + LH^2)} = KH$$
$$\sqrt{(mmff : aa + pp)} = s \qquad \sqrt{(mmgg : aa + qq)} = v$$

Unde $\sqrt{(mmff : aa + pp)} + \sqrt{(mmgg : aa + qq)} =$ *Minimo*. Ergo differentiando habetur $pdp : s + mmgdg : aav + qdq : v = 0$. Sed, propter summam $p + q$ constantem, fit $dq = -dp$; itemque $dg : dp = g : t$ (b), adeoque $dg = gdp : t$; unde substituendo habebitur $pdp : s + mmggdp : aatv - qdp : v$; eliso dp, $p : s + mmgg : aatv - q : v = 0$, vel $q : v - p : s = mmgg : aatv$, adeoque $d(g : v) = mmgg : aatv$, hoc est $d(atdx : \sqrt{(aattdx^2 + x^4dy^2)}) = x^3dy^2 : at\sqrt{(aattdx^2 + x^4dy^2)}$ [ponendo $KP = g = x$, $QC = y$, $CI = m = dy$, $KM = dx$, unde fit q [LH] $= tdx : x$], hoc est $aattxddx + aatxdtdx = 3aattdx^2 + x^4dy^2$. Pone $tdx = zdy$, erit $tddx + dtdx = dzdy$, adeoque $aatxdzdy = 3aaz^2dy^2 + x^4dy^2$, seu $aatxdz = 3aazzdy + x^4dy =$ [loco dy ponendo $tdx : z$] $3aatzdx + x^4tdx : z$, &, multiplicando per $z : aatx$, $zdz = 3zzdx : x + x^3dx : aa$. Pone $zz = fx^m + gx^n$, fietque $zz = x^6 : aacc - x^4 : aa$, unde $z = \frac{xx}{aa}\sqrt{(xx - cc)}$, tandemque $dy = [tdz : z] = actdx : xx\sqrt{(xx - cc)}$.

Facilius idem obtinetur, si NK & LH supponantur æquales, quarum utraque dicatur p; adeoque BG & KP determinatæ, CI & IF vero indeterminatæ, quarum illa sit m, hæc n: hinc enim

CD:

(b) Mirum Auctorem pervenisse ad conclusionem legitimam, per hypothesin fallacem. Non enim esse potest $dg : dp = g : t$, cum sint dg & p infinitesimales ejusdem ordinis, dp vero ordinis inferioris. Sed est $dg : p = g : t$; At posita $dg = pg : t$ non elideretur dp. Veram tamen esse conclusionem [$dy = actdx : xx\sqrt{(xx - cc)}$] ad quam devenit Auctor, per alterum, qui sequitur, modum evincitur.

$$CD:CI = BG:BN \quad \& \quad ID:IF = KP:KL$$
$$a:m = f:\frac{mf}{a} \qquad a:n = g:\frac{ng}{a}$$

adeoque

$$\sqrt{(BN^2+NK^2)} = BK \quad \& \quad \sqrt{(KL^2+LH^2)} = KH$$
$$\sqrt{(mmff:aa+pp)} = s \qquad \sqrt{(nngg:aa+pp)} = v$$

Quare $\sqrt{(mmff:aa+pp)}+\sqrt{(nngg:aa+qq)} =$ *Minimo*, & differentiata dabit $ffmdm:aas+ggndn:aav = 0$; unde quia $dn = -dm$ [propter $m+n =$ conſt.] habebitur $ffm:aas = ggn:aav$; hoc eſt, unum $ffm:aas$ æquale alteri $ffm:aas$; adeoque $ffm:aas =$ conſt. Sed quia jam antea facta fuerant $BG = f = x$, $QC = x$ &c. erit $BK = \sqrt{(mmff:aa+pp)} = s = \sqrt{(xxdy^2:aa+ttdx^2:xx)}$; unde $ffm:s = xxdy:\sqrt{(xxdy^2:aa+ttdx^2:xx)} = ax^3dy:\sqrt{(x^4dy^2+aattdx^2)} =$ conſtanti $= ac$: hoc eſt $aax^6dy^2 = aaccx^4dy^2+a^4cctt dx^2$, ſeu $(aax^6-aaccx^4)dy^2 = a^4cctt dx^2$, ſeu $dy^2 = aacct t dx^2:(x^6-ccx^4)$, & $dy = actdx:xx\sqrt{(xx-cc)}$, ut ſupra.

ARTICUL. VII.

In Superficie Conoidum, quæ naſcuntur ex circumductu lineæ rectæ altero extremo in puncto ſublimi quieſcentis, ſuper data curva, ducere lineam breviſſimam inter data duo puncta.

Circumducatur linea recta AC [*Fig.* 4.], uno ſui termino quieſcens in A, circa datam curvam CDE, gignens hoc ſuo motu ſuperficiem conoidicam ACDE, in qua data ſint duo puncta

No. CIII. puncta L & N: Quæritur linea LMN breviſſima inter puncta L & N.

Eſto AB recta plano curvæ CDE, & ducantur rectæ ALC, ANE; ſitque $AB = a$, $BE = x$, $CE = s$, eritque $AE = \sqrt{(AB^2 + BE^2)} = \sqrt{(aa + xx)}$, ejuſque different. $EH = xdx : \sqrt{(aa + xx)}$, & $DH = \sqrt{(DE^2 - EH^2)} = \sqrt{(ds^2 - xxdx^2 : (aa + xx))} = \sqrt{(aads^2 + xxds^2 - xxdx^2)} : \sqrt{(aa + xx)}$ [propter $DE : EG = FE : BE$, vel $ds : dx = t : x$] $= dx \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + tt - xx)} : \sqrt{(aa + xx)}$.

Ponatur ſeorſim, centro a deſcriptus, radio ac $= b$, arcus circuli cdh; ſitque angulus dah $=$ DAH, erit AD $[\sqrt{(aa + xx)}]$: DH $[dx \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + tt - xx)} : \sqrt{(aa + xx)}] =$ ad $[b]$: dh $[bdx \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + tt - xx)} : (aa + xx)]$.

Factis ergo $B\chi$, $B\delta$, $B\epsilon$, æqualibus ipſis BC, BD, BE, applicetur indefinite $\delta\varpi = \frac{1}{2} bb \sqrt{(\frac{aatt}{xx} + tt - xx)} : (aa + xx)$, erit $\delta\varpi\rho\epsilon =$ Sectori circulari adh; ideoque totum ſpatium $\chi\psi\rho\epsilon =$ Sect. circul. ach. Fiat ergo Sector ach $=$ ſpatio curvilineo $\chi\psi\rho\epsilon$, & abſcindantur in radiis ac, ah partes al, an, æquales AL, AN, junganturque recta ln, tum rurſus fiat indefinite Sector acd $= \chi\psi\varpi\delta$, ducto radio ad, ſecante rectam ln in m, ac abſcindatur, in latere conoidis AD, pars AM $=$ am, erit M punctum in curva quæſita LMN; cum enim ſinguli anguli dah æquentur ſingulis DAH, æquatur ſumma priorum, id eſt, angulus cah, ſummæ angulorum omnium parvorum comprehenſorum in ſuperficie conoidica CAE. Sector igitur circumplicatus ſuperficiei huic congruet, ſic ut punctum l cadat ſuper L, n ſuper N, m ſuper M, totaque recta lmn ſuper LMN: Eſt autem illa breviſſima &c. Ergo & hæc. Q. E. D. & I. (a)

(a) Hujus Solutionis, quam non ſatis aperte exponit Auctor, ratio hæc

hæc eſt. Complanata intelligatur ſuperficies conoidica ACDE, hoc eſt explicata & in planum extenſa fingatur, atque portio vertici A vicina ſit ſector ach; poſito nempe angulo plano cah æquali angulo ſolido conico CAE. Ergo, ſi ſumantur al, an, æquales ipſis AL, AN, & ducatur ln recta; cum hæc ſit in ſuperficie plana ſectoris cah linea breviſſima, erit eadem breviſſima LMN in ſuperficie conoidica CAE. Ductis itaque AD & ad, ſic ut angulus conicus CAD angulo plano cad ſit æqualis, ſumptaque $AM = am$, erit punctum M in linea quæſita LMN. Omne igitur negotium huc redit, ut angulis conicis CAH, CAD aſſignentur æquales cah, cad plani. Id vero ſic conficitur ab Auctore noſtro. Capiantur $B\chi$, $B\delta$, $B\epsilon$ æquales ipſis BC, BD, BE, & demiſſa AK normali in tangentem EF, ſit ſemper $\epsilon\rho$ ad $\frac{1}{2} B\epsilon$, in ratione compoſita ex duplicata ipſius ad [constantis ad libitum aſſumptæ] ad AD, & ex ſimplici ipſius AK ad EK, fiatque ſector cah æqualis ſpatio $\chi\psi\rho\epsilon$. Dico factum. Nam ſumtis elementis adh, $\epsilon\rho\varpi\delta$ ſectoris & ſpatii æqualibus, ſeu $\frac{1}{2} ad \times dh = \epsilon\rho \times \epsilon\delta$, erit $\frac{1}{2} ad \times dh : \frac{1}{2} B\epsilon \times \epsilon\delta = \epsilon\rho \times \epsilon\delta : \frac{1}{2} B\epsilon \times \epsilon\delta = \epsilon\rho : \frac{1}{2} B\epsilon = ad^2 : AD^2 + AK : EK$, [per hyp.]. Sed $\frac{1}{2} ad \times dh : \frac{1}{2} B\epsilon \times \epsilon\delta = dh : \epsilon\delta + ad : B\epsilon = dh : \epsilon\delta + ad : AE + AE : DE + DE : BE$. Igitur $ad^2 : AD^2 + AK : EK = dh : \epsilon\delta + ad : AE + AE : DE + DE : BE$. Atqui, ob ſim. tr. EDH, EAK, eſt $AE : DE = AK : DH$, & ob ſim. tr. EDG, EBK, eſt $DE : BE = GE$ vel $\epsilon\delta : EK$; quibus ſubſtitutis, habemus $ad^2 : AD^2 + AK : EK = dh : \epsilon\delta + ad : AE + AK : DH + \epsilon\delta : EK = dh : \epsilon\delta + \epsilon\delta : EK + ad : AE + AK : DH = dh : EK + ad : AE + AK : DH = dh : DH + AK : EK + ad : AE$ vel AD; unde, demptis communibus, remanet $ad : AD = dh : DH$. Sunt igitur ſimiles, vel æquales anguli elementares dah, DAH. Iſtorum igitur ſumma, quæ eſt angulus conicus CAE, illorum ſummæ, hoc eſt, angulo plano cah, æquatur. Quare &c. No. CIII.

Hæc autem methodus in caſu ſimpliciſſimo coni recti locum non habet. Nam cum ſint BC, BD, BE, ſive $B\chi$, $B\delta$, $B\epsilon$ inter ſe æquales, curva $\psi\varpi\varsigma$ non deſcribitur, & cadente AK ſuper AE, EK evaneſcit, fitque $\epsilon\rho$ infinita. En igitur aliam ſolutionem ſuperiori ſæpe ſimpliciorem. Cape $\chi\delta$, $\chi\epsilon$, æquales arcubus CD, CE, ſitque ſemper $\epsilon\varsigma$ ad $\frac{1}{2} AK$ in duplicata ratione ad ad AD, fiatque ſpatio $\chi\psi\rho\epsilon$ æqualis ſector cah. Dico factum. Nam, ſi ſint æqualia elementa dah & $\epsilon\rho\varpi\delta$, ſeu $ad \times \frac{1}{2} dh = \epsilon\varsigma \times \epsilon\delta$, erit $\epsilon\rho : \frac{1}{2} dh = ad : \epsilon\delta = ad^2 : ad \times \epsilon\delta$. Sed $\frac{1}{2} AK : \epsilon\rho = AD^2 : ad^2$. Quare, ex æquo eſt $AK : dh = AD^2 : ad \times \epsilon\delta$. Verum, ob ſim. tr. EDH, EAK, eſt $DH : AK = ED$ vel $\epsilon\delta : AE$ vel AD. Quare, iterum ex æquo, $DH : dh = AD : ad$; unde rurſus conſtat æquales eſſe angulos elementares DAH, dah, atque ideo ſummas eorum CAE, cah.

Exiſtente ACDE cono recto; AK, AD coincidunt, ſuntque conſtantis magnitudinis, latus nempe coni.

No. CIII. Eſt igitur $\upsilon\rho$ conſtans, dimidium ſcil. tertiæ proportionalis ad AD, a d. Pone, ſimplicitatis gratia, a d $=$ AD, eritque $\upsilon\rho = \frac{1}{2}$ a d. Igitur, cum eſſe debeat cad $= \chi\psi\pi\delta$, erit cd $= \chi\delta =$ CD. Vide N[1]. LXXX. Notam b, pag. 799. ſq.

ARTICUL. VIII.

Analyſis ejuſdem Problematis alia inſtituta methodo, non ſupponendo ſuperficiem gibbam continue complanari poſſe.

Esto centro A [*Fig.* 5] deſcriptus arcus PQR. Sunto autem puncta data infinite propinqua L & N, & GM $=$ HN. Hinc poſitis

$$AB = AP = a,\quad BD = g,\quad AH = m,\quad PQ = p$$
$$BC = f,\quad AG = l,\quad GM = HN = n,\quad QR = q,$$

fiet AP : PQ $=$ AL : LG; item AQ : QR $=$ AM : MH

$$a : p = l : \frac{lp}{a} \qquad a : q = m : \frac{mq}{a}$$

LM $= \sqrt{(LG^2 + GM^2)} = \sqrt{(llpp : aa + nn)}$, & MN $= \sqrt{(mmqq : aa + nn)}$. Quare $\frac{\sqrt{(llpp + aann)} + \sqrt{(mmqq + aann)}}{a} =$ *Minimo*, cujus differentialis [exiſtentibus l, m, n, a conſtantibus] $\frac{llpdp}{\sqrt{(llpp + aann)}} + \frac{mmqdq}{\sqrt{(mmqq + aann)}} = 0$; hoc eſt, quia $dp = -dq$, [propter $p + q =$ conſt.] $llp : \sqrt{(llpp + aann)} = mmq\sqrt{(mmqq + aann)}$, hoc eſt unum $llp : \sqrt{(llpp + aann)}$ æquale alteri $mmq : \sqrt{(mmqq + aann)}$, adeoque $llp : \sqrt{(llpp + aann)} =$ conſtanti. Sit jam porro

porro BC $= f = x$, SD $= dx$, AL $= l = y$, GM $= n = dy$, & CF $= t$; erit BC $[x]$: CF $[t]$ $=$ SD $[dx]$: DC $[tdx:x]$; AC $= \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{(aa + xx)}$, DT [diff. AC] $= xdx : \sqrt{(aa + xx)}$, CT $= \sqrt{(DC^2 - DT^2)} = \sqrt{(ttdx^2 : xx - xxdx^2 : (aa + xx))} = dx\sqrt{(tt : xx - xx : (aa + xx))} = dx\sqrt{(aatt + ttxx - x^4)} : x\sqrt{(aa + xx)}$, ac tandem AC $[\sqrt{(aa + xx)}]$: CT $[dx\sqrt{(aatt + ttxx - x^4)} : x\sqrt{(aa + xx)}]$ $=$ AP $[a]$: PQ $[p]$; unde $p = adx\sqrt{(aatt + ttxx - x^4)} : (aax + x^3) = zdx : a$, & $llp : \sqrt{(llpp + aann)} = yyzdx : \sqrt{(yyzzdx^2 + a^4dy^2)} =$ conſtanti c; hoc eſt $y^4zzdx^2 = ccyyzzdx^2 + a^4ccdy^2$, ſeu $a^4ccdy^2 = (y^4zz - ccyyzz)dx^2$, & $aacdy = yzdx\sqrt{(yy - cc)}$, & $acdy : y\sqrt{(yy - cc)} = zdx : a = adx\sqrt{(aatt + ttxx - x^4)} : (aax + x^3)$. Longitudo lineæ curvæ invenitur eſſe $\sqrt{(yy - cc)}$ ([a]).

CONSTRUCTIO.

Cæteris poſitis ut in priore modo, nempe ac $= b$, & ſectore circuli acd $=$ ſp. $\chi + \varpi\delta$; ſit rqp [*Fig. 6*] arcus circuli deſcriptus centro a, radio ar $= c =$ rs: per punctum s & aſymptotis ar, at, deſcripta ſit Hyperbola ſvw; demittatur in ar perpendicularis qzv, erit zv $= y =$ am $=$ AM. *Q. E. F.* ([b]).

([a]) Eſt LM $= \sqrt{(LG^2 + GM^2)}$ Atqui LG $=$ AL. PQ : AP $= py : a = cdy : \sqrt{(yy - cc)}$, quoniam $p = zdx : a = acdy : y\sqrt{(yy - cc)}$; & GM $= dy$. Igitur LM $= \sqrt{(\frac{ccdy^2}{yy - cc} + dy^2)} = ydy : \sqrt{(yy - cc)}$, cujus integralis, ſeu curvæ longitudo eſt $\sqrt{(yy - cc)}$.

([b]) Cum ſit acd $= \chi + \rho\epsilon = \int((\frac{1}{2}bb\sqrt{(aatt + ttxx - x^4)} : (aax + x^3))$, ſitque arq : acd $=$ ar^2 : ac^2 $= cc : bb$, erit ſector arq $= \int((\frac{1}{2}cc\sqrt{(aatt + ttxx - x^4)} : (aax + x^3))$ & dividendo per $\frac{1}{2}$ar $= \frac{1}{2}c$, arcus rq $= \int((cdx\sqrt{(aatt + ttxx - x^4)} : (aax + x^3)) = ccdy : y\sqrt{(yy - cc)} =$ [poſito $y = cc : u$] $- cdu : \sqrt{(cc - uu)} =$ arcui, cujus coſinus eſt u. Ergo az coſinus arcus rq, erit $= u$. Sed ex Hyperbolæ ſvw natura, eſt zv $=$ ar $\times$ rz : az $= cc : u = y$. Igitur zv $=$ AM.

No. CIII.

ARTICUL. IX.

QUÆSTIO

Num Elastrum tensum, sublata subito vi tendente, eodem tempore in omnibus suis partibus in rectitudinem se restituat: an vero in aliis partibus citius, in aliis tardius?

RESOLUTA.

Esto AEC [*Fig. 7*] curva tensionum ([a]); AB, AF vires tendentes, BC, FG tensiones; hoc est, fibra datæ longitudinis a vi AB tendatur per BC, & a vi AF per FG. Quæritur quanto tempore BC & FG resorbeantur. Sit *MN* tempus quo tota resorbetur, & *PQ* celeritas quam obtinet fibra cum ad DE contracta est, & *TQ* incrementum celeritatis, quod ei accedit tempusculo constanti *RP* a vi residua AD, quam obtinet fibra cum ad DE contracta est. Exponetur ergo fibra BC per spatium *MNO*, & fibra DE per spatium *PNOQ* ([b]). Sit itaque DE vel $PNOQ = ap$ & $AD = t$, $MP = x$, $PQ = y$. Hinc quia *TQ* ipsi AD proportionatur, erit $ady = tdx$, nec non differentiale spatii *PNOQ*, hoc est, $-adp = RQ$ seu ydx. Hinc primo fit $aydy = -atdp$, & $yy = 2\int(-tdp)$, & $y = \sqrt{\int(-2tdp)}$, id est *PQ* proportionalis radici spatii CHKE.

Sint itaque duæ fibræ BC & FG; dividatur utraque [hoc est AH, AI] in æquales numero partes, quarum Kk, Vv sint ordine eædem; ductaque AGγ, fiat γλ curva similis ipsi GL. Sic tem-

([a]) Vide Nos. LVIII, LXVI, & CII.

([b]) Est enim fibræ DE longitudo spatium percurrendum, quod cum singulis momentis *RP* sit in ratione composita ex tempore *RP* & velocitate *RS*, hoc est, cum sit ut rectang. *RPTS*, erit in tempore *PN* ut area *PNOQ*.

tempus per Kk: tempus per Vv = Kk : Vv [= HK : IV = No. CIII. propter similitudinem figurarum γHKL & GIVL, $\surd\gamma$HKL: $\surd$GIVL] + $\surd$GIVL : $\surd$CHKE = $\surd\gamma$HKL : $\surd$CHKE (c) = minus ad majus, cum curva AEC est concava; aut majus ad minus, cum curva est convexa versus axem: & similiter cæteræ particulæ fibræ BC vel citius, vel tardius resorbentur particulis fibræ FG; unde sequitur, si ea sit tensionum natura, ut tensiones crescant in ratione minore quam vires tendentes, fibram magis tensam citius restitui minus tensa (d); si crescant tensiones in ratione majore quam vires, minus tensam citius restitui (e); si denique crescant in eadem, eodem quoque tempore omnes fibras restitui (f). Unde sequitur, arcum citius restitui in partibus quæ majori curvedine gaudent. siquidem certum sit experientia, tensiones crescere in minore ratione quam vires (g). Hinc ille forte tremulus motus in extremitate elastri sese restituentis.

Aliter & concinnius ita demonstratur.

Sit celeritas fibræ BC, cum ad BM seu DE contracta est, MX = y; absumpta fibræ pars CM = x, & MN = dx; manente, ut supra, AD = t, erit tempusculum quo elementum MN absumitur, [quippe in ratione directa elementi & reciproca celeritatis] $dx:y$. Sit porro tempusculum constans $dx:a$, & hoc tempusculo absumtum elementum RT; unde cum longitudines

 iisdem

(c) Hoc est, tempus per Kk ad tempus per Vv, in ratione composita ex directa spatiorum & inversa velocitatum. Sunt autem spatia Kk : Vv, ut HK : IV, propter divisionem proportionalem, & HK : IV, propter simil. curv. GL, $\gamma\lambda$, sunt ut $\surd\gamma$HKL : $\surd$GIVL. Hæc igitur est ratio spatiorum. Velocitates vero ostensæ sunt ut $\surd$CHKE : $\surd$GIVL; quæ ratio si invertatur & cum priori componatur, nascitur ratio $\surd\gamma$HKL : $\surd$CHKE.

(d) Tunc enim AGC curva versus AB concava est.

(e) Tunc AGC versus AB convexa.

(f) Tunc AGC recta est, & coincidunt CHKE, γHKλ.

(g) Vide Num. CII, pag. 981.

No. CIII. iisdem celeritatibus emensæ sint ut tempora, erit $\frac{dx}{y} : \frac{dx}{a} = $ NM vel QX: RT = QS : RS = $dy : $ RS [$ydy : a$] incrementum celeritati additum in dato tempusculo, quod incrementum cum proportionari debeat vi retrahenti, hoc est, tendenti AD [t], habebitur $ydy : a = tdx : a$, adeoque $\frac{1}{2}yy = \int tdx$, & $y = \sqrt{2\int tdx}$ & $dx : y = dx : \sqrt{2\int tdx}$, tempusculum quo elementum NM absorbetur; quod proin est in ratione composita ex directa particulæ NM, & reciproca radicis spatii CHKE, ut supra repertum; unde cætera sequuntur, ut ibi.

NB. Si tensiones viribus tendentibus sint proportionales, id est, si AEC sit linea recta, fiat centro B, radio BC, quadrans circuli (B) XP: erit MX celeritas fibræ ad BM contractæ, & arcus CX tempus contractioni insumtum. Nam positis AB = BC = a, erit t = AD = DE = BM = BC — CM = $a - x$, unde $2tdx = 2adx - 2xdx$, & $\int 2tdx = 2ax - xx$, & $y = \sqrt{2\int tdx} = \sqrt{(2ax - xx)}$ = MX, ex natura circuli: unde tempusculum quo MN absumitur $dx : \sqrt{2\int tdx} = dx : \sqrt{(2ax - xx)}$ = elemento arcus SX, & tempus quo tota CM absorbetur = CX. Sequitur, tempus quo prior medietas fibræ BC resorbetur esse duplum ejus, quo posterior absumitur.

ARTI-

ARTICUL. X.

Demonstratio Theorematis de radiorum osculi usu in reducendis secundis differentiis ad primas.

THEOREMA.

Radiis osculorum reciproca recta super curva in rectam extensa applicata spatium circulabile efficiunt (*).

DEMONSTRATIO.

Esto curva quævis ABCD [*Fig.* 8], cujus axis AI vel DF; abscissa AH, vel IH, vel DE, vel FE $= x$; applicata HC, vel EC $= y$; curva AC vel DC $= z$; radius osculi BG, vel CG $= r$, BK $= dx$, CK $= dy$, BC $= dz$. Esto etiam quadrans circuli PLQ, cujus radii LM, LN ipsis GB, GC; PL ipsi AI, vel DF; NR ipsi EH, & MO ipsi BK parallelæ; ipse vero radius LM sit $= a$, abscissa LR $= m$, applicata RN $= n$; quibus positis, habentur primo, ex similitudine Triangulorum BKC, MON, & NRL, sequentes tres analogiæ

I. BK [dx] : KC [dy] $=$ NR [n] : RL [m]
II. BK [dx] : BC [dz] $=$ NR [n] : NL [a]
III. CK [dy] : BC [dz] $=$ LR [m] : LN [a]

Deinde, ob similitudinem triangulorum BGC & MLN, habetur

(*) Vid. Num. LXVI, pag. 641.

No.CIII. betur BG $[s]$: BC $[dz]$ = LM $[a]$: MN $[adz:s]$, unde $\frac{1}{2}$MN $\times$ML = sectori MLN = $\frac{1}{2}aadz:s$; totusque adeo sector PNL, vel MLQ = $\int(aadz:2s)$ = omn. $(aa:2s)\times dz$. Quod est Theorema.

Hoc ut utamur in reducendis æquationibus differentialibus secundi generis, fiat tertio

$$\left.\begin{array}{l} LR:LN = NO:MN \\ m : a = dn : \frac{adn}{m} = \frac{adz}{s} \\ NR:LN = MO:MN \\ n : a = dm : \frac{adm}{n} = \frac{adz}{s} \end{array}\right\} \text{unde fiet} \left\{\begin{array}{l} s = \frac{mdz}{dn} \\ \\ s = \frac{ndz}{dm} \end{array}\right.$$

Sed per Theoremata, quæ habentur in *Act. Lips.* 1694, pag. 264 ([c]), est quoque,

posita constante dx - - - - dy - - - - dz

$$s = \left\{\begin{array}{ccc} \frac{dz^3}{dxddy} & \cdots \frac{dz^3}{dyddx} & \cdots \frac{dxdz}{ddy} \\ \frac{dydz^2}{dxddz} & \cdots \frac{dxdz^2}{dyddz} & \cdots \frac{dydz}{ddx} \end{array}\right\} = \text{alterutri } \frac{mdz}{dn} \text{ vel } \frac{ndz}{dm}$$

e quorum collatione oritur

$ddy = dndz^2 : mdx$	$ddx = dndz^2 : mdy$	$ddy = dndx : m$
$ddy = dmdz^2 : ndx$	$ddx = dmdz^2 : ndy$	$ddy = dmdx : n$
$ddz = dndydz : mdx$	$ddz = dndxdz : mdy$	$ddx = dndy : m$
$ddz = dmdydz : ndx$	$ddz = dmdxdz : ndy$	$ddx = dmdy : n$

Jam vero, juxta æquationem propositam, quæratur quoque valor

([c]) Num. LVIII, pag. 578.

valor ipsius ddx, ddy vel ddz, & habebitur nova æquatio constans ex puris differentialibus primi generis, e qua porro per tres superiores analogias semper bina rursum elementa, vel dx & dy, vel dx & dz, vel dy & dz tolli possunt: sed cavendum ut talia tollantur, quorum integralia in æquatione non reperiuntur: si vero nullius elementi integrale reperiatur, perinde est quænam tollantur, adeoque res variis modis confici potest; atque ita tandem obtinebitur æquatio, in qua nonnisi una harum x, y, & z, cum sua differentiali reperitur, quæque semper separari possunt, si æquatio nonnisi duo membra habuerit; & sæpe si plura, propter $m = \sqrt{(aa - nn)}$, vel $n = \sqrt{(aa - mm)}$. No. CIII.

EXEMPLA.

I. In *Velaria* [Vid. *Act. Lipf.* 1692, pag. 202, & 1695, pag. 546 ([c])] posita dz constante, æquatio est $adzddx = dy^3$; eliminato ddx, habetur $adzdmdy : n = dy^3$, hoc est, per I & II analogiam, $aadm : mm = dx$, & facta integratione $aa : m = x$ ([d]), seu $m = aa : x$, & tandem, per I analogiam, $dx : dy = n : m =$ $\sqrt{(aa - mm)} : m = \sqrt{(aa - \frac{a^4}{xx})} : \frac{aa}{x} = \sqrt{(xx - aa)} : a$; unde $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$.

II. In *Elastica* [Vid. *Act. Lipf.* 1694, pag. 272, & 1695, pag. 538 ([e])] æquatio est $xs = \frac{1}{2}aa$, hoc est, deleto s, $xndz : dm = \frac{1}{2}aa$, hoc est, per II analogiam, $xdx = \frac{1}{2}adm$, & $xx = am$, unde $m = xx : a$; atque, per I analogiam, $dx : dy = n : m = \sqrt{(aa - mm)} : mm = \sqrt{(a^4 - x^4)} : xx$; quare $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$.

 III. In

([c]) N. XLVIII, pag. 485. Not. e, & LXVI, pag. 654.

([d]) Aut generalius, $c - aa : m = x$; unde, deducitur $dy = adx : \sqrt{((c - x^2) - aa)}$, quæ eandem curvam designat ac $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$ abscissis solum ab alia origine computatis.

([e]) N°. LVIII, pag. 589, & LXVI, pag. 641.

No. CIII. III. In *curva lintei*, ostendi potest perveniri ad $dy : dz = \frac{1}{2}xx : xs$, unde fit $xdz = 2sdy =$ [deleto s] $2ndydz : dm$, seu $xdm = 2ndy =$ [per 1 analogiam] $2mdx$, adeoque $dm : m = 2dx : x$; unde fit $m = xx : a$; adeoque, per 1 analogiam, $dx : dy = \sqrt{(aa - \frac{x^4}{aa})} : \frac{xx}{a} = \sqrt{(a^4 - x^4)} : xx$; quare $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, eadem cum Elastica.

ARTICUL. XI.

*F*ilum ACDEFGB [Fig. 9] *extremitatibus suis* A *&* B *suspensum ab infinitis potentiis* C, D, E, F, G, *juxta directiones quasvis* HC, HD, IE, KF, LG *agentibus extenditur. Quæritur fili curvatura, ejus directio media* LP, *&* *vis, qua secundum* LP *impellitur*?

Producatur infima fili particula AC in tangentem AP, ut & reliquæ DE, EF, FG, GB in tangentes EM, FN, GO, BP, quæ secent AP in M, N, O, P. Juxta MH erit directio media portionis ACDE (*), producta MH & EI concurrant in I & jungatur NI, erit hæc directio media ACDEF. Concurrant NI & FK in K, erit juncta OK directio media portionis ACDEFG. Concurrant OK & GL in L, erit juncta PL directio media portionis ACDEFGB.

Et HIKL est linea mediarum directionum, quam videl. formant

(*) Potentiis HD, HC opponuntur tensiones filorum CA, DE, & cum illis sunt in æquilibrio. Ergo potentia æquipollens ipsis HD, HC, æqualis est & opposita potentiæ æquipollenti ipsis CA, DE. Illius autem directio transit per punctum H; hujus vero directio per punctum M. Itaque directio media, tam tensionum CA, DE, quam potentiarum HC, HD, est MH.

mant interſectionibus ſuis directiones particulares MH, NI, OK, PL, & patet principium ejus H coincidere cum principio curvæ, quam formarent directiones potentiarum CH, DH, EI, FK, GL, hoc eſt, [in linteo a fluido inflato, ubi directiones hæ linteo perpendiculares ſunt,] cum initio evolutæ. Sintque OV, PT arcus centris L & G deſcripti, &. No. CIII.

$AQ = x$, $GQ = y$, $AEG = s$, $AW = b$
$FR = dx$, $GR = dy$, $FG = ds$, $QW = b - x = v$

Radius oſculi in $G = z$
Potentia tendens filum in puncto $G = p$
adeoque potentia tendens univerſam particulam $GF = pds$

Sinus totus - - - - - $= a$	Sin. ang. $GPL = m$	Sin. ang. $GLP = u$
Sinus fili BG & directionis GL - - - - - - - $= r$	Sin. ang. $APL = n$	Sin. ang. $PLO = t$

Firmitas fili in A ſemper conſtans $= aa$
Vis qua filum impellitur per directionem mediam $LP = aq$

Sin. ang. BGF [PGO] : Sin. ang. LGF = pds : firmit. fili in B

$$\frac{ads}{z} \; : \; r = pds : \frac{prz}{a}$$

Firm. fili in A : firm. fili in B = Sin. ang. BPL : Sin. ang. APL

$$aa : \frac{prz}{a} = m : n$$

unde fit $a^3 n = mprz$, ÆQUATIO I^a.

Firm. fili in A : Potent. in P = Sin. ang. BPL : Sin. ang. BPA [PGR vel OGR]

$$aa : aq = m : \frac{adx}{ds}$$

unde fit $aadx = mqds$, ÆQUATIO II^a.

Pot. in P : Pot. in G = Sin. ang. GLO : Sin. ang. PLO

$$aq : pds = u : t$$

unde fit $aqt = puds$, ÆQUATIO III^a.

No. CIII. FR $[dx]$:FG $[ds]$=AQ $[x]$: PG $[\frac{xds}{dx}]$ & $z:ds=\frac{xds}{dx}$[PG]:$\frac{xds^2}{zdx}$=PT,

&, ob similia triangula FGR; POT, est

FR : FG = PT : PO, Sin.tot.: Sin. ang. OPV = PO : OV

$$dx : ds = \frac{xds^2}{zdx} : \frac{xds^3}{zdx^2}, \quad a \quad : \quad n \quad = \frac{xds^3}{zdx^2} : \frac{nxds^3}{azdx^2}$$

In triangulo LGP

Sin.ang.GLP:Sin.ang.LGP=PG: PL, Sin.tot.Sin.ang.PLO=PL:OV

$$u \quad : \quad r = \frac{xds}{dx} : \frac{rxds}{ndx} \quad a \quad : \quad t = \frac{rxds}{ndx} : \frac{nxds^3}{azdx^2}$$

unde fit $trzdx = nnds^2$, ÆQUATIO IV^a.

Ex Sinibus angulorum APL, BPL, nempe m & n, reperitur ([b]) Sinus anguli compositi ex ipsis, ABP seu FGR, id est, $adx : ds$, unde fit $m\sqrt{(aa - nn)} + n\sqrt{(aa - mm)} = aadx : ds$, ÆQUATIO V^a.

Similiter ex r & m Sin. ang. BGL & GPL invenitur Sinus differentiæ ipsorum GLP seu u, unde fit $r\sqrt{(aa - mm)} - m\sqrt{(aa - rr)} = au$, ÆQUATIO VI^a.

Jam habentur sex æquationes, & quinque tantum litteræ m, n, u, q, t sunt eliminandæ. Posset haberi natura curvæ ex solis p & r, quæ ex hypothesi semper dantur: Sed, quia per II^{am} & III^{am} æquationem prima æquatio jam determinatur, hinc illarum quinque litterarum non nisi quatuor eliminari possunt, quinta vero semper ex cognita natura curvæ invenitur.

([b]) Vid. Notæ tumult. in CARTES. N°. LXVII, pag. 668.

nempe

nempe (e) No. CIII.

$$m = \frac{a^4dx}{\sqrt{(a^6ds^2 - 2a^3przdyds + pprrzzds^2)}} = [\text{pos. } prz = aaf] = \frac{aadx}{\sqrt{(aads^2 - 2afdyds \mp ffds^2)}}$$

$$n = \frac{aprzdx}{\sqrt{(a^6ds^2 - 2a^3przdyds + pprrzzds^2)}} = \cdots = \frac{afdx}{\sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffds^2)}}$$

$$aq = \frac{\sqrt{(a^6ds^2 - 2a^3przdyds + pprrzzds^2)}}{ads} = \cdots = \frac{a\sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffds^2)}}{ds}$$

$$u = \frac{\pm a^3rdy \mp prrzds - a^3dx\sqrt{(aa - rr)}}{\sqrt{(a^6ds^2 - 2a^3przdyds + pprrzzds^2)}} = \cdots = \frac{-ardy + frds - adx\sqrt{(aa - rr)}}{\sqrt{(a^2ds^2 - 2afdyds + ffds^2)}}$$

$$u:m = PG\left[\frac{xds}{dx}\right]:GL = \frac{a^4xds}{\pm a^3rdy \mp prrzds - a^3dx\sqrt{(aa-rr)}} = \frac{aaxds}{-ardy + frds - aax\sqrt{(aa-rr)}}$$

(e) Æquat. 5, $m\sqrt{(aa - nn)} + n\sqrt{(aa - mm)} = aadx:ds$, quadrando & transponendo, dabit $2mn\sqrt{(a^4 - a^2m^2 - a^2n^2 + m^2n^2)} = a^4dx^2 : ds^2 - a^2m^2 - a^2n^2 + 2m^2n^2$, & quadrando iterum $4a^4m^2n^2 - 4a^2m^4n^2 - 4a^2m^2n^4 + 4m^4n^4 = (a^4dx^2 : ds^2 - a^2m^2 - a^2n^2) + 4a^4m^2n^2dx^2:ds^2 - 4a^2m^4n^2 - 4a^2m^2n^4 + 4m^4n^4$ adeoque, demptis communibus, $(a^4dx^2:ds^2 - a^2m^2 - a^2n^2)^2 = 4a^4m^2n^2 - 4a^4m^2n^2dx^2:ds^2 = 4a^4m^2n^2(1 - dx^2:ds^2) = 4a^4m^2n^2(ds^2 - dx^2):ds^2 = 4a^4m^2n^2dy^2:ds^2$, & radice extracta, $a^4dx^2:ds^2 - a^2m^2 - a^2n^2 = 2a^2mndy:ds$, vel, quia ex Æquat. I. $n = przm:a^3$, $a^4dx^2:ds^2 - a^2m^2 - p^2r^2z^2m^2:a^4 = \pm 2przm^2dy:ads$, unde $m = a^3dx.(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + p^2r^2z^2ds^2)$, vel $m = a^4dx:\sqrt{(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + p^2r^2z^2ds^2)}$.

Et quoniam ex Æquat. 1, $n = przm:a^3$, est $n = aprzdx:\sqrt{(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + p^2r^2z^2ds^2)}$.

Et, quia Æquat. 2 dat $aq = a^3dx:mds$, habebitur $aq = \sqrt{(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + p^2r^2z^2ds^2)}:ads$.

Et, substituto pro m valore ejus $a^4dx:\sqrt{(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + p^2r^2z^2ds^2)}$, in Æquat. 6, $r\sqrt{(aa - mm)} - m\sqrt{(aa - rr)} = au$, prior terminus $r\sqrt{(aa - mm)}$ fit $r\sqrt{\left(aa - \frac{a^8dx^2}{a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + pprrzzds^2}\right)} = r\sqrt{(a^8ds^2 - a^8dx^2 \pm 2a^5przdyds + aapprrzzds^2)}:\sqrt{(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + pprrzzds^2)} = r\sqrt{(a^8dy^2 \pm 2a^5przdyds + aapprrzzds^2)}:\sqrt{(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + pprrzzds^2)} = r(a^4dy \pm aprzds):\sqrt{(a^6ds^2 \pm 2a^3przdyds + pprrzzds^2)}$; posterior vero terminus est $a^4dx\sqrt{(aa - rr)}:\sqrt{(a^6dy^2 \pm 2a^3przdyds + pprrzzds^2)}$. Igitur illorum summa divisa per a, quæ est $u = (a^3rdy \pm prrzds + a^3dx\sqrt{(aa - rr)}):\sqrt{(a^6dy^2 \pm 2a^3przdyds + pprrzzds^2)}$.

No. CIII. Ad inveniendam porro naturam curvæ, confiderandum eft, effe [NB. fHCD, fHCA, &c. defignant finus angulorum HCD, HCA, &c.]

Firm.fili AC : firm.fili CD $=f$HCD : fHCA
Firm.fili CD : firm.fili DE $=f$HDE : fHDC
Firm.fili DE : firm.fili EF $=f$IEF : fIED Ergo componendo
Firm.fili EF : firm.fili FG $=f$KFG : fKFE
Firm.fili FG : firm.fili GB $=f$LGB : fLGF

Firm.fili AC : firm.fili GB $=f$HCD, HDE, IEF, &c : fHCA, HDC, IED, &c.

$aa : \frac{prz}{a}$ = Prod. omn. fin. ang. finiftr: Prod. omn. fin. ang. dextror.

$= r.r.r.$ &c. : $r + \frac{ds\sqrt{(aa - rr)}}{z}$. &c.

Nam [*Fig.* 10] BG [a] : GV [$\sqrt{(aa - rr)}$] = BS [$\frac{ads}{z}$] : ST [$\frac{ds\sqrt{(aa - rr)}}{z}$], unde ST + TV, feu SV, finus anguli SGL, feu anguli dextri LGF $= r + ds\sqrt{(aa - rr)} : z$. Igitur Log. aa — Log. $\frac{prz}{a} = fl r - fl(r + \frac{ds\sqrt{(aa - rr)}}{z})$, atque Log. $\frac{prz}{a^3} = f(l(r + \frac{ds\sqrt{(aa - rr)}}{z}) - lr)$.

Ad reducendam æquationem, fiant duæ curvæ $\beta\pi$, $\delta\rho$, tales ut, exiftente $A\gamma = AG$, $\gamma\beta$ fit $= TV = r$, & $\gamma\delta = SV = r + ds\sqrt{(aa - rr)} : z$, adeoque $\beta\delta = ST = ds\sqrt{(aa - rr)} : z$. Ducantur rectæ $\beta\iota$, $\delta\eta$ parallelæ $A\gamma$, & fecantes Logarithmicam $\eta\iota$, in η & ι; erit $A\kappa$ = Log. $\kappa\iota$ vel $\gamma\beta$, & $A\theta$ = Log. $\theta\eta$ vel $\gamma\delta$, hoc eft, $A\kappa = lr$, & $A\theta = l(r + \frac{ds\sqrt{(aa - rr)}}{z})$, & $\theta\kappa$,

feu

seu $n = l(r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}) - lr$. Sed, [ex natura Logarith- No. CIII.
micæ], $ns[r] : n\lambda[a] = m[\frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}] : rs$, seu $l(r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}) - lr = \frac{ads\sqrt{(aa-rr)}}{rz}$. Quare Log. $\frac{prz}{a^3}$ $[= \int (l(r + \frac{ds\sqrt{(aa-rr)}}{z}) - lr)] = \int \frac{ads\sqrt{(aa-rr)}}{rz}$, & differentiando $prdz + pzdr + rzdp = pds\sqrt{(aa-rr)}$ (d), seu $prz = \int pds\sqrt{(aa-rr)} + a^3$, vel $\frac{prz}{a} - aa = \int \frac{pds\sqrt{(aa-rr)}}{a}$, hoc est, differentia firmitudinum fili in B & A, æqualis summæ tertiarum proportionalium ad GB, GV, & pds.

Notandum, si analysis instituatur resolvendo pds in motum horizontalem & verticalem (e), aliæ prodeunt æquationes; omnia enim M inveniuntur æquari $\frac{1}{a}\int(prdy + pdx\sqrt{(aa-rr)})$ & omnia N, $\frac{1}{a}\int(prdx - pdy\sqrt{(aa-rr)})$ (f). Unde fit

Vis

(d) Nam differ. Log. $\frac{prz}{a^3} = \frac{a.d(prz:a^3)}{prz:a^3} = \frac{a.d(prz)}{prz} =$ differ. $\int \frac{ads\sqrt{(aa-rr)}}{rz} = \frac{ads\sqrt{(aa-rr)}}{rz}$. Quare $\frac{a.d(prz)}{prz} = \frac{ads\sqrt{(aa-rr)}}{rz}$, vel $d(prz) = pds\sqrt{(aa-rr)}$.

(e) Quemadmodum factum est N°. XXXIX, Not. pag. 425.

(f) Est enim, per princ. Mech., potentia absoluta pds ad potent. horizontalem, & verticalem, in quovis curvæ puncto, ut sinus totus a ad sinum & cosinum anguli quem comprehendit directio GL potentiæ absolutæ cum linea verticali. Is autem angulus est differentia angulorum quos capit curvæ portiuncula GB cum directione GL & cum verticali. Horum angulorum sinus sunt r, & $ady : ds$, & differentiæ eorum sinus est $(r\sqrt{(a^2 - a^2dy^2 : ds^2)} - \frac{ady}{ds}\sqrt{(aa-rr)}) : a = (ar\sqrt{(ds^2-dy^2)} - ady\sqrt{(aa-rr)}) : ads = (rdx - dy\sqrt{(aa-rr)}) : ds$, cosinus vero

(ady

No. CIII. Vis in G: Vim in A — N $=$ Sin.APR: Sin.RPG

$$\frac{prz}{a} : aa - \frac{1}{a}\int(prdx - pdy\sqrt{(aa-rr)}) = ds : dy$$

nec non, Vis in G: Potentiam M $=$ Sin.APR: Sin.APG

$$\frac{prz}{a} : \frac{1}{a}\int(prdy + pdx\sqrt{(aa-rr)}) = ds : dx$$

Habemus igitur tres æquationes, per quarum semper singulas quæsitum invenire licet, quanquam plerumque facilius per unam quam per aliam

$$\text{I.} \quad prz = \frac{a^3 ds}{dy} - \frac{ds}{dy}\int(prdx - pdy\sqrt{(aa-rr)})$$

$$\text{II.} \quad prz = \frac{ds}{dx}\int(prdy + pdx\sqrt{(aa-rr)})$$

$$\text{III.} \quad prz = a^3 + \int(pds\sqrt{(aa-rr)})$$

Demonstratur id ita, $prz = a^3 + \int(pds\sqrt{(aa-rr)})$ hoc est, $\frac{prdyds}{ddx} = a^3 + \int(pds\sqrt{(aa-rr)})$, vel $prdyds = a^3 ddx + ddx\int(pds\sqrt{(aa-rr)})$, & $prdyds + pdxds\sqrt{(aa-rr)} = a^3 ddx + ddx\int(pds\sqrt{(aa-rr)}) + pdxds\sqrt{(aa-rr)}$, & integrando $ds\int(prdy + pdx\sqrt{(aa-rr)}) = a^3 dx + dx\int(pds\sqrt{(aa-rr)})$, vel $\frac{ds}{dx}\int(prdy + pdx\sqrt{(aa-rr)}) = a^3 + \int(pds\sqrt{(aa-rr)}) = prz$. Q. E. D.

Appli-

$(\frac{ady}{ds}r + \sqrt{(aa - aady^2 : ds^2)}\sqrt{(aa - rr)}) : a = (rdy + \sqrt{(dy^2 - ds^2)}\sqrt{(aa-rr)}) : ds = (rdy + dx\sqrt{(aa-rr)}) : ds$. Igitur Sin. tot. $a : \frac{rdx - dy\sqrt{(aa-rr)}}{ds} = pds : \frac{prdx - pdy\sqrt{(aa-rr)}}{a} =$ potentiæ horizontali, & Sin. tot. $a : \frac{rdy + dx\sqrt{(aa-rr)}}{ds} = pds : \frac{prdy + pdx\sqrt{(aa-rr)}}{a} =$ potentiæ verticali.

Applicatio.

I. Si $r = a$, quem casum motus fluidorum observat (5), habetur, per tertiam æquationem,

$$\begin{aligned} pz &= aa \\ \frac{p\,dx\,ds}{-ddy} &= aa \\ pdxds &= -aaddy \\ ds\int pdx &= aads - aady \\ aady &= aads - ds\int pdx \\ a^4dy^2 &= (aa - \int pdx)^2 \times (dx^2 + dy^2) \\ (a^4 - (aa - \int pdx)^2)dy^2 &= (aa - \int pdx)^2 dx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pz &= aa \\ \frac{pdyds}{ddx} &= aa \\ pdyds &= aaddx \\ ds\int pdy &= aadx \\ a^4dx^2 &= (dx^2 + dy^2)(\int pdy)^2 \\ (a^4 - (\int pdy)^2)dx^2 &= dy^2(\int pdy)^2, \\ dx &= \frac{dy\int pdy}{\sqrt{(a^4 - (\int pdy)^2)}} \end{aligned}$$

$$dy = \frac{(aa - \int pdx)dx}{\sqrt{(a^4 - (aa - \int pdx)^2)}}$$

$$dy = \frac{(aa - \int pdx)\,dx}{\sqrt{(2aa\int pdx - (\int pdx)^2)}}$$

Intelligimus ubique per $\int pdx$, vel $\int pdy$, omnia pdx, aut pdy pertinentia ad partem curvæ inferiorem AG.

Sit ex gr. Curva lintei, ubi $p = \text{QW} = b - x = v$, erit $\int pdx = -\int vdv = \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}vv$, unde, posito $aa = \frac{1}{2}bb$, erit $dy = (aa - \int pdx)\,dx : \sqrt{(2aa\int pdx - (\int pdx)^2)} = -vvdv : \sqrt{(b^4 - v^4)}$, nempe Elastica.

Sit deinde $p = a$, erit $\int pdy = ay$, unde $dx = dy\int pdy : \sqrt{(a^4 - (\int pdy)^2)} = aydy : \sqrt{(a^4 - aayy)} = ydy : \sqrt{(aa - yy)}$, & facta summatione, $x = a - \sqrt{(aa - yy)}$, seu $yy = 2ax - xx$, unde constat curvam quæsitam esse circulum.

Quod si p detur per plures simul indeterminatas, ut si sit $p =$

(5) Quia, nempe, pressio fluidi exercetur secundum perpendicularem.

No. CIII. $ady^2 : ds^2$, quemadmodum fit in Velaria ([h]), æquationes repertæ $dy = (aa - \int pdx)\, dx : \sqrt{(2aa\int pdx - (\int pdx)^2)}$ & $dx = dy\int pdy : \sqrt{(a^4 - (\int pdy)^2)}$ nihil prodesse possunt: quare anteriorum aliqua sumenda, puta $pdyds = aaddx$, hoc est, $(ady^2 : ds^2) \times dyds = aaddx$, seu $dy^3 = adsddx$, eaque resolvatur, ponendo $tdy = adx$, &c. ([i]); unde fit $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$, nempe Funicularia.

II. Si ponatur $r = ady : ds$, quem casum observant omnis generis Funiculariæ, in quibus directiones ponderum, tum inter se, tum axi AW parallelæ sunt; habetur, per primam Æquationem, $pzdy : ds = aads : dy$ ([k]), & per tertiam $pzdy : ds = aa + \int pdx$; unde fit $aads : dy = aa + \int pdx$; $aads = aady + dy\int pdx$; $aads = (aa + \int pdx)\, dy$; $a^4ds^2 = (aa + \int pdx)^2\, dy^2$; $a^4dx^2 + a^4dy^2 = (aa + \int pdx)^2\, dy^2$; $((aa + \int pdx)^2 - a^4)\, dy^2 = a^4dx^2$; & $dy = aadx : \sqrt{(2aa\int pdx + (\int pdx)^2)}$.

Si p detur per y, ponatur $adx = tdy$, $aadx^2 = ttdy^2$, $aads^2 = (aa + tt)\, dy^2$; $ads = dy\sqrt{(aa + tt)}$; $pdx = ptdy : a$; unde loco $aads = aady + dy\int pdx$, habemus $ady\sqrt{(aa + tt)} = aady + dy\int(ptdy : a)$; $a\sqrt{(aa + tt)} = aa + \int(ptdy : a)$; $atdt : \sqrt{(aa + tt)} = ptdy : a$; $aadt : \sqrt{(aa + tt)} = pdy$; $\int pdy = \int(aadt : \sqrt{(aa + tt)})$ = sectori hyperbolico, cujus applicata t.

Si p detur per s, differentietur $aads : dy = aa + \int pdx$, habebitur

([h]) Vide N[i]. XLVIII, Notam e., pag. 445.

([i]) $adx = tdy$ dat $ads = [a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}] = dy\sqrt{(aa + tt)}$, cujus differentiale $ddy\sqrt{(aa + tt)} + tdtdy : \sqrt{(aa + tt)}$ debet esse constans, propter ds constantem. Ergo $ddy = -tdtdy : (aa + tt)$ & $addx\, [= tddy + dtdy] = -ttdtdy : (aa + tt) + dtdy = aadtdy : (aa + tt)$, atque $dy^3\, [= adsddx] = adtdy^2 : \sqrt{(aa + tt)}$, vel $dy\, [= adx : t] = adt : \sqrt{(aa + tt)}$, unde fit $dx = tdt : \sqrt{(aa + tt)}$, & integrando $x = \sqrt{(aa + tt)}$ vel $xx - aa = tt = aadx^2 : dy^2$, ac tandem $dy^2 = aadx^2 : (xx - aa)$, vel $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$.

([k]) Evanescit enim terminus $\int(prdx - pdy\sqrt{(aa - rr)})$. Nam $\sqrt{(aa - rr)} = \sqrt{(aa - aady^2 : ds^2)} = \frac{a}{ds}\sqrt{(ds^2 - dy^2)} = adx : ds$. Igitur $prdx - pdy\sqrt{(aa - rr)} = padydx : ds - padxdy : ds = 0$.

tur $- aadsddy : dy^2 = pdx$; ponatur $ady = tds$, & invenietur $- a^4 dt : tt\sqrt{(aa - tt)} = pds$ [l], & $\int pds = aa\sqrt{(aa - tt)} : t$; ideoque $t = a^3 : \sqrt{(a^4 + (\int pds)^2)}$ & $dy = aads : \sqrt{(a^4 + (\int pds)^2)}$, quæ eadem eſt cum figura lintei ABCD [*Fig.* 10] Vid. *NB.* paginæ 1047. Unde ſequitur, ſive velum latitudinis inæqualis BC a vento inflectur, ſive funis gravetur ponderibus ipſis BC proportionalibus, curvaturam utrinque eandem fore.

III. Si p & r dantur per s, habetur, per tertiam Æquationem, univerſaliter $prdyds : ddx = a^3 + \int(pds\sqrt{(aa - rr)})$. Pone $adx = tds$, $addx = dtds$; $aadx^2 = ttds^2 = ttdx^2 + ttdy^2$; $(aa - tt)dx^2 = ttdy^2$; $dy = dx\sqrt{(aa - tt)} : t = ds\sqrt{(aa - tt)} : a$, & $dyds : ddx = ds\sqrt{(aa - tt)} : dt$; unde $prdyds : ddx = prds\sqrt{(aa - tt)} : dt = a^3 + \int(pds\sqrt{(aa - rr)})$, tandemque $prds : (a^3 + \int pds\sqrt{(aa - rr)}) = dt\sqrt{(aa - tt)}$; quare t invenietur per s, indeque & $x = \int tds : a$, & $y = \int ds\sqrt{(aa - tt)} : a$ per s.

Habita natura curvæ, habentur & m, n, aq, u & GL, per æquationes pag. 1039., nempe

I. Si $r = a$, erit [m]

[l] Ex $ady = tds$, fluunt $addy = dtds$, & $dx = \sqrt{(ds^2 - dy^3)} = ds\sqrt{(aa - tt)} : a$; quibus ſubſtitutis, æquatio $- aadsddy : dy^2 = pdx$, mutatur in $- a^3 dt : tt = pds\sqrt{(aa - tt)} : a$, vel in $- a^4 dt : tt\sqrt{(aa - tt)} = pds$.

[m] Ubi $r = a$, eſt $pz = aa$ [pag. 1043.] & $aaf = prz = a^3$, atque $f = a$. Igitur m vel n, quod eſt æquale $aadx$ vel $afdx$ diviſ. per $\sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffds^2)}$ [pag. 1039.] $= aadx : \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds)} =$ [quia $aady = aads - ds\int pdx$, ac conſequenter $aadx = ds\sqrt{(2aa\int pdx - (\int pdx)^2)}$] $= ds\sqrt{(2aa\int pdx - (\int pdx)^2)} : \sqrt{(2aads^2 - 2aads^2 + 2ds^2\int pdx)} = \sqrt{(2aa\int pdx - (\int pdx)^2)} : \sqrt{2\int pdx} = \sqrt{(aa - \frac{1}{2}\int pdx)}$.

Vel quoniam $aadx = ds\int pdy$, & conſequenter $aady = ds\sqrt{(a^4 - (\int pdy)^2)}$, erit m vel $n =$ [$aadx : \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds)} =$] $ds\int pdy : \sqrt{(2aads^2 - 2ds^2\sqrt{(a^4 - (\int pdy)^2)})} = \int pdy : \sqrt{(2aa - 2\sqrt{(a^4 - (\int pdy)^2)})} = \int pdy : (\sqrt{(aa + \int pdy)} - \sqrt{(aa - \int pdy)})$.

Iiſdem poſitis $aq = a\sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffds^2)} : ds = a\sqrt{(2aads^2 - 2aadyds)} : ds =$ [ſcribendo $aads - ds\int pdx$ pro $aady$] $a\sqrt{(2aads^2 - 2aads^2}$

No. CIII. m vel $n = \sqrt{(aa - \frac{1}{2}\int p dx)} = \int p dy : (\sqrt{(aa + \int p dy)} - \sqrt{(aa - \int p dy)})$
$aq = a\sqrt{2\int p dx} = a\sqrt{(aa + \int p dy)} - a\sqrt{(aa - \int p dy)}$
$u = \sqrt{\frac{1}{2}\int p dx} = \frac{1}{2}\sqrt{(aa + \int p dy)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa - \int p dy)}$
$GL = aax : \int p dx = aax : (aa - \sqrt{(a^4 - (\int p dy)^2)}$.
Firmitas fili in B $= aa$

II. Si $r = ady : ds$, erit (n) poſito nempe $\int p dy = \int(aadt : \sqrt{(aa + tt)})$]

m =

$- 2aads^2 + 2ds^2 \int p dx) : ds = a\sqrt{(2\int p dx)}$, vel, ſcribendo $ds\sqrt{(a^4 - (\int p dy)^2)}$ pro $aady$, $aq = a\sqrt{(2aa - 2\sqrt{(a^4 - (\int p dy)^2)})} = a\sqrt{(aa + \int p dy)} - a\sqrt{(aa - \int p dy)}$.

Sed u, propter $f = a$, & $r = a$, ideoque $\sqrt{(aa - rr)} = 0$, reducitur ad $(-aady + aads) : \sqrt{(2a^2 ds^2 - 2aadyds)} = \sqrt{(aads - aady)} : \sqrt{2ds}$, vel pro $aady$ ſcribendo $aads - ds\int p dx$, ad $\sqrt{\frac{1}{2}\int p dx}$; aut pro $aady$ ſcribendo $ds\sqrt{(a^4 - (\int p dy)^2)}$, ad $\sqrt{(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - (\int p dy)^2)})} = \frac{1}{2}\sqrt{(aa + \int p dy)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa - \int p dy)}$.

Et GL, quod eſt $= aaxds : (-aady + aads)$; fiet, [ſi ſcribas $aads - ds\int p dx$ pro $aady$] $= aax : \int p dx$, vel [ſi ſcribas $ds\sqrt{(a^4 - (\int p dy)^2)}$ pro $aady$] $= aax : (aa - \sqrt{(a^4 - (\int p dy)^2)}$.

(n) Ubi $r = ady : ds$, evaneſcit terminus ultimus Æq. I. $prz = a^3 ds : dy - \frac{ds}{dy}\int(prdx - pdq\sqrt{(aa - rr)})$. Vid. Not. k, pag. 1044. atque ideo fit $aaf = prz = a^3 ds : dy$. Ergo $f = ads : dy$. Igitur $\sqrt{(aads^2 - 2afdyds + ffds^2)} = \sqrt{(aads^2 - 2aads^2 + aads^4 : dy^2)} = \frac{ads}{dy}\sqrt{(ds^2 - dy^2)} = adsdx : dy$.

Quo poſito, $m = [aadx : \sqrt{(aads^2}$ &c.$] = aadx : (adsdx : dy) = ady : ds$. Sed [pag. 1044 lin. 12.] habebatur $aads : dy = aa + \int p dx$. Ergo $m = a^3 : (aa + \int p dx) = aa : \sqrt{(aa + tt)}$ quoniam $a\sqrt{(aa + tt)} = aa + \int p t dy : a = aa + \int p dx$.

Verum $n = [afdx : \sqrt{(aads^2}$ &c.$)] = \frac{aadsdx : dy}{adsdx : dy} = a$.

Sed $aq = [a\sqrt{(aads^2}$ &c.$) : ds] = \frac{aadsdx : dy}{ds} = \frac{aadx}{dy} = \sqrt{(2a\int p dx + (\int p dx)^2)} =$ [quia $dx : dy = t : a$] at.

Eſt autem $u = -ardy + frds - adx\sqrt{(aa - rr)}$ diviſum per $\sqrt{(aads^2}$ &c.). Sed $-ardy = -aady^2 : ds$, & $frds = aads$ & $-adx\sqrt{(aa - rr)} = -aadx^2 : ds$. Horum ſumma eſt $aa(ds - (dy^2 + dx^2) : ds) = aa(ds - ds) = 0$. Igitur $u = 0$.

Atqui $GL = aaxds : (-ardy + frds - adx\sqrt{(aa - rr)}) = aaxds : 0 = \infty$.

Firmitas autem fili in B, quæ eſt

prz :

No. CIII.

$$m = a^3 : (aa + \int p\,dx) = aa : \sqrt{(aa + tt)}$$
$$n = a \qquad\qquad = a$$
$$aq = \sqrt{(2aa\int p\,dx + (\int p\,dx)^2)} = at$$
$$u = 0 \qquad\qquad = 0$$
$$GL = \infty \qquad\qquad = \infty$$

Firmitas fili in B $= aa + \int p\,dx = a\sqrt{(aa + tt)}$

III. Si p & r dantur per s (°), erit [posito videlicet $f = a + \int p\,ds\sqrt{(aa - rr)} : aa$ & $dt : \sqrt{(aa - tt)} = prds : aaf = ds : z$]

$$m = at : \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$
$$n = ft : \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$
$$aq = \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$
$$u = (fr - r\sqrt{(aa - tt)} - t\sqrt{(aa - rr)}) : \sqrt{(aa - 2f\sqrt{(aa - tt)} + ff)}$$
$$GL = aax : (fr - r\sqrt{(aa - tt)} - t\sqrt{(aa - rr)})$$

NB. Si linteum sit inæqualis latitudinis B C [*Fig.* 10], ita quidem ut B C ad longitudinem A B relationem datam habeat quamcunque ; ejus a vento inflati curvatura A G sic invenitur. Quia potentia P tendens filum in puncto G componitur ex ratione simplici latitudinis fili BC, seu g, & duplicata elementi dy, erit $p = gdy^2 : ds^2$ (p), unde $pz = gzdy^2 : ds^2 = aa$ (q) ; $gds^3dy^2 : dyddxds^2 = aa$ (r) ; $gdsdy = aaddx$, $dy\int gds = aadx$, $dy^2(\int gds)^2 = a^4dx^2$. Ergo $(a^4 + (\int gds)^2)\,dy^2 = a^4ds^2$, unde $dy = aads : \sqrt{(a^4 + (\int gds)^2)}$, & $dx = ds\int gds : \sqrt{(a^4 + (\int gds)^2)}$. Ponatur $bb = \sqrt{(a^4 + (\int gds)^2)}$, & invenietur (s) m vel $n = a^3\int gds : b\sqrt{(2bb - 2aa)}$,

$prz : a = af = aads : dy = aa + \int p\,dx = a\sqrt{(aa + tt)}$.

(°) In æquationibus pag. 1039., pro dy scribe $ds\sqrt{(aa - tt)} : a$, & pro dx, scribe $tds : a$ [Vide pag. 1045. lin. 10 & 11.] & habebis æquationes quas hic affert Noster.

(p) Per Notam e, N[i]. XLVIII, pag. 445.

(q) Quia $r = a$. Vid. pag. 1043. lin. 2.

(r) Positis nempe dy constantibus, est $z = ds^3 : dyddx$.

(s) Propter $r = a$ est etiam $f = a$ [Not. m]. Igitur m vel $n = aadx : \sqrt{(2aads^2 - 2aadyds)} =$

[scri-

No. CIII. $-2aa)$, $aq = aa\sqrt{(2hh - 2aa)} : h$, $u = \sqrt{(\frac{1}{2}hh - \frac{1}{2}aa)} : h$; & $GL = hhx : (hh - aa)$.

Notandum hic occurrit $\int(dy : \int g\,ds) = Max.$, & $\int(dx\int g\,ds) = Max.$ ([f]) Et quia firmitas lintei in G ſecundum totam latitudinem ~~AD~~ BC accepti eſt æqualis firmitati ejus in A ſecundum latitudinem AD; ſequitur unius fili firmitatem in G, ad unius fili firmitatem in A eſſe reciproce ut AD ad BC.

[ſcribendo $ds\int g\,ds : hh$ pro dx, & $aads : hh$ pro dy] $= a^4 ds\int g\,ds : hh\sqrt{(2aads^2 - 2a^4ds^2 : hh)} = a^3\int gds : h\sqrt{(2hh - 2aa)}$. Et $aq = a\sqrt{(2aads^2 - 2a^4ds^2 : hh)} : ds = aa\sqrt{(2hh - 2aa)} : h$. Sed $u = (-ardy + frds - adx\sqrt{(aa - rr)} : \sqrt{(2aads^2 - 2a^4ds^2 : hh)} = (-a^4ds : hh + aads - 0) : \sqrt{(2aads^2 - 2a^4ds^2 : hh)} = a\sqrt{(\frac{1}{2}hh - \frac{1}{2}aa)} : h$. Atque $GL = aaxds : (-ardy + frds - adx\sqrt{(aa - rr)}) = aaxds : (-a^4ds : hh + aads) = hhx : (hh - aa)$.

([f]) Per N[i]. XCIII Tabellam; lin. 17. curva cujus æquatio eſt $dy = qdt : \sqrt{(aa + qq)}$, Maximum habet $\int qdy$, quod N°. XCVI, Probl. II. demonſtratur. Interpretemur dt per ds, & q per $\int a^3 : \int gds$, & curvæ, quæ maximum præbet $\int(a^3dy : \int gds)$ vel $\int(dy : \int gds)$, æquatio eſt $dy = \frac{a^3ds : \int gds}{\sqrt{(aa + a^6 : (\int gds)^2)}} = \frac{aads}{\sqrt{(a^4 + (\int gds)^2)}}$, qualis eſt curva lintei hic exhibita. Interpretemur rurſus dy per dx, dt per ds, & q per $\int gds : a$; & curvæ, quæ Maximum habet $\int(dx\int gds : a)$ vel $\int(dx\int gds)$, æquatio eſt $dx = \frac{ds\int gds : a}{\sqrt{(aa + (\int gds)^2 : aa)}} = \frac{ds\int gds}{\sqrt{(a^4 + (\int gds)^2)}}$, qualis etiam hic occurrit.

ARTI-

ARTICUL. XII.

No. CIII.

Æ*quationem* $dy = ayx^m dx + by^r x^v dx$ *construere, saltem per quadraturas*; hoc est, *separare in illa litteras indeterminatas cum suis differentialibus a se invicem.* (*)

LEMMA.

Posito ls significare logarithmum quantitatis s; & Ncx^p quantitatis cx^p, spectatæ instar logarithmi, numerum, erit diff. $Ncx^p = cpx^{p-1}\, Ncx^p . dx$.

Nam sit $s = Ncx^p$, erit $ls = cx^p$, & $dls = [ds : s =] cpx^{p-1}dx$, & $ds = [dNcx^p =] cpx^{p-1}sdx = cpx^{p-1} . Ncx^p . dx$.

ANALYSIS.

Sit jam $y = t . Ncx^p$, unde $dy = Ncx^p . dt + t\,dNcx^p = Ncx^p dt + cptx^{p-1} . Ncx^p . dx = by^r x^v dx + ayx^m dx = bt^r x^v (Ncx^p)^r dx + atx^m . Ncx^p\, dx$. Ponantur membra postrema $cptx^{p-1} . Ncx^p . dx$, & $atx^m . Ncx^p . dx$ se destruere, ut fiat $p = m + 1$, & $c = a : p = a : (m + 1)$, & reliqua adæquentur sibi invicem, erit $Ncx^p . dt = bt^r x^v . (Ncx^p)^r dx$; hoc est, $dt : t^r = bx^v . (Ncx^p)^{r-1} . dx = bx^v . N(c . (r-1) x^p) dx = bx^v . N(\frac{a(r-1)}{m+1} x^{m+1}) dx$; & integrando $\pm g - 1 : (r-1) t^{r-1} = \int(bx^v . N(\frac{a(r-1)}{m+1} x^{m+1}) dx)$, seu $\pm (r-1) gt^{r-1} - 1 = (r-1) t^{r-1} \int(bx^v$ &c.$)$, seu $(r-1) t^{r-1} \times (g - \int(bx^v$ &c.$)) = 1$, seu $t^{r-1} = 1 : (r-1) \times (g - \int(bx^v$ &c.$))$, seu

(*) Conf. N^i. LXXII, pag. 731, & LXXVII, pag. 782.

No. CIII. seu denique $t = 1 : \sqrt[r-1]{((r-1)\times(g - \int(bx^v.\ N(\frac{a(r-1)}{m+1}x^{m+1})}$ $dx))$; adeoque $y = t \times N(\frac{a}{m+1}x^{m+1}) = N(\frac{a}{m+1}x^{m+1}) : \sqrt[r-1]{(r-1)\times(g - \int(bx^v.\ N(\frac{a(r-1)}{m+1}x^{m+1})\,dx))}$.

A L I T E R.

Si m *&* r = o, *hoc est, si* ady = ydx + bx^{u}dx, *&* u *numerus integer.*

Fiat $y + bx^u = t$, seu $y = t - bx^u$, erit $ady = adt - abux^{u-1}dx = tdx$ hoc est, $adt = tdx + abux^{u-1}dx$

Fiat $t + abux^{u-1} = s$ - - - - erit $adt = ads - aabu(u-1)x^{u-2}dx = sdx$ hoc est, $ads = sdx + aabu(u-1)x^{u-2}dx$

Fiat $s + a^2bu(u-1)x^{u-2} = z$ - - erit
$ads = adz - a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3}dx = zdx$
hoc est, $adz = zdx + a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3}dx$

Fiat $z + a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3} = p$ - - erit
$adz = adp - a^4bu(u-1)(u-2)(u-3)x^{u-4}dx = pdx$
hoc est, $adp = pdx + a^4bu(u-1)(u-2)(u-3)x^{u-4}dx$.

hoc est, si ponamus $u = 4$, $adp = pdx + 4.3.2.1.a^4bdx$, seu $dx = adp : (p + 4.3.2.1.a^4b)$.

Sed $p = z + a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3} = s + a^2bu(u-1)x^{u-2} + a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3} = t + abux^{u-1} + a^2bu(u-1)x^{u-2} + a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3} = y + bx^u + abux^{u-1} + a^2bu(u-1)x^{u-2} + a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3}$, adeoque $y = p - bx^u - abux^{u-1} - a^2bu(u-1)x^{u-2} - a^3bu(u-1)(u-2)x^{u-3}$, &c..., $-a^{u-1}bu(u-1)(u-2)\ldots 2.x$; & ita

& ita si $u=4$, erit $y = p - bx^4 - 4abx^3 - 3.4a^2bx^2$ No. CIII.
$- 2.3.4a^3bx$. ([b]).

Aliter.

Sit $y = p - ex - fx^2 - gx^3 - hx^4$, &c. erit $[ady =]\ adp - aedx - 2afxdx - 3agxxdx - 4ahx^3dx$ &c. $= pdx - exdx - fx^2dx - gx^3dx - hx^4dx$, &c. $+ bx^udx = [ydx + bx^udx]$. Ponantur ita

$$ady = adp - aedx - 2afxdx - 3agx^2dx - 4ahx^3dx \text{ \&c.}$$
$$-ydx = \ldots - pdx + exdx + fx^2dx + gx^3dx + hx^4dx \text{ \&c.}$$
$$-bx^udx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - bx_udx$$

Positoque $u = 4$, collatisque terminis similibus, $h = b$; $g = 4ah = 4ab$; $f = 3ag = 3.4a^2b$; $e = 2af = 2.3.4a^3b$; unde erit $adp = pdx + aedx$, seu $dx = adp:(p+ae)$; atque $y = p - 2.3.4a^3bx - 3.4a^2bx^2 - 4abx^3 - bx^4$.

Nota 1°. Etiamsi nec m, nec r sit $=0$, potest nihilominus æquatio ad hanc formulam $ady = ydx + bx^udx$ reduci ([c]), adeoque per posteriorem modum resolvi, hoc modo. Pone $x^{m+1} = t$, fiet $x^mdx = dt:(1+m)$, & $x^udx = \frac{1}{1+m}t^{(u-m):(m+1)}dt$.

Pone iterum $y = z^{1:(1-r)}$, & invenies $dz = \frac{a(1-r)}{1+m}zdt + \frac{b(1-r)}{1+m}t^{(u-m):(m+1)}dt$, quæ ejusdem est formulæ cum $ady = ydx + bx^udx$; quare si $(u-m):(m+1)$ numerus est integer, &c.

2°. Omnis æquatio similis huic $ady = y^qdx + y^rx^udx$ potest reduci ad hanc formulam $ady = yydx + y^rx^udx$. Sit enim $y = z^h$, erit $dy = hz^{h-1}dz$, & $y^q = z^{hq}$, & $y^r = z^{hr}$; adeoque $ahz^{h-1}dz = z^{hq}dx + z^{hr}x^udx$, seu $adz = \frac{1}{h}z^{hq-h+1}dx$

([b]) Atque hinc fluit constructio N[i]. LXXII, pag. 734.
([c]) Vide N[i]. LXXII Notam a, pag. 732.

No.CIII. $+\frac{1}{h}z^{hr-h+1}x^n dx$; positoque $hq - h + 1 = 2$, ut sit $h = 1:(q-1)$, fiet $adz:(q-1) = zzdx + z^{(r+q-2):(q-1)}x^n dx$. Quare si in hac ultima separari possunt indeterminatæ, poterunt etiam separari in proposita ([d]).

3°. Problema ita potest proponi aliter [*Fig.* 11]. Data quavis curva AB [Ab], seu geometrica, seu mechanica, seu libera tantum manu formata [non tamen linea recta, ut BEAUNIUS supponit in Problemate quod CARTESIO proposuit] invenire lineam CD, cujus applicata DE ad subtangentem eam habeat rationem quam habet constans quædam ad DB vel Db. ([e])

4°. Si sit $dy = adx + ydx:x + byydx:xx + cy^3dx:x^3 + ey^4dx:x^4$ &c. Posito $y = xz$, erit $xdz + zdx = adx + zdx + bzzdx + cz^3dx + ez^4dx$ &c. hoc est $dz = adx:x + bzzdx:x + cz^3dx:x + ez^4dx:x$ &c., hoc est $dz:(a + bzz + cz^3 + ez^4$ &c.$) = dx:x$ ([f]).

Pro-

([d]) Vide pag. seq. tentamen solutionis æquationis $dy = yydx + x^n dx$, quæ istius $dy = yydx + y^r x^n dx$ casus est. Non potuit autem æquatio $ady = y^q dx + y^r x^n dx$ reduci ad præcedentem $ady = ydx + by^r x^n dx$. Poni enim debuisset $hq - h + 1 = 1$, id quod dedisset $h = 0$, & $y = z^h = 1$.

([e]) Vide Num. LXXII, pag. 731, 732.

([f]) Sit $a + bzz + cz^3 + ez^4 +$ &c. $= (\alpha \pm z).(\beta \pm z).(\gamma \pm z).(\varepsilon \pm z)$ &c., & $dx:x = dz:(a \pm bzz \pm cz^3 \pm ez^4 \pm$ &c.$)$ reduci poterit ad $dx:x = Adz:(\alpha \pm z) + Bdz:(\beta \pm z) + Cdz:(\gamma \pm z) + Edz:(\varepsilon \pm z) \pm$ &c. atque integrando, $la^n + lx = Al(\alpha \pm z) + Bl(\beta \pm z) + Cl(\gamma \pm z) + El(\varepsilon \pm z)$ &c. aut $a^n x = (\alpha \pm z)^A.(\beta \pm z)^B.(\gamma \pm z)^C.(\varepsilon \pm z)^E$. &c. Exponentium A, B, C, E, determinatio non est difficilis. Sit enim $\frac{1}{(\alpha \pm z).(\beta \pm z).(\gamma \pm z).(\varepsilon \pm z)\text{\&c.}} = \frac{A}{\alpha \pm z} + \frac{B}{\beta \pm z} + \frac{C}{\gamma \pm z} + \frac{E}{\varepsilon \pm z} +$ &c., & multiplicando per $\alpha \pm z$, erit . . . $\frac{1}{(\beta \pm z).(\gamma \pm z).(\varepsilon \pm z)\text{\&c.}} = A + B\frac{\alpha \pm z}{\beta \pm z} + C\frac{\alpha \pm z}{\gamma \pm z} + E\frac{\alpha \pm z}{\varepsilon \pm z} +$&c. Finge nunc $z = -\alpha$, ut sit $\alpha + z = 0$. erit;

Propositio principalis aliter.

$dy = ydx + bx^u dx$. Pone $y = pq$, erit $dy = pdq + qdp = pqdx + bx^u dx$. Pone $pdq = pqdx$, unde $dq : q = dx$, & $lq = x$, & $q = Nx$; unde $Nxdp = qdp = bx^u dx$; adeoque $dp = bx^u dx : Nx$, & $p = \int(bx^u dx : Nx)$, & $y = pq = Nx\int(bx^u dx : Nx)$ ([g]).

Tentamen resolutionis Æquationis

$$dy = yydx + x^u dx$$

Fiat $y = pq$, erit $dy = pdq + qdp = p^2q^2dx + x^u dx$. Pone $pdq = p^2q^2dx$, erit $dq : q^2 = pdx$, & $-1 : q = \int pdx$; $q = -1 : \int pdx$; ac $-dp : \int pdx = x^u dx$. Pone $z = \int pdx$; $dz = pdx$; $dz : dx = p$; $ddz : dx = dp$; $-ddz : zdx = -dp : \int pdx = x^u dx$; $-ddz : z = x^u dx^2$. Si generaliter $z^r ddz = x^u dx^2$, fiat hoc modo, $z = ax^m$; $dz = amx^{m-1}dx$; $ddz = (amm - am)x^{m-2}dx^2$; $a^r(amm - am)x^{rm+m-2}dx^2 = z^r ddz = x^u dx^2$. Ergo $u = rm + m - 2$, $m = (u+2) : (r+1)$; $a^{r+1}(mm - m) = 1$, &c. ([h]). Si sit generaliter $z^r dz^s ddz = x^u dx^3$, erit $a^{r+s+1}(m^{s+2} - m^{s+1})x^{rm+sm+m-s-2}dx^3 = x^u dx^3$.

Posito $z = Nx$, erit $ddz : z = dx^2$.

Aliter.

eritque $\left[\frac{1}{(\beta+z).(\gamma+z).(\delta+z)\&c.} =\right] \frac{1}{(\beta-\alpha).(\gamma-\alpha).(\delta-\alpha)\&c.} = A$. Et pariter, multiplicando primam æquationem per $\beta+z$, & fingendo $z = -\beta$, invenies $\frac{1}{(\alpha-\beta).(\gamma-\beta).(\delta-\beta)\&c.} = B$, &c. Vide quæ de hoc argumento scripsere Viri Cl. LEIBNITIUS, *Joh.* BERNOULLIUS, in *Act. Erud.* 1702, p. 210, & 1703, pag. 19. seq. atque MOIVREUS in *Miscell. Analyt.* Lib. II.

(g) Vid. N°. LXXII, pag. 733, Nota b.

(h) Sed in casu proposito, ubi $z^r dz = dz : z = z^{-1}dz$, est $r = -1$; adeoque $r+1 = 0$ & $m = (u+2) : (r+1) = \infty$. Methodus itaque non succedit.

No. CIII.

Aliter.

Pone $y = -1 : lz$, erit $[dy =] dz : z(lz)^2 = dx : (lz)^2 + x^n dx = [yydx + x^n dx]$; hoc est, $dz = zdx + z(lz)^2 x^n dx$ (i).

Aliter.

Pone iterum $dz : z = dt$ (k), erit $dt = dx + ttx^n dx$.

In æquatione $dy = yydx + xxdx$, vel $-ddz : z = xxdx^2$; si ponatur $z = 1 - ax^4 + bx^8 - cx^{12} + ex^{16} - fx^{20}$ &c. invenitur $y = -dz : zdx = \left(+\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3.4.7} + \frac{x^{11}}{3.4.7.8.11} - \frac{x^{15}}{3.4.7.8.11.12.15} + \frac{x^{19}}{3.4.7.8.11.12.15.16.19} \text{ \&c.}\right) : \left(+1 - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} - \frac{x^{12}}{3.4.7.8.11.12} + \frac{x^{16}}{3.4.7.8.11.12.15.16} \text{ \&c.}\right)$, seu $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3^2.7} + \frac{2x^{11}}{3^3.7.11} + \frac{13x^{15}}{3^4.5.7.7.11}$ &c. (l)

(i) Sed quo ducat hæc transmutatio, non video.

(k) Vel $y = -1 : t$, & $yy = 1 : tt$, ac $dy = dt : tt$. His enim substitutis, abit æquatio $dy = yydx + x^n dx$, in hanc $dt = dx + ttx^n dx$.

(l) Semper facile est valorem ipsius y invenire per Seriem infinitam; & hunc in finem plures dederunt methodos Analystæ. V.gr. quoniam æquationis $dy = xxdx$ integrale esset $y = \frac{1}{3}x^3$, pone $y = \frac{1}{3}x^3 + p$, & $dy = xxdx + dp$, atque $yy = \frac{1}{9}x^6 + \frac{2}{3}px^3 + pp$; quibus substitutis, æquatio $dy = yydx + xxdx$ mutatur in $dp = \frac{1}{9}x^6 dx + \frac{2}{3}px^3 dx + ppdx$. Pone $p = \frac{1}{3^2.7}x^7 + q$, & substitutione facta habebis $dq = \frac{2}{3^3.7}x^{10}dx + \frac{1}{3^4.7^2}x^{14}dx + \frac{2}{3}qx^3 dx + \frac{2}{3^2.7}qx^7 dx + qqdx$. Pone itaque $q = \frac{2}{3^3.7.11}x^{11} + r$ &c. Igitur $y = \frac{1}{3}xx + \frac{1}{3^2.7}x^7 + \frac{2}{3^3.7.11}x^{11}$ &c.

Ast quæritur æquationis Solutio in terminis finitis. Eandem, multo post fata Auctoris, proposuit Cel. Com. RICCATUS, in *Act. Lips. supp.* Tom. VIII, pag. 72, quærens a Geometris quomodo in æq. $x^m dq = du + uudx : q$, dato ad libitum exponente

nente m, & facto $q = x^n$, determinandus ſit valor exponentis n, ut ſuccedat indeterminatarum ſeparatio & æquationis conſtructio per quadraturas. Cui reſponſum protinus dedit Cel. *Dan.* BERNOULLI, *Act. Erud.* 1725, pag. 473. Idem quoque, monente fratre *Nicolao*, animadvertit non ſeparabiles ſolum, ſed & integrabiles aut ſaltem ad circuli vel hyperbolæ quadraturam eſſe reducibiles æquationes, in caſibus omnibus in quibus ſeparabiles ſunt indeterminatæ; id quod feliciter quoque effectum eſt a Cel. GOLDBATCH. Vid. *Act. Acad. Petrop.* Tom. I. pag. 185, 198. Horum inventa huc redeunt.

1. Sit æquatio propoſita $az^m dz - byyz^{n-1}dz = dy$, quæ, faciendo $y = x : b$, & $ab = cc$, mutabitur in $ccz^m dz - xxz^{n-1}dz = dx$. Pone $x = cc : u$, & ea convertetur in hanc $ccz^{n-1}dz - uuz^m dz = du$, quæ cum priori ſimilis omnino ſit, niſi quod m & $n - 1$ tranſponuntur, concluditur quod, ſi aliqua relatio inter m & $n - 1$ locum det ſeparationi indeterminatarum, relatio quæ naſcitur ſcribendo m pro $n - 1$ & $n - 1$ pro m, eidem ſeparationi locum dabit.

2. Pone rurſus $x = Pz^p + ccz^q : t$, ſeu $xx = PPz^{2p} + 2Pccz^{p+q} : t + c^4z^{2q} : tt$, & $dx = Ppz^{p-1}dz + ccqz^{q-1}dz : t - ccz^q dt : tt$, factaque ſubſtitutione habebis $ccz^m dz - PPz^{2p+n-1}dz - 2Pccz^{p+q+n-1}dz : t - c^4z^{2q+n-1}dz : tt = Ppz^{p-1}dz + ccqz^{q-1}dz : t - ccz^q dt : tt$. Sit $-PPz^{2p+n-1}dz = Ppz^{p-1}dz$, & $-2Pccz^{p+q+n-1}dz : t = ccqz^{q-1}dz : t$, & invenies $p = -n$, $P = n$, & $q = -2n$. Unde, ſi ponas $x = nz^{-n} + ccz^{-2n} : t$, æquatio propoſita mutabitur in $ccz^m dz - c^4z^{-3n-1}dz : tt = -ccz^{-2n}dt : tt$, aut, dividendo per $-ccz^{-2n} : tt$, in $ccz^{-n-1}dz - ttz^{m+2n}dz = dt$, vel, faciendo $\mu = -n - 1$, & $\nu = m + 2n + 1$, in $ccz^\mu dz - ttz^{\nu - 1}dz = dt$, quæ propoſitæ eſt ſimilis. No. CIII.

3. Quoniam igitur propoſita reducibilis eſt, quando $m = n - 1$, erit quoque reducibilis ſi $\mu = \nu - 1$, hoc eſt ſi $-n - 1 = m + 2n$, aut ſi $m = -3n - 1$.

Ergo etiam ſi $\mu = -3\nu - 1$, hoc eſt ſi $-n - 1 = -3(m + 2n + 1) - 1$, aut ſi $m = -\frac{5}{3}n - 1$.

Et pariter, ſi $\mu = -\frac{5}{3}\nu - 1$, hoc eſt, ſi $-n - 1 = -\frac{5}{3}(m + 2n + 1) - 1$, aut ſi $m = -\frac{7}{5}n - 1$. &c.

Generatim ſi $m = -(p+2)n : p - 1$, poſito p numero impari quocunque.

4. Et per §. 1, tranſponendo m & $n - 1$, reducibilis etiam eſt æquatio, quando $n - 1 = -(p+2).(m+1) : p - 1$, hoc eſt, quando $m = -pn : (p + 2) - 1$.

No. CIII. 5. Reductio autem ita peragitur. Sit $ccz^{-(p+2)n:p-1}dz - xxz^{n-1}dz = dx$. Pone $x = nz^{-n} + ccz^{-2n} : t$, & æquatio reducetur ad $ccz^{-pn:p-1}dz - ttz^{(p-2)n:p-1}dz = dt$.

Pone igitur $t = \frac{p-2}{p}nz^{-(p-2)n:p} + ccz^{-2(p-2)n:p} : s$, & habebis $ccz^{-(p-2)n:p-1}dz - ssz^{(p-4)n:p-1}dz = ds$.

Pone rursus $s = \frac{p-4}{p}nz^{-(p-4)n:p} + ccz^{-2(p-4)n:p} : r$, habebisque $ccz^{-(p-4)n:p-1}dz - rrz^{(p-6)n:p-1}dz = dx$, & perge eodem modo, donec uterque exponens primi ac secundi termini fiat $-n:p-1$, [huc tandem deventurum est manifestum, quia *p* impar;] eritque æquatio ultima $ccz^{-n:p-1}dz - iiz^{-n:p-1}dz = di$. In qua, si *cc* positiva sit quantitas, poni potest primo *i* constans, atque $di = 0$, quo fit $cc - ii = 0$, vel $i = c$. Deinde erit $z^{-n:p-1}dz = di:(cc - ii)$, seu $-\frac{p}{n}z^{-n:p} = \int\frac{di}{cc-ii} = \frac{2}{c^3} \times$ sectorem hyperbolæ, cujus uterque semi-axis est *c*, tangens *i*. Igitur *i* vel est constans $= c$, vel est tangens sectoris æqual. $-\frac{pc^3}{2n}z^{-n:p}$ sumti in hyperbola æquilatera cujus semi-axis *c*.

At si *cc* negativa sit quantitas, *i* non potest poni constans, esset enim $= \sqrt{-c}$, hoc est, imaginaria: sed æquatio reducitur ad $z^{-n:p-1}dz = -di:(cc+ii)$, seu $-\frac{p}{n}z^{-n:p} = -\int\frac{di}{cc+ii} = -\frac{2}{c^3} \times$ sectorem circuli cujus radius *c*, tangens *i*. Est igitur *i* tangens sectoris $\frac{pc^3}{2n}z^{-n:p}$ sumpti in circulo cujus radius est *c*.

Ergo qualiscunque sit *c*, erit *i* vel constans & $= c$, vel data in *z* per quadraturam circuli vel hyperbolæ.

Sed $x = nz^{-n} + ccz^{-2n} : t$

& $t = \frac{p-2}{p}z^{-(p-2)n:p} + ccz^{-2(p-2)n:p} : s$

& $s = \frac{p-4}{p}nz^{-(p-4)n:p} + ccz^{-2(p-4)n:p} : r$

&c.

& $k = \frac{1}{p}nz^{-1n:p} + ccz^{-2n:p} : i$

Igitur $x = nz^{-n} + ccz^{-2n} :$ $(\frac{p-2}{p}nz^{-(p-2)n:p} + ccz^{-2(p-2)n:p} :$ $(\frac{p-4}{p}nz^{-(p-4)n:p} + ccz^{-2(p-4)n:p} :$ $(\frac{p-6}{p}nz^{-(p-6)n:p} + cc$ &c.. $\ldots + \frac{1n}{p}z^{-n:p} + ccz^{-2n:p} : i))))$

Quæ fractio composita ad simplicem facile reducitur.

EXEM-

Exemplum. Sit $ccz^{-\frac{7}{5}n-1}dz - xxz^{n-1}dz = dx$, ubi $p = 5$; erit $x =$

$$nz^{-n} + \cfrac{ccz^{-2n}}{\frac{3}{5}nz^{-\frac{3}{5}n} + \cfrac{ccz^{-\frac{6}{5}n}}{\frac{1}{5}nz^{-\frac{1}{5}n} + \cfrac{ccz^{-\frac{2}{5}n}}{i}}}$$

$= nz^{-n} + (\frac{1}{5}nrz^{-\frac{11}{5}n} + ccz^{-\frac{12}{5}n})cc : (\frac{3}{25}nnrz^{-\frac{4}{5}n} + \frac{3}{5}nccz^{-n} + ccrz^{-\frac{6}{5}n})$.

6. Quod si autem æquatio proposita sit $ccz^{-pn:(p+2)-1}dz - xxz^{n-1}dz = dx$, ponatur statim $x = cc:y$, ut fiat $ccz^{n-1}dz - yyz^{-pn:(p+2)-1}dz = dy$, seu, [faciendo $-pn:(p+2) = m$] $ccz^{-(p+2)m:p-1}dz - yyz^{m-1}dz = dy$, quo ipso ad priorem formam reducta est; & erit $x = cc:y = cc:(mz^{-m} + ccz^{-2m} : (\frac{p-2}{p}mz^{-(p-2)m:p}$ &c.) No. CIII.

7 Denique non omittendum Cel. Eulerum in *Actis Acad. Petrop.* Tom. VI, pag. 231, dedisse æquationis hujus constructionem universalem, singulari quadam & sibi propria methodo, sed nimium longa quam ut hic inseri possit.

ARTICUL. XIII.

De Celeritate & Declinatione [Dérive] *Navis.*

Sit [*Fig.* 13] AC, Navis cujus prora directa in D; AB, Navis cujus prora directa in M; AD, directio venti, quem Velum in utraque Nave excipiat ad angulos rectos; AF, cursus navis AB.

Esto Sinus totus, & simul celeritas venti $= AD = a$

Celeritas navis $AC = AE = y$, $AL = p$ Longit. navis $= g$

——— navis $AB = AF = z$, $AM = q = \sqrt{(aa-pp)}$ Latitudo — $= b$

Demissa ex F in AD perpendiculari FG, erit AG quantitas qua

No. CIII. qua navis AB se subducit vento; adeoque GD celeritas reliqua in navem efficax, uti $ED = a - y$, celeritas venti agens in navem AC.

LEMMA FUNDAMENTALE.

In maximis Navium celeritatibus, resistentiæ aquæ sunt ut vires quibus Naves impelluntur in eam partem e qua ipsis resistitur ([a]).

Resistentiæ autem componuntur ex lateribus Navium aquæ occurrentibus, & quadratis celeritatum Navium in illas partes ad quas resistuntur ([b]).

Vires vero, ex quadratis celeritatum venti in Naves agentium, & reciprocis sinubus angulorum venti & plagarum ad quas resistitur.

Jam cum celeritas Navis AB sit AF, erit celeritas illa qua tendit versus $L = AH$, atque illa qua tendit versus $M = AI$. Unde, per *Lemma* præcedens, erit [vocando quantitates ut supra dictum] $g : h + AH^2 : AI^2 = GD^2 : GD^2 + p : q$, id est, $gAH^2 : hAI^2 = p : q$, seu $AH\sqrt{g} : AI\sqrt{h} = \sqrt{p} : \sqrt{q}$, id est, $AH : AI = \sqrt{(p:g)} : \sqrt{(q:h)} = \sqrt{ph} : \sqrt{qg}$; adeoque si $p : q = h : g$, erit $AH : AI = p : q$. Unde constat, si DA in directum ipsi BA diagonali Navis, hoc est, si AM : MD = long. Navis : latitud. Navis, lineam AF coincidere cum ipsa AD.

Porro, cum inventum sit $AH : AI = \sqrt{ph} : \sqrt{qg}$, erit $AH^2 : AI^2 = ph : qg$ & $AF^2 [AH^2 + AI^2] : AH^2 = ph + qg : ph$, & $AF [z] : AH = \sqrt{(ph + qg)} : \sqrt{ph}$; unde $AH = z\sqrt{ph} : \sqrt{(ph + qg)}$. Pariter $AF^2 : AI^2 = ph + qg : gq$ & $AF [z] : AI = \sqrt{(ph + qg)} : \sqrt{qg}$; unde $AI = z\sqrt{qg} : \sqrt{(ph + qg)}$.

Sed

(a) Sunt enim, in casu velocitatum maximarum, resistentiæ æquales viribus impellentibus. Nam si vis superaret resistentiam, augeretur navis celeritas, atque ideo non esset maxima, contra hypothesim.

(b) Sequitur ex principiis Mechanicis. Vid. Num. LXVI, pag. 659, & Ni. LVI, Nota u, pag. 562.

Sed AF $[z]$: AH $[z\sqrt{ph} : \sqrt{(ph+qg)}]$ = Sinus totus $[a]$: Sinum ang. FAI $[a\sqrt{ph} : \sqrt{(ph+qg)}]$. Hinc, quia Sinus anguli DAM $= p$ quoque datur, dabitur quoque Sinus complementi anguli residui FAD, quippe qui æquatur summæ rectanguli sub sinibus rectis angulor. DAM, FAI, & rectanguli sub sinibus complementorum eorundem divisæ per radium (c). Invenietur ergo Sinus complementi ang. FAD $= (p\sqrt{ph} + q\sqrt{qg}) : \sqrt{(ph+qg)}$. Unde Sinus totus $[a]$: Sinum compl. anguli FAD $[(p\sqrt{ph} + q\sqrt{qg}) : \sqrt{(ph+qg)}]$ = AF $[z]$: AG $[(pz\sqrt{ph} + qz\sqrt{qg}) : a\sqrt{(ph+qg)}]$, & GD [AD — AG] $= (aa\sqrt{(ph+qg)} - pz\sqrt{ph} - qz\sqrt{qg}) : a\sqrt{(ph+qg)}$. Quare, per *Lemma* præmissum, Latit. Navis AC $[h]$: Latit. Navis AB $[h]$ + Quad. celerit. Navis AC $[yy]$: Quadr. celerit. Navis per AM $[qgzz : (ph+qg)]$ = ED² $[(a-y)^2]$: GD² $[(aa\sqrt{(ph+qg)} - pz\sqrt{ph} - qz\sqrt{qg})^2 : (aaph + aaqg)]$ + AD $[a]$: AM $[q]$, hoc est yy : $\frac{qgzz}{ph+qg} = a(a-y)^2 : \frac{q(aa\sqrt{(ph+qg)} - pz\sqrt{ph} - qz\sqrt{qg})^2}{aaph + aaqg}$. Unde $yy : gzz = a^3(a-y)^2 \; (aa\sqrt{(ph+qg)} - pz\sqrt{ph} - qz\sqrt{qg})^2$; seu $y : z\sqrt{g} = (aa - ay)\sqrt{a} : aa\sqrt{(ph+qg)} - pz\sqrt{ph} - qz\sqrt{qg}$, vel $y : z = (aa - ay)\sqrt{ag} : aa\sqrt{(ph+qg)} - pz\sqrt{ph} - qz\sqrt{qg}$; unde $z = aay\sqrt{(ph+qg)} : ((aa - ay)\sqrt{ag} + py\sqrt{ph} + qy\sqrt{qg})$. Hinc $y : z = (aa - ay)\sqrt{ag} + py\sqrt{ph} + qy\sqrt{qg} : aa\sqrt{(ph+qg)}$. Atqui, per antea demonstrata (d) $y = a\sqrt{m} : (\sqrt{r} + \sqrt{m})$; unde z erit $aa\sqrt{(phm + qgm)} : (a\sqrt{agr} + p\sqrt{phm} + g\sqrt{qgm})$. Jam in casu superiori $p : q = h : g$, reperitur $z = a\sqrt{m} : (\sqrt{ggr : \sqrt{(gg+hh)}} + \sqrt{m}) > a\sqrt{m} : (\sqrt{r} + \sqrt{m}) = y$. Unde Paradoxum fluit, quod tum Navis AB celeritas major sit per AF, quam ipsius AC per AD (e).

Imo etiam si $p : q = 2h : g$, vel $p : q < 2h : g$, erit $z > y$.

NB. Si $a = 1 = m$, $\sqrt{r} = 29$, $g = 10$, $h = 1$, erit proxime $z : y = 401 : 400$ (e).

(c) Vid. N°. LXVII, pag. 668.

(d) N°. LXVI, pag. 659, & infra Art. XVIII.

(e) Vid. N°. LXXII, pag. 738. Sed inito calculo reperio potius $z : y =$

No. CIII.

ADDITIO
AD ART. *XIII.*

Aliter & evidentius res ita concipitur: Si Navis AB movetur per AF, tantumdem eſt, ac ſi quieſcentem Navem aqua oblique ſecundum rectam FA allueret; quo pacto ejus latera premit vi ex lateribus & quadratis Sinuum obliquitatis compoſita, ut antea.

THEOREMA GENERALE.

Sit Figura quæcunque ABC [*Fig.* 14], ad quam allidat oblique fluidum EB; quæratur BD directio media, per quam Figura poſt impulſum feratur: eritque hæc illa ſecundum quam conatu contrario impelli debet Figura, ſi motus ſit ſiſtendus. Igitur, reciproce, ſi Navis ABC impellatur a vento ſecundum rectam DB, reſiſtetur ei ſecundum BE, hoc eſt, ſecundum hanc feretur Navis.

E quo principio ſupputari poteſt via cujuſvis Figuræ in fluido oblique impulſæ. Ex. gr. ſi Navis habeat figuram trianguli iſoſcelis ABC [*Fig.* 15], cujus prora ſit A, & axis [*la quille*] AF, venti directio AH (*), navis via AG; ſunto AD, AE perpendiculares ipſis AB, AC, & GD, GE perpendiculares ipſis AD, AE, ſed HI, HL parallelæ ipſis AE, AD. Erit, per *Lemma*, $AD^2 : AE^2 = AI : AL =$ Sin. ang. HAL : Sin. ang. HAI; hoc eſt, erit Quadr. Sin. ang. AGD [compl. GAD]: Quadr. Sin.

$y = 201 : 200$, quam proxime. Nam $y = \frac{1}{29+1} = \frac{1}{30}$ & $z = \frac{1}{29\sqrt{(100:101)}+-1} = \frac{1}{29\times(200:201)+-1}$ quam prox. $= \frac{201}{6001}$. Igitur $z : y = 30\times 201 : 600 = 6031 : 6001 = 603 : 600$ quam prox. $= 201 : 200$. Diſcrimen non eſt magni momenti.

(*) Per directionem venti hic non intelligitur linea venti, ſed directio media vis motricis velum impellentis.

Sin. ang. AGE [compl. GAE] $=$ Sin. ang. HAL : Sin. ang. HAI. Hinc si AH directio venti in directum est ipsi AI, erit via Navis AG in directum ipsi CA. No. CIII.

REGULA GENERALIS,

Pro declinatione Navium quarumvis figurarum.

Sit BAC [*Fig.* 16] Figura quæcunque, axis [*la quille*] AFI, aquæ directio CE [$\epsilon\kappa$] angulum cum axe constituens GFP [$\gamma\varphi\varpi$]; curvæ in C [κ] perpendiculares CM [$\kappa\mu$]. Sunto autem $AH = x$, $HC = y$, $AC = s$, $FP = a$, $GP = p$, $FG = q = \sqrt{(aa - pp)}$. Erit GP [$p$] : FG [$q$] $=$ CL [dy] : EL [$qdy : p$]; $ED = qdy : p + dx$, & $\epsilon\delta = qdy : p - dx$. CD vel $\kappa\delta$ [ds] : ED vel $\epsilon\delta$ [$qdy : p \pm dx$] $=$ Sin. ang. CED vel $\kappa\epsilon\delta$ [p] : Sin. ang. ECD vel $\epsilon\kappa\delta$ [$\frac{qdy \pm pdx}{ds}$]. Rursus, Quadr. Sin. tot. [aa] : Quadr. Sin. ang. ECD vel $\epsilon\kappa\delta$ [$\frac{(qdy \pm pdx)^2}{ds}$] $=$ CD vel $\kappa\delta$ [ds] : vim qua CD vel $\kappa\delta$ premitur ab aqua ad perpendiculum CM vel $\kappa\mu$ [$\frac{qqdy^2 \pm 2pqdydx + ppdx^2}{aads}$]. Repræsentetur hæc vis per CM aut $\kappa\mu$, & resolvatur in duas, axi perpendicularem CN seu $\kappa\nu$, & parallelam NM seu $\nu\mu$; quo facto, erit CD vel $\kappa\delta$ [ds] : LD vel $\lambda\delta$ [dx] $=$ CM vel $\kappa\mu$ [$\frac{qqdy^2 \pm 2pqdydx + ppdx^2}{aads}$] : CN seu $\kappa\nu$ [$\frac{qqdxdy^2 \pm 2pqdydx^2 + ppdx^3}{aads^2}$]. Item CD vel $\kappa\delta$ [ds] : CL vel $\kappa\lambda$ [dy] $=$ CM vel $\kappa\mu$ [$\frac{qqdy^2 \pm 2pqdxdy + ppdx^2}{aads}$] : NM vel $\nu\mu$ [$\frac{qqdy^3 \pm 2pqdxdy^2 + ppdx^2dy}{aads^2}$]; unde $CN - \kappa\nu = 4pqdx^2dy : aads^2$, & $NM + \nu\mu = (2qqdy^3 + 2ppdx^2dy) : aads^2$ (a). Repræsententur omnia $CN - \kappa\nu$, seu

Tttttt 2 4pq

(a) Hoc ratiocinium non sine limitatione verum est. Supponit enim inte-

No. CIII. $\frac{4pq}{aa}\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ per AS, & omnia NM$+\nu\mu$, seu $\frac{2qq}{aa}\int\frac{dy^3}{ds^2}+\frac{2pp}{aa}\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ per ST; erit AT, per *Theor.* præced. directio venti, quæ cum data sit, vocatur AS : ST $= a:g$; unde fiet $a:g = \frac{4pq}{aa}\int\frac{dx^2dy}{ds^2} : \frac{2qq}{aa}\int\frac{dy^3}{ds^2}+\frac{2pp}{aa}\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$. Ponatur $\int(dx^2dy:ds^2)=m$, & $\int(dy^3:ds^2)=n$, erit $a:g=\frac{4pqm}{aa}:\frac{2qqn+2ppm}{aa}=2pqm:qqn+ppm$; ideoque $2gmpq=anqq+ampp$, & substituto valore ipsius q, $2gmp\sqrt{(aa-pp)}=a^3n-anpp+ampp=$ [posito $m-n=r$] $a^3n+arpp$, & quadrando $4aaggmmpp-4ggmmp^4=a^6nn+2a^4nrpp+aarrp^4$. Hinc $(aarr+4ggmm)p^4=(4aaggmm-2a^4nr)pp-a^6nn$, & $p^4=\frac{4aaggmm-2a^4nr}{aarr+4ggmm}pp-\frac{a^6nn}{aarr+4ggmm}$; $pp=(2aaggmm-a^4nr\pm 2aagm\sqrt{(ggmm-aamn)}):(aarr+4ggmm)$ & $p=a\sqrt{(2ggmm-aanr\pm 2gm\sqrt{(ggmm-aamn)})}:\sqrt{(aarr+4ggmm)}$.

integram Figuram B A C impulsui aquæ expositam esse ex utraque parte axis AFI; quod sæpius non contingit. Finge enim rectam $\varphi\epsilon\kappa$, quæ parallela est directioni aquæ, tangere curvam in κ; solus arcus Aκ ab aqua premetur, reliqua parte $\epsilon\kappa$ nullum impetum sustinente; dum ab altera parte axis, integer arcus AB impulsui aquæ exponitur: quo fit, ut abscissæ x & applicatæ y non habeant utrinque eundem valorem; quippe pro ultima x in figura IAB sumi debet AI; sed in figura IAϵ duntaxat AH; quibus respondent ultimæ y, IB & Hκ. Tali igitur in casu pro CN $-\kappa\nu$ non potest scribi $4pqdx^2dy:aads^2$, nec $(2qqdy^3+2ppdx^2dy):aads^2$ pro NM$+\nu\mu$.

Sed pleniorem & faciliorem materiæ hujus tractationem vide in *Joh.* BERNOULLI *Theoria Manuariæ nauticæ*, Gallice scripta, Cap. IX. & *seqq.*

ARTI-

No. CIII.

ARTICUL. XIV.

Invenire Curvam quam format radius lucis per aerem, qui inæqualis densitatis est, ad oculum nostrum delatus.

Confer. Nus. LXXV, pag. 774.

PRimo investigandum qua proportione decrescat versus superiora aeris densitas. Hæc autem proportionalis est ipsi ponderi, hoc est, quantitati aeris incumbenti: quare si ACF [*Fig.* 17] sit aeris altitudo, AB ejus densitas in loco A, CD in loco C, &c. erit, utique spatium ABEFA aeris pondus, seu quantitas incumbens loco A, & CDEFC ejus pondus incumbens loco C (•); unde AB: CD = ABEFA: CDEFC; quæ est proprietas Logarithmicæ *, cujus applicatæ AB, CD, NO, &c. respective proportionales sunt areis ABEFA, CDEFC, NOEFN, &c.

Jam si IHG curva sit radius refractus, ejusque æquales particulæ infinite parvæ IH, HG: refringi debet radius IH in H,

Tttttt 3 ex

(•) Si enim CN sit altitudo columnæ aereæ infinite parvæ, erit quantitas aeris illa columna contenti in ratione composita voluminis, sive altitudinis CN, & densitatis CD; hoc est, ut spatium infinite parvum CDONC: per consequens tota quantitas aeris loco C incumbentis, ut omnia spatia CDONC, NOQPN, &c. id est, ut area CDEFC.

(*) Sit AC = x, CD = z, & si CD [z] proportionalis ponatur areæ CDEFC; hoc est si ponatur bz = CDEFC, erit bdz = CDONC = zdx. Igitur $z = bdz : dx$, quæ est æquatio Logarithmicæ, cujus subtangens = b. Nam $bdz : dx = z$, dat $bdz : z = dx$, & integrando $lz = x$. Igitur x [AC] est logarithmus ipsius z [CD].

No. CIII. ex lege refractionis, ita, ut finus angulorum incidentiæ & refractionis HM, GL, reciproce fint ut aeris denfitates CD, NO. Quare $MH \times NO = LG \times CD$; unde fi $CG = y$, $CD = z$, $CN = dx$, HG vel $IH = ds$; erit $zdy = ads$ conftanti rectangulo; vel pofito $z = adz : dx$ [ex natura Logarithmicæ ([b])] erit $dz : dx = ds : dy$; unde cum ds femper major fit quam dy, curva non poteft attolli altius, quam e regione loci ubi dx incipit fuperare dz ([c]).

Si QP, ON, DC, non denfitates, fed raritates aeris fignificarent; illæ iftis reciproce proportionales forent; fed eadem foret Logarithmica, fitu inverfo, anguftior infra &c. Sit igitur AF [*Fig.* 18] Logarithmica, cujus applicatæ AC, FG, &c. repræfentant aeris raritates in locis C, G, &c. CG ejus afymptotos, AC applicata æqualis fubtangenti $= a$, CG abfciffa $= x$, GH $= y$, $FG = z$. Jam quia finus angulorum incidentiæ & refractionis funt ut aeris raritates, & hæ ut applicatæ Logarithmicæ, erit ratio z ad dy conftans $= a : ds$ ([d]); hoc eft, $z = ady : ds$, $dz = addy : ds$, proinde $z : dz =$ [ob Logarithm. $= a : -dx$] $= dy : ddy$; quare $addy = -dxdy$. Ad quam æquationem conftruendam, refumatur æquatio $z = ady : ds$, five $zds = ady$; unde $aady^2 = zzds^2 = zzdx^2 + zzdy^2 =$ [ob $zdx = -adz$] $aadz^2 + zzdy^2$, five $aady^2 - zzdy^2 = aadz^2$, hinc $dy = -adz : \sqrt{(aa}$

([b]) Potuiffet poni generalius $z = bdz : dx$ pro æquatione Logarithmicæ; nam non neceffe eft, ut ejus fubtangens fit æqualis quantitati a, quæ in æquatione præcedente $zdy = ads$ pro conftante adhibita fuit. Hinc fluit Nota fequens c.

([c]) Quamvis ds femper major fit quam dy, curva tamen poteft attolli altius quam e regione loci ubi dx incipit fuperare dz. Nam ex comparatione æquationum $zdy = ads$, & $z = bdz : dx$, orietur $dz : dx = ads : bdy$; ubi bdy poteft fuperare ads, licet ds major fit quam dy.

([d]) Potuiffet poni generalius $z : dy = b : ds$, ob rationem fimilem ei, quæ in Nota b allegatur; fed nihilominus eadem fuiffet oritura curva refractionis; etiamfi altius attollatur quam e regione loci, ubi applicata Logarithmicæ AC æquatur fubtangenti a, ut mox videbitur.

$\sqrt{(aa - zz)}$ & $ds = ady : z = - aadz : z\sqrt{(aa - zz)}$ (e), No. CIII.
quod construitur describendo centro C, radio CA, quadrantem circuli AED, & faciendo GH = arcui circuli AE; prorsus ut construitur Pseudo-Logarithmica *Leibnitiana* in *Actis Lipſ.* A. 1693. pag. 254, [N°. LVI, pag. 570] adeo ut hæ duæ curvæ $addx = dy^2$, & $addy = dxdy$ sint eadem curva (f).

COROLLARIUM I.

Si ducatur HL parallela CE, tanget curvam (g).

COROLLARIUM II.

Si fiat EM = EB, CN = CB, MR parallela AN, erit RS = curvæ CH (h).

PRO-

(e) Ex comparatione æquationum $bdy = zds$, & $zdx = - adz$, oritur $bbdy^2 = zzds^2 = zzdx^2 + zzdy^2 = aadz^2 + zzdy^2$, sive $(bb - zz)dy^2 = aadz^2$. Hinc $dy = - adz : \sqrt{(bb - zz)}$, & $ds = bdy : z = - abdz : z\sqrt{(bb - zz)}$; & constructio curvæ talis: sit ch [*Fig.* 19] radius refractus ad altius Atmosphæræ punctum c; vocentur cg = x, gh = y, fg = z, ac = b; AC = a. Ad quadrantem circuli aed radio ac descripti, ducatur fbe axi DC parallela, fiatque ac : AC = arcus ae : applic. gh.

Dico autem, quod si cg sit = CG, applicata gh futura sit = GH. Nam si cg = CG, erit, ex natura Logarithmicæ, ac [ec] : fg [bc] = AC [EC] : FG [BC]; ergo triangula ecb, ECB sunt similia, & arcus ae, AE similes, id est, ac : AC = ae : AE = ae : GH. Sed, ex constructione, ac : AC = ae : gh; ergo gh = GH, & curva ch eadem ac curva CH.

(f) Quia in omni curva $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & [posita ds constante] $dxddx = - dyddy$, sive $ddx = - dyddy : dx$; hoc valore ipsius ddx in æquatione $addx = dy^2$ substituto, erit $- adyddy : dx = dy^2$, & per $- dy : dx$ dividendo $addy = - dxdy$.

(g) Quia $ds = ady : z$, erit $ds : dy = a : z =$ AC [EC] : FG [BC]; ergo angulus GHL = angulo BCE, per consequens HL parallela ipsi CE.

Hinc, quia maxima applicata curvæ CH est æqualis quadranti AED = rectæ CP, ducta per P axi CG parallela PQ erit asymptotos curvæ CH.

(h) Recta ER bisecat angulum BEC.

No. CIII.

PROBLEMA.

Data altitudine astri vera & apparente Ac *&* AE; *ejusdem sub alia data altitudine* Al *refractionem* lo *invenire.*

SOLUTIO.

Ductis cf, EF, lh, om, parallelis ipsi CD; sic ut nm sit $=$ gF, erit lo quantitas quæsita refractionis; neque ad hanc inveniendam opus est curva CH; imo nec curva AF; dummodo enim fiat Cb : CB $=$ Cp : Cq, hoc est, Sinus complementorum arcuum Ac, AE, Al, Ao, proportionales; plane ut fieri solet, ubi aer ubivis ejusdem densitatis esse supponitur (1).

BEC. Quia enim AC $=$ EC, &, per constructionem, CN $=$ CB, triangula ACN, ECB sunt similia & æqualia; per consequens angulus ad N rectus; &, ob AN, RM parallelas, etiam angulus RME est rectus, & quia porro facta est EM $=$ EB, erunt triangula rectangula EBR, EMR, communem hypothenusam ER habentia, etiam similia & æqualia; quamobrem angulus BER $=$ angulo MER. Jam vero CN [z]: CA [a] $=$ CM seu CE $-$ EM [$a - \sqrt{(aa - zz)}$]: CR [$\frac{aa - a\sqrt{(aa - zz)}}{z}$]. Hinc

$$RS = l(CR:a) = l\left(\frac{a - a\sqrt{(aa - zz)}}{z}\right),$$

cujus logarithmi differentiale invenietur æquale $-aadz : z\sqrt{(aa - zz)}$ $=$ elemento curvæ $ds = ady : z$.

A priori invenitur integrale elementi curvæ, ponendo $\sqrt{(aa - zz)} = t$; unde $-zdz = tdt$; $-dz = tdt : z$; $-dz : z = tdt : zz = tdt : (aa - tt)$; $-dz : z\sqrt{(aa - zz)} = dt : (aa - tt)$, vel $-aadz : z\sqrt{(aa - zz)} = aadt : (aa - tt) = \frac{1}{2}adt : (a + t) + \frac{1}{2}adt : (a - t)$, & integrando $\int(-aadz : z\sqrt{(aa - zz)}) =$ [quia crescentibus logarithmis hic decrescunt applicatæ logarithmicæ] $\frac{1}{2}l\frac{a - t}{a + t} = \frac{1}{2}l\frac{(a - t)^2}{aa - tt}$ $= l\frac{a - t}{z} = l\frac{a - \sqrt{(aa - zz)}}{z}$.

(1) Quæ hic datur hujus Problematis solutio non est vera. Supponit enim Sinus complementorum altitudinis veræ & apparentis esse in constanti ratione, quod est falsum.

Sit [*Fig.* 19] punctum H astrum radians, O oculus, HOV angulus mensurans veram altitudinem astri supra horizontem, ang. TOV $=$ SCR mensurans altitudinem apparentem;

rentem; quorum cosinus [posito sinu toto $= AC$] sunt $OV \times AC : HO$ & RC: posita autem HV invariabili, & VO variabili reperietur ratio inter prædictas quantitates RC & $OV \times AC : HO$ variabilis. Si enim vocentur $AC = a = 1$, $RC = z$, $HV = GP = n$, quæ cum, ex hypothesi, ponatur constans, erit [ex nat. Logarithm.] QP [RC] ad FG [BC] in ratione constanti, puta ut 1 ad m, unde $BC = mz$, arcus $SD = \int(dz : \sqrt{(1 - zz)}) = z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5 + \&c.$ arcus $ED = \int(mdz : \sqrt{(1 - mmzz)}) = mz + \frac{1}{6}m^3z^3 + \frac{3}{40}m^5z^5 + \&c.$ Hinc $VO = ES = ED - SD = AS - AE = (m - 1)z + \frac{1}{6}(m^3 - 1)z^3 + \frac{3}{40}(m^5 - 1)z^5$, & $HO^2 = HV^2 + VO^2 = nn + (m - 1)^2 zz + \frac{1}{3}(m - 1)(m^3 - 1)z^4 + \&c.$ Unde $\frac{OV^2 \times AC^2}{HO^2} : RC^2 = (m - 1)^2 zz + \frac{1}{3}(m - 1)(m^3 - 1)z^4 + \&c : nnzz + (m - 1)^2 z^4 + \frac{1}{3}((m - 1)(m^3 - 1)z^6 + \&c. = (m - 1)^2 + \frac{1}{3}(m - 1)(m^3 - 1)zz + \&c : nn + (m - 1)^2 zz + \frac{1}{3}(m - 1)(m^3 - 1)z^4 + \&c.$ quæ utique non est ratio constans. Sed etsi non HV, sed HO distantia oculi ab astro, ponatur invariabilis, reperietur ratio inter $OV \times AC : HO$ & RC, sive [ob AC & HO constantes] inter OV [ES] & RC inconstans; quod non puto opus habere demonstratione. No. CIII.

ARTICUL. XV.

Invenire veram legem, secundum quam aeris densitas decrescit in altioribus Atmosphæræ locis, & simul determinare verum aeris atmosphærici pondus.

Curva radii, prout in præcedenti Articulo inventa fuit, fundatur in hypothesi, quod densitates aeris sint ut pondera illi incumbentia: hæc vero hypothesis cum, ob rationem quam jam in Tractatu de *Grav. Æth.* pag. 97, * attuli, præcise vera

* Pag. 93, 94.

No.CIII. non ſit, ſed denſitas major ad minorem ſit in ratione tantilla minore, quam pondera ab illis ſuſtentabilia; ſequitur etiam prædictam curvam non omnino genuinam eſſe. Vera hypotheſis eſt, quod ſi duo ſint aeris volumina æqualia, eorum vires elaſticæ, adeoque & pondera ab iis ſuſtentabilia, ſint in ratione compoſita ex directa denſitatum ſeu quantitatum materiæ terreſtris, & reciproca quantitatum materiæ ſubtilis in illis voluminibus contentarum: puta ſi volumina ſint a & a; denſitates, ſeu volumina a materia terreſtri occupata, b & y; volumina a materia ſubtili occupata, $a - b = c$, & $a - y$; elateria erunt ut $ab - by$ & cy: quare ſi b & y, quæ denſitates aeris ſignificant, repræſententur per applicatas curvæ alicujus [*Fig.* 20], quibus reſpondent abſciſſæ o & x; & per conſequens pondus totius aeris repræſentetur per ſpatium hac curva contentum, erit [quia pondera incumbentia ſunt ut elateria] $ab - by : cy =$ ſpatium ſupra b, quod vocetur fb: ſpatium ſupra y, quod vocetur s; hinc $\frac{fbcy}{ab - by} = \frac{fcy}{a - y} = s$, & differentiando $\frac{afcdy}{aa - 2ay + yy} = ds = - ydx$: poſitoque $\frac{ay}{a - y} = t$, ſeu $\frac{at}{a + t} = y$, adeoque $dy = \frac{aadt}{aa + 2at + tt}$, reperitur $\frac{afcdy}{aa - 2ay + yy} = \frac{fcdt}{a} = - ydx$, hoc eſt, $- dx = \frac{fcdt}{ay} = \frac{fcdt}{aa} + \frac{fcdt}{at}$.

C O N S T R U C T I O.

Fiat Logarithmica BGC[1] [*Fig.* 21], cujus aſymptotos AF; baſis AB $= ab : c$, applicata PG $= t$ (*); tunc abſciſſa AL $= bf : a$, ductaque BL, demittatur GH parallela aſymptotæ ſecans BL in I, & fiat PM $=$ HI, eritque AM [$=$ HG $+$ HI $= \int fcdt$

(*) Subtangens hujus Logarithmicæ debet eſſe $= fc : a$.

$= \int \frac{-fcdt}{at} + \int \frac{-fcdt}{aa}] = x$. Deinde fiat ut $a+t$ ad a, ita t ad MN, quæ erit y. No. CIII.

Quia vero $\int -ydx$, id eſt, ſpatium NDFM, ſive s, eſt $= \frac{fcy}{a-y} = \frac{fct}{a}$, patet decreſcentibus æquabiliter ſpatiis, ſeu ponderibus incumbentibus ſurſum verſus, ſeu denique altitudinibus mercurii in Barometro, decreſcere quoque æquabiliter ipſa t, cum f, c, & a ſint conſtantes: unde elevationes locorum ad datas mercurii altitudines ſic habentur: Poſita $\frac{ab}{c} - t = HB = z$, ſeu $\frac{ab}{c} - z = t$, erit $-\frac{fcdt}{at} = \frac{fccdz}{aab - acz} = \frac{fc}{a} \left(\frac{cdz}{ab} + \frac{cczdz}{aabb} + \frac{c^3zzdz}{a^3b^3} + \frac{c^4z^3dz}{a^4b^4} + \&c. \right)$. Hinc $\int \frac{-fcdt}{at} = [HG] = \frac{fc}{a} \left(\frac{cz}{ab} + \frac{cczz}{2aabb} + \frac{c^3z^3}{3a^3b^3} + \frac{c^4z^4}{4a^4b^4} + \&c. \right)$, & quia $\int \frac{-fcdt}{aa} = \int \frac{fcdz}{aa} = \frac{fcz}{aa} = HI$, erit $x = AM = HG + HI = \frac{fc}{a} \left(\frac{cz}{ab} + \frac{cczz}{2a^2b^2} + \frac{c^3z^3}{3a^3b^3} + \&c. \right) + \frac{fc}{a} \times \frac{z}{a} = \frac{fc}{a} \times \left(\frac{z}{a} + \frac{cz}{ab} + \frac{cczz}{2a^2b^2} + \frac{c^3z^3}{3a^3b^3} + \&c. \right)$

Si denſitates aeris ponderibus incumbentibus eſſent præciſe proportionales, hoc eſt, ſi curva END eſſet Logarithmica, fieret $x = f \times \left(\frac{z}{a} + \frac{z}{b} + \frac{zz}{2bb} + \frac{z^3}{3b^3} + \&c. \right) = f \times \left(\frac{z}{b} + \frac{zz}{2bb} + \frac{z^3}{3b^3} + \&c. \right)$ quia tum b eſt infinities minor a, c vero ipſi a æqualis ([b]).

Vuuuuu 2 Quare

([b]) In hac hypotheſi, ſpatia a materia ſubtili occupata, id eſt, $a - b$ vel c, & $a - y$, debent eſſe in ratione æqualitatis, ut elateria ſive pondera incumbentia ſint proportionalia denſitatibus, id eſt, $ab - by : cy = b : y$; quod non poteſt eſſe, niſi b & y ſint infinities minora quam a, & per conſequens $a = c$.

No. CIII. Quare poſita gravitate mercurii ad gravitatem aeris ut 10800 ad 1, ſive ut 900 ped. ad 1 poll. ſi altitudo mercurii in tubo prope Terram ſit pollicum 30, erit altitudo æquipollens aeris [qui ſit ubique denſitatis b] hoc eſt $f = 30 \times 900 = 27000$ pedum. Et quia t ſunt proportionalia ponderibus, ſeu altitudinibus mercurii, decreſcat maxima t, ſeu $ab:c$, per intervalla æqualia, pro ratione 30 pollicum mercurii; eruntque ordine ipſa t; $\frac{30ab}{30c}$, $\frac{29ab}{30c}$, $\frac{28ab}{30c}$, $\frac{27ab}{30c}$, &c. & ipſa z; 0, $\frac{ab}{30c}$, $\frac{2ab}{30c}$, $\frac{3ab}{30c}$, &c. adeoque ipſa $\frac{cz}{ab}$; 0, $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$, $\frac{4}{30}$, &c. quibus valoribus in duabus æquationibus ſucceſſive ſubſtitutis, habetur primo $x = \frac{fc}{a}\left(\frac{b}{30c} + \frac{1}{30} + \frac{1}{2.30.30} + \frac{1}{3.30.30.30} + \&c.\right)$; deinde $x = \frac{fc}{a}\left(\frac{2b}{30c} + \frac{2}{30} + \frac{4}{2.30.30} + \frac{8}{3.30.30.30} + \&c.\right)$, hoc eſt, [quia $a = b + c$] $x = \frac{f}{30} + \frac{fc}{2a.30.30} + \frac{fc}{3a.30.30.30} + \&c.$); item $x = \frac{2f}{30} + \frac{4fc}{2a.30.30} + \frac{8fc}{3a.30.30.30} + \&c.$); quæ Series conflantur ex terminis progreſſionis harmonicæ $\frac{fc}{2a}$, $\frac{fc}{3a}$, $\frac{fc}{4a}$, &c. & terminis progreſſionis geometricæ, cujus primus terminus eſt ratio differentiæ altitudinis mercurii maximæ & datæ ad maximam. Unde ſequentes fluunt Tabulæ (e), quibus ex data altitudine mercu-

(e) Hæ Tabulæ ſine ſeriebus per Tabulas Logarithmorum conſtrui poſſunt. Etenim ſi fiat ut 0.4342945 [ſubtangens Logarithmicæ Tabularis] ad $fc:a$; ita $l(ab:ct)$ ad numerum quartum; erit hic numerus quartus $= \int(-fcdt:at)$ HG, & quia HI $= \int(-fcdt:aa)$ $= (fab - fct):aa$, erit $x =$ AM $=$ HG $+$ HI $= \frac{fc}{a} l \frac{ab}{tc}$: 0.4242945 $+ \frac{fab - fct}{aa} =$ [quia poſito numero pollicum ad quem altitudo mercurii aſcendit $= m$, eſt $t =$

mercurii cognoscitur altitudo loci; prior est *Edmundi* HALLEYI, quæ densitates aeris ponderibus statuit proportionales; altera nostra, in hypothesi quod $c = 100b$, prout in *Tractatu* de *Gravit. Æther.* circiter reperi *: hæc vero Tabula ex altera nullo negotio conficitur; nam dummodo ex altitudine loci *Halleyana* subtrahatur $\frac{1}{30}f$ [$\frac{2}{30}f$; $\frac{3}{30}f$, &c.] fiatque ut a ad c ita residuum ad numerum addendum ipsi $\frac{1}{30}f$, [$\frac{2}{30}f$, $\frac{3}{30}f$, &c.] erit summa nostra loci altitudo in eadem mercurii altitudine ([d]). No. CIII.

* pag. 94.

$x = mab : 30c] \frac{fc}{a} \times l\frac{30}{m} : 0.4342945 + (30 - m) fb : 30a$. In hypothesi vero densitatum ponderibus proportionalium; ubi $a = c$, & b infinities minor quam a, erit $x = fl\frac{30}{m} : 0.4342945$; & posita altitudine $f = 27000$ pedibus, ut supra, erit $f : 0.4342945 = 1 : 0.000016085$; unde talis exsurgit regula pro Tabula *Halleyana*: Differentia Logarithmorum maximæ & datæ altitudinis mercurii, dividatur per numerum 0.000016085, quotiens monstrabit numerum pedum quæsitæ altitudini loci respondentem.

([d]) Si enim ex altitudine *Halleyana* $fl\frac{30}{m} : 0.4342945$ subtrahatur $(30 - m)f : 30$, & residuum multiplicetur per $c : a$, proveniet $\frac{fc}{a} l\frac{30}{m} : 0.4342945 - (30 - m)fc : 30a$; cui si addatur $(30 - m)f : 30$, habebitur $\frac{fc}{a} l\frac{30}{m} : 0.4342945 + (30a - 30c - ma + mc)f : 30a =$ [ob $a - c = b$] $\frac{fc}{a} l\frac{30}{m} : 0.4342945 + (30 - m)fb : 30a$ = altitudini quæsitæ.

No. CIII.

Altitudo mercurii. Pollices.	*Alt. loci.* Pedes.	Pedes.
30	0	0
29	915	915
28	1863	1862
27	2845	2843
26	3864	3861
25	4923	4918
20	10947	10928
15	18715	18663
10	29662	29547
5	48378	48122
1	91831	91180
0.5	110547	109715
0,25	129262	128247
0,1	154000	152742
0,01	216169	214296
0,001	278338	275849

Ex data altitudine loci x, invenitur altitudo mercurii, seu y in Logarithmica, per hanc seriem $y = b - \frac{bx}{f} - \frac{bxx}{2ff} + \frac{bx^3}{2.3f^3} - \frac{bx^4}{2.3.4f^4}$ &c. (e) At in hypothesi nostra altitudo mercurii difficilius ad Seriem

(e) Sensus non est altitudinem mercurii, quam vocavimus m, esse æqualem applicatæ y in Logarithmica, sive Seriei $b - bx:f + bxx:2ff - bx^3:6f^3 +$ &c. sed ope hujus Seriei inveniri posse altitudinem m. Quippe $mab:30c = t = ay:(a-y)$, unde $m = 30cy:(ab - by)$; in hypothesi vero *Halleyana*, ubi $a = c$, at b & y infinities minor quam a aut c, est $\frac{1}{30}mb = t = y$, sive $m = 30y:b$; id est $m = 30(1 - x:f + x^2:2f^2 - x^3:6f^3 + x^4:24f^4 -$ &c.). Ipsa vero Series sic facile invenitur: Resumatur æquatio generalis $-ydx = fcdt:a$, quæ in hypothesi *Halleyana* degenerat in hanc $\frac{1}{30}mbdx = \frac{1}{30}fbdm$ sive $mdx + fdm = 0$. Ut valor ipsius m in Seriem convertatur per potestates ipsius x ascendentem, considerandum est in casu ubi $x = 0$, esse $m = 30$, adeoque primum terminum Seriei debere esse $= 30$,

Seriem reducitur ([f]). No. CIII.

$= 30$, reliquis terminis in hoc casu evanescentibus; sint igitur reliqui termini $= Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} +$ &c. eritque $mdx + fdm = dx \times (30 + Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} +$ &c. $+ \alpha fAx^{\alpha-1} + \beta fBx^{\beta-1} + \gamma fCx^{\gamma-1} + \delta fDx^{\delta-1} +$ &c.) ubi statim apparet, ut termini singuli utriusque Seriei fiant homogenei & ipsorum coefficientes simul $= 0$, debere esse $\alpha - 1 = 0$, $\beta - 1 = \alpha$, $\gamma - 1 = \beta$, $\delta - 1 = \gamma$, &c. item $\alpha fA + 30 = 0$, $\beta fB + A = 0$, $\gamma fC + B = 0$, $\delta fD + C = 0$, quæ est ipsa lex, secundum quam progreditur Series $30(1 - x:f + xx:2ff - x^3:6f^3 + x^4:24f^4 -$ &c.). Sed & absque ope Seriei per Tabulas Logarithmorum invenitur valor ipsius m; ostendit enim æquatio supra inventa $x = fl\frac{30}{m} : 0.4342945$, quod sit f [27000 ped.] ad subtangentem Logarithm. Tabularis [0.4342945] sive 1, ad 0.000016085, ut altitudo loci data x ad differentiam logarithmorum maximæ & quæsitæ altitudinis mercurii.

([f]) In hac hypothesi altitudo mercurii m sic ad Seriem reducitur. Sumatur æquatio generalis $-ydx = fcdt : a$, sive $-dx = fcdt : aa + fcdt : at$, aut $aatdx + fcadt + fctdt = 0$; hic, in casu $x = 0$, debet esse $t = AB = ab : c$; adeoque si valor ipsius t generaliter per Seriem est exprimendus, cujus termini progrediantur per potestates ipsius x ascendentes, ejus primus terminus debet esse $ab : c$. Ponantur reliqui $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} +$ &c. & æquatio transformabitur in sequentem:

$$\left.\begin{array}{l} aatdx = aadx.\ ab:c \quad + Ax^{\alpha} \quad + Bx^{\beta} \quad + Cx^{\gamma} \quad + \&c. \\ fcadt = fcadx.\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} + \&c. \\ fctdt = \left\{\begin{array}{l} fabdx.\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} + \&c. \\ fcAdx.\alpha Ax^{2\alpha-1} + \beta Bx^{\alpha+\beta-1} + \gamma Cx^{\alpha+\gamma-1} + \delta Dx^{\alpha+\delta-1} + \&c. \\ fcBdx.\alpha Ax^{\alpha+\beta-1} + Bx^{2\beta-1} + \gamma Cx^{\beta+\gamma-1} + \delta Dx^{\beta+\delta-1} + \&c. \\ fcCdx.\alpha Ax^{\alpha+\gamma-1} + \beta Bx^{\beta+\gamma-1} + \gamma Cx^{2\gamma-1} + \delta Dx^{\gamma+\delta-1} + \&c. \end{array}\right. \end{array}\right\} = 0$$

Harum Serierum duæ, $fcadx$ ob $b + c = a$, conflantur in unam $(\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} +$ &c.) & $faadx\ (\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} +$ $fabdx\ (\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1}$ &c.) $\gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} +$ &c.);

quæ

No. CIII. quæ ſi pro illis ſubſtituatur, reperientur termini minimarum dignitatum $aadx.(ab:c)$, & $faadx.\alpha Ax^{\alpha-1}$, in quibus indices poteſtatum ipſius x ſunt 0 & $\alpha - 1$, qui debent eſſe æquales, quia neuter horum terminorum ſolus poteſt eſſe $=0$: Hinc $\alpha = 1$, & poſitis coefficientibus horum terminorum ſimul ſumtis $=0$, invenietur $A = -ab:acf = -ab:cf$. His duobus terminis in æquatione deletis, ſequuntur termini $aadx.Ax^{\alpha} + faadx.\beta Bx^{\beta-1} + fcAdx.\alpha Ax^{2\alpha-1}$, quorum neuter ſolus poteſt eſſe $=0$: hinc $\alpha = \beta - 1 = 2\alpha - 1$, ſive $\beta = 2$, & poſitis coefficientibus $=0$, invenietur $B = (-aaA - fcAA):2faa$. Simili modo deletis his tribus terminis, ſequentur termini $aadx.Bx^{\beta} + faadx.\gamma Cx^{\gamma-1} + fcAdx.\beta Bx^{\alpha+\beta-1} + fcBdx.\alpha Ax^{\alpha+\beta-1}$; in quibus ſi indices poteſtatum ponantur æquales, reperietur $\gamma = 3$, & quia hi omnes termini ſimul ſumti debent eſſe $=0$, erit $C = (-aaB - \beta fcAB - \alpha fcAB):3faa = (-aaB - 3fcAB):3faa$. Porro ſequentur hi quinque termini, $aadx.Cx^{\gamma} + faadx.\delta Dx^{\delta-1} + fcAdx.\gamma Cx^{\alpha+\gamma-1} + fcBdx.\beta Bx^{2\beta-1} + fcCdx.\alpha Ax^{\alpha+\gamma-1}$, qui dabunt $\delta = 4$, $D = (-aaC - \gamma fcAC - \beta fcBB - \alpha fcAC):4faa$. Unde jam lex continuandi Seriem manifeſta eſt: ſcil. indices dignitatum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. progrediuntur ſecundum numeros naturales $1, 2, 3, 4$, &c. & coefficientes A, B, C, D, &c. ſequenti modo ex præcedentibus formantur. Ex. gr. Sit inveniendus coefficiens termini, ubi index dignitatis eſt 7: Scribantur ordine coefficientes terminorum præcedentium A, B, C, D, E, F, iidemque utrogrado ordine, F, E, D, C, B, A, & ſinguli in ſingulos multiplicentur, quorum producta erunt AF, BE, CD, DC, EB, FA; eritque $G = (-aaF - 6fcAF - 5fcBE - 4fcCD - 3fcDC - 2fcEB - fcFA):7faa = -F:7f - (AF + BE + CD)c:aa$. Sic quoque erit H [coefficiens termini ubi index dignitatis eſt 8] $= (-aaG - 7fcAG - 6fcBF - 5fcCE - 4fcDD - 3fcEC - 2fcFB - fcGA):8faa = -G:8f - (AG + BF + CE + \frac{1}{2}DD)c:aa$. Invento valore ipſius t per Seriem, ſi hic ſubſtituatur in æquatione $m = 30ct:ab$, habebitur quoque m altitudo mercurii quæſita.

ARTI-

ARTICUL. XVI.

Solutio Problematis de minimo Crepusculo.

Vid. N^us. LIII, pag. 515.

SIt BLZ [*Fig.* 22] Horizon; MER ejus parallelus 18 gradibus infra illum depressus; PDM Æquator; ZE, QR, ejus paralleli versus Polum Australem A; AQ, AZ & AR, AE circuli declinationum; ZP vel EV arcus declinationis paralleli ZE. Jam si Sol describens parallelum ZE efficiat Crepusculum minimum, erit mora Solis in ZE brevissima, adeoque differentia moræ Solis in parallelis contiguis ZE, QR nulla; cumque & moræ in ZS & TR differentia nulla sit, eodem quoque tempusculo SE & QT pertransibuntur; ac propterea ipsi arculi SE, QT, erunt ut celeritates quibus percurruntur, hoc est, ut radii parallelorum ZE, QR, hoc est, propter infinite parvam distantiam parallelorum, dicti arculi erunt æquales, & quia SR, ZT quoque sunt æquales, & anguli ESR, ZTQ recti, erunt anguli SER, TQZ æquales, & proinde [posito EGB esse quadrantem (*) circuli maximi tangentem parallelum Horizontis MER in E] ob angulum VES rectum, anguli GEV & TZQ, sive DZP, quoque æquales, utpote complementa angulorum SER & TQZ; quare cum & anguli GVE, DPZ, sint recti, & arcus VE, PZ æquales, erunt arcus EG, DZ & anguli EGV, ZDP

(*) Si ducatur per E arcus circuli azimuthalis EL, hic secabit ad angulos rectos Horizontem BL, parallelum ME, & circulum maximum BGE, qui parallelum in puncto E tangit; adeoque uterque arcus BL & BGE erit quadrans.

No. CIII. ZDP ſeu BDG æquales; unde cum in triangulo BDG ſinus anguli BDG ſit ad ſinum anguli BGD = ſin. ang. VGE = ſin. ang. BDG, ut ſinus arcus BG ad ſinum arcus BD, erunt hi duo ſinus æquales, & ipſorum arcus ſimul æquales ſemicirculo; & ducto arcu EL ad utrumque normali, unius defectus infra quadrantem, id eſt GE, æqualis alterius exceſſui ſupra quadrantem, id eſt, arcui LD; quo circa, cum & anguli trianguli LFD ſinguli ſint æquales ſingulis trianguli FEG, erit & LF = FE = ½ LE = 9 gr. & quia, ut oſtenſum, LD = GE = DZ (b), hinc in triangulis DLF, DPZ ſic operaberis. Poſitis Sinu toto = r, tang. LF, 9° = a, ſin. ang. LDF = b, ſin. compl. ejuſdem = c, & tang. compl. = d; erit Sin. tot. [r]: tang. compl. ang. LDF [d] = tang. LF [a]: ſin. LD vel DZ [$\frac{ad}{r}$]; porro Sin. tot. [r]: ſin. DZ [$\frac{ad}{r}$] = ſin. CDZ vel LDF [b]: ſin. PZ [$\frac{abd}{rr}$] = [quia $d:r = c:b$] $\frac{ac}{r}$; quare ut Sin. tot. ad tang. 9 gr. ſic ſin. compl. anguli Horizontis & Æquatoris, hoc eſt, ſinus elevationis Poli ad ſinum declinationis Solis auſtralis quæſitæ tempore minimi crepuſculi (c). Per logarithmos ita: A lo-

(b) Iſtæ æqualitates arcuum LF, FE, & arcuum LD, DZ, paulo brevius demonſtrari poſſunt. Sit CZ arcus circuli maximi ad Horizontem LDZ perpendicularis. Per naturam Problematis, ang. SER = ang. TQZ, ſive ang. EZD: ſubſtituantur his anguli qui ipſis æquales ſunt, ob angulos rectos VES, FER, EZP & DZC, eritque ang. VEF = ang. PZC: propterea, quia anguli ad V & P recti ſunt, & arcus VE = arcui PZ, erit etiam ang. VFE [LFD] = ang. PCZ, & arc. FE = arc. CZ; hinc quia in triangulis rectangulis FLD, CZD, ſinguli anguli ſingulis ſunt æquales; erunt etiam ſingula latera ſingulis æqualia, id eſt, LD = DZ & LF = CZ = FE.

(c) Eadem proportio aliter ſic invenitur: Eſto N punctum Nadir, NA arcus Meridiani, ductis quadrantibus azimuthalibus NEL, NZ, erit ang. NEA [= SER] = ang. NZA [= TQZ], hinc ſi in

A logarithmo finus elevationis Poli fubtrahatur o. 8002875, refiduum erit Logarithmus finus declinationis quæfitæ (c). No. CIII.

fi in quadrante NZ abfcindatur ZH = EN, & ducatur arcus circuli maximi AH, erit hic = NA, adeoque in triangulo ifofceli HAN perpendicularis AI dividet bafin NH [= NZ — ZH = NL — EN = EL] in duas partes æquales, quarum quælibet erit 9 gr. eritque in triangulo rectangulo NIA, ut finus compl. NI ad finum compl. NA, ita finus totus ad finum compl. arcus IA; fed, in triangulo rectangulo AIZ, eft finus totus ad finum compl. arcus IA, ut finus compl. arcus IZ [finus arc. NI] ad finum compl. hypothenufæ AZ [finum arc. PZ]. Quamobrem ut finus compl. 9 gr. ad finum compl. diftantiæ puncti verticalis a Polo, five ad finum elevationis Poli, ita finus 9 gr. ad finum declinationis quæfitæ, vel *alternando*, ut finus compl. 9 gr. ad finum 9 gr. vel ut finus totus ad tangentem 9 gr. ita finus elevationis Poli ad finum declinationis quæfitæ.

(d) Sole verfante in Hemifphærio Boreali non poteft fieri minimum Crepufculum: nam arcus AE vel AZ non poteft effe quadrante major; quia in triangulo rectangulo AIZ utrumque crus AI & ZI neceffario eft quadrante minus.

ARTICUL. XVII.

Invenire relationem inter Evolutas & Diacaufticas.

Confer. N^{us}. LVI. pag. 549.

SIt A [*Fig.* 23] punctum radians; BCG curva quæcunque; BC ejus portio infinite parva; BF, CF, curvæ perpendiculares; F punctum Evolutæ; AB, AC, radii incidentes protracti in R & S; BH, CH, ipforum refracti coeuntes in puncto Diacaufticæ H. Sit Sinus totus $= r$, finus ang. incidentiæ ABM

No. CIII. vel FBR $= y$, finus ang. refractionis FBH $= z$; qui finus cum ex natura refractionis fint in conftanti ratione, puta a ad b, erit $z = by : a$. Sed, ex natura circuli, elementum arcus, cujus finus eft $= y$, radio exiftente $= r$, eft $rdy : \sqrt{(rr - yy)}$, & elementum anguli ad centrum ab hoc arcu fubtenfi $= dy : \sqrt{(rr - yy)}$; cum igitur finus anguli incidentiæ FBR fit $= y$, & angulus incidentiæ FCS infinite parva quantitate ab illo differat, erit FBR — FCS $= dy : \sqrt{(rr - yy)}$. Simili modo differentia angulorum refractionis FBH — FCH $= dz : \sqrt{(rr - zz)} = bdy : \sqrt{(aarr - bbyy)}$. Hinc FBR — FCS : FBH — FCH $= \sqrt{(aarr - bbyy)} : b\sqrt{(rr - yy)}$. Jam vero ang. FBR $=$ FBH $+$ HBR $=$ FBH $+$ BSA $+$ BAC $=$ BFC $+$ FCS $+$ BAC; ergo FBR — FCS $=$ BFC $+$ BAC; porro FBH $+$ BHC $=$ BFC $+$ FCH, five FBH — FCH $=$ BFC — BHC; hinc $\sqrt{(aarr - bbyy)} : b\sqrt{(rr - yy)} =$ BFC $+$ BAC : BFC — BHC $=$ (BFC $+$ BAC) $\times b\sqrt{(rr - yy)} : \sqrt{(aarr - bbyy)}$; unde BHC $=$ BFC $- \frac{b\sqrt{(rr - yy)}}{\sqrt{(aarr - bbyy)}} \times$ (BFC $+$ BAC). Fingantur circuli CAM & CBHQ tranfeuntes per puncta B, C, A; & B, C, H; erit ang. BAC $=$ BMC, & BHC $=$ BQC $=$ BFC $- b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times$ (BFC $+$ BMC); atqui in infinite parvis BMC : BFC $=$ BF : BM, & BQC : BFC $=$ BF : BQ; quare BMC $=$ BF $\times$ BFC : BM, & BQC $=$ BF $\times$ BFC : BQ $=$ BFC $- b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times$ (BFC $+$ BF $\times$ BFC : BM); hoc eft, $\frac{BF}{BQ} = 1 - b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times (1 + \frac{BF}{BM})$ vel $\frac{BM}{BQ} = \frac{BM}{BF} - b\sqrt{\frac{rr - yy}{aarr - bbyy}} \times (\frac{BM}{BF} + 1)$, aut [dando lineis nomina, BM $= m$, BQ $= q$, BF $= f$, faciendoque $b : a = r : t$, ut fit $ar = bt$, & $\sqrt{(aarr - bbyy)} = b\sqrt{(tt - yy)}$, appellandoque $\sqrt{(rr - yy)} = s$, & $\sqrt{(tt - yy)} = u$,] erit $\frac{m}{q} = \frac{m}{f} - \frac{ms}{fu}$

— s

No. CIII.

$-\frac{s}{u}$, hoc eſt, $mfu = muq - msq - fsq$; adeoque $q = mfu : (mu - ms - fs) =$ [ſi fiat $m : f = s : p$, ut ſit $mp = fs$], $mfu : (mu - ms - mp) = fu : (u - s - p) =$ BQ; & quia ſinus anguli HBQ eſt $= z = by : a$, erit $r : \frac{by}{a} = q$[BQ]$: \frac{bqy}{ar}$ [QH]; unde BH $= \sqrt{(BQ^2 - QH^2)} = \sqrt{(qq - \frac{bbqqyy}{aarr})} = q\sqrt{(aarr - bbyy)} : ar = bq\sqrt{(tt - yy)} : ar = qbu : ar = qu : t$.

CONSTRUCTIO.

Ducta FR perpendiculari ad AB productam, applicetur ad eandem AR recta MT $= ma : b = mt : r$, [quod fit ducendo FL perpendicularem ad BH, & faciendo angulum AMT $=$ LFB], fiatque ut TR ad TA, ſic BF ad quartam BQ; demiſſa ex Q perpendiculari QH ſuper rectam BH, erit H punctum in Diacauſtica ([a]).

Xxxxxx 3 *Alia*

([a]) Hæc Conſtructio ita demonſtratur. Ob arcum BC infinite parvum, centra circulorum BAM & BHQ ſunt in recta ad BC perpendiculari, id eſt in recta MBF, & anguli BAM, BHQ ſunt recti; & quia ſinus ang. ABM vel FBR eſt $= y$, exiſtente ſinu toto $= r$, erit $r : y =$ BM [m] : AM [$my : r$] $=$ BF [f] : FR [$fy : r$]. Hinc AB $= m\sqrt{(rr - yy)} : r = ms : r$, & BR $= f\sqrt{(rr - yy)} : r = fs : r$. Porro quia ſinus anguli FBL $= by : a$, erit $r : \frac{by}{a} =$ BF [f] : FL [$\frac{fby}{ar} = \frac{fy}{t}$]; unde BL $= f\sqrt{(tt - yy)} : t = fu : t$. Sed, ob triang. LFB, AMT ſimilia, eſt LF [$\frac{fy}{t}$] : BF [f] $=$ AM [$\frac{my}{r}$] : MT [$\frac{mt}{r}$]; item LF [$\frac{fy}{t}$] : BL [$\frac{fu}{t}$] $=$ AM [$\frac{my}{r}$]: AT [$\frac{mu}{r}$]. Hinc TR ſeu AT $-$ AB $-$ BR [$\frac{mu - ms - fs}{r}$] : TA [$\frac{mu}{r}$] $=$ BF [f] : $\frac{mfu}{mu - ms - fs} = q =$ BQ.

No. CIII.

ALIA CONSTRUCTIO.

Fiat ang. RFt = LFB, ſeu tantum BFt = LFR = RBH; tum capiatur Br tertia proportionalis ad AB & BR; fiatque ut tr ad tR, ſic BF ad BQ, aut BL ad BH ([b]).

([b]) Hæc Conſtructio, quæ exſtat N°. LVI, pag. 550, ita demonſtratur. Ob triang. LFB, RFt ſimilia, eſt FL $[\frac{fy}{t}]$: BL $[\frac{fu}{t}]$ = FR $[\frac{fy}{r}]$: tR $[\frac{fu}{r}]$. Sed AB $[\frac{ms}{r}]$: BR $[\frac{fs}{r}]$ = BR $[\frac{fs}{r}]$: Br $[\frac{ffs}{mr}]$. Hinc tr, ſeu tR — BR — Br $[\frac{fu}{r} - \frac{fs}{r} - \frac{ffs}{mr}$ ſeu $\frac{mfu - mfs - ffs}{mr}]$: tR $[\frac{fu}{r}]$ = BF $[f]$: $\frac{mfu}{mu - ms - fs} = q$ = BQ.

ARTICUL. XVIII.

Celeritates navis a quiete incboatas uſque ad maximam invenire.

Conf. N[i]. LVI, pag. 562; LXVI, pag. 658, & Art. XIII hujus.

PONATUR [*Fig.* 24] celeritas venti AB = a = MN = NT. Primus celeritatis gradus navi quieſcenti inductus ſit NS, celeritas navis jam aliquo uſque motæ IE = y; adeoque reſidua venti celeritas, qua in navem motam agit, CE = $a - y$; moles aquæ quovis inſtanti navis proræ reſiſtentis = $dx = T$; ſuperficies proræ ad ſubtenſam veli ut 1 ad m; moles aquæ æqualis ſuperficiei veli = mdx; pondus aquæ ad pondus aeris ut p ad 1; moles aeris quovis inſtanti ad velum adlabentis = mdx:

$= mdx : p = M$; moles navis $N = n$. Jam $M \times MN = M + N$ No. CIII.
in NS, adeoque $NS = M \times MN : (M + N) =$ [ob infinite ad sensum exiguam rationem $M : N$] $\frac{M}{N} \times MN = \frac{amdx}{pn}$. Porro quia incrementa celeritatum navis debent esse in ratione duplicata celeritatum venti, erit $AB^2 : CE^2 = aa : (a - y)^2 = NS \left[\frac{amdx}{pn}\right] : FH \left[\frac{(a-y)^2 . mdx}{apn}\right]$, incrementum scil. futurum celeritatis navis, nisi aqua resisteret. Fingatur navem incurrere celeritate $NT = a$ in molem aquæ T, & post adlapsum ad aquam moveri una cum aqua celeritate TS; erit N in $NT = N + T$ in TS, unde $TS = N \times NT : (N + T)$; ideoque $a - N \times NT : (N + T) = a - an : (n + dx) = adx : (n + dx) =$ [ob infinite ad sensum magnam rationem $n : dx$] $= adx : n =$ resistentiæ aquæ; quare cum resistentiæ sint ut quadrata celeritatum navis, erit $CI^2 : EI^2 = aa : yy = \frac{adx}{n} : \frac{yydx}{an} =$ resistentiæ quam patitur navis celeritate IE lata $= GH$; qua igitur demta ab $FH = (a - y)^2 mdx : apn$, relinquitur $FG = dy = ((a - y)^2 m - pyy) dx : apn$. Quare, ad habendam maximam celeritatem navis, faciendum $dy = 0$, hoc est $((a - y)^2 m - pyy) = 0$, sive $(a - y)^2 m = pyy$, & extrahendo radicem quadratam $(a - y)\sqrt{m} = y\sqrt{p}$; seu $a\sqrt{m} = y\sqrt{p} + y\sqrt{m}$, seu denique $y = a\sqrt{m} : (\sqrt{p} + \sqrt{m}) =$ [m existente haud multo majore minoreve 1, adeoque evanescente respectu p] $a\sqrt{m} : \sqrt{p}$. Ergo celeritates navium eodem vento motarum, cæteris paribus, sunt ut $\sqrt{m}$, seu ut radices subtensarum veli; non ut ipsæ subtensæ.

Posito $p : 1 = 841 : 1$, & $m = 1$, erit $y = [a\sqrt{m} : (\sqrt{p} + \sqrt{m})] = \frac{1}{30}a$; id est, ventus tricies celerior est celeritate navis maxima, ubi subtensa veli proræ latitudini æqualis.

Si directio venti AB [*Fig.* 25.] ad longitudinem navis CE sit obliqua, nec possit navis progredi per BD, sed tantum per BC; sitque $BD : BC = 1 : b$, celeritas navis $= z$, reperitur $dx : dz = apn$:

No. CIII. $= apn : aabm - 2abbmz + b^3mzz - pzz$ (a), adeoque pro celeritate maxima $z = a\sqrt{bm} : (\sqrt{p} + b\sqrt{bm})$; unde fit $y : z = \sqrt{p} + b\sqrt{bm} : \sqrt{bp} + \sqrt{bm}$; quæ ratio minor eſt ratione *Hugeniana* 1 ad $\sqrt{b}$. Vid. *Act. Lipſ.* A. 1695, p. 549 & 550. * *Hiſtoire des Ouvrages des Savans* Avr. 1694.

(a) Eſt enim moles aeris ad velum quovis inſtanti ſub angulo CDB adlabentis, ſive $M, = bmdx : p$, & celeritas qua navis ſe vento ſubducit $= bz$, hinc $aa : (a - bz)^2 =$ NS $[abmdx : pn]$: FH $[(a - bz)^2 bmdx : apn]$, a qua ſi dematur GH $= zzdx : an$, relinquetur FG $= dz = ((a - bz)^2 bm - pzz) dx : apn$.

* N°. LXVI, pag. 658, 659.

ARTICUL. XIX.

Inventio curvæ, cujus tangens abſcindit ex axe ſegmentum, quod ad tangentem habeat conſtantem rationem, puta ut n *ad* 1.

Conf. N^{us}. LVII, pag. 573 & ſeq.

SIt [*Fig.* 26 & 27] DC $= x$, AD $= nx$, DB $= y$, CB $=$
$+y - nx$
$\sqrt{(xx - yy)}$; AB $= -y + nx$ (a). Ex natura tangentis, diff.
$+y + nx$

CB

(a) Secundus caſus, ubi AB $= nx - y$, duplici modo poteſt contingere, nempe non ſolum ubi curva rectæ poſitione datæ AB concavitatem opponit, creſcentibus abſciſſis AB & decreſcentibus applicatis CB, ut in *Fig.* 26. Caſ. 2. Sed & quando convexitatem ipſi opponit, & abſciſſæ AB creſcunt decreſcentibus applicatis CB, ut in *Fig.* 27, Caſ. 2.

No.CIII.

CB $[\frac{xdx - ydy}{\sqrt{(xx-yy)}}]$: diff. AB $[\pm dy \mp ndx]$ = CB $[\sqrt{(xx-yy)}]$: BD $[y]$ (b); seu $xdx - ydy : \pm dy \mp ndx = xx - yy : y$. Hinc $xydx - yydy = \pm xxdy \mp nxxdx \mp yydy \pm nyydx$; vel, in primo & tertio casu, $ydx = xdy \mp nxdx \pm nyydx : x$; hoc est, [posito $y = zx$, adeoque $dy = zdx + xdz$] $zxdx = zxdx + xxdz \mp nxdx \pm nzzxdx$; hinc $o = ndz \mp ndx \pm nzzdx$, & $dz : (1 - zz) = \pm ndx : x$. Est vero $dz : (1-zz) = \frac{1}{2}dz : (1+z) + \frac{1}{2}dz : (1-z)$; unde elicitur $\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = x^{\pm n}$, seu $(1+z) : (1-z) = x^{\pm 2n}$ (c), adeoque $1 + z = x^{\pm 2n} - zx^{\pm 2n}$, id est, $z = (x^{\pm 2n} - 1) : (x^{\pm 2n} + 1)$. Hinc $x^{\pm 2n} + 1 : x^{\pm 2n} - 1 = x : zx = y$, hoc est, fiat ut aggregatum ipsius x ad potestatem $2n$ elevatæ & unitatis, ad eorumdem differentiam, sic x ad y. Unde patet, si n sit numerus, curvam fore geometricam; si irrationalis, transcendentalem.

NB.

(b) In casu secundo differentiale ipsius A B debet sumi negative $= dy - ndx$, quia, crescentibus AB, decrescunt CB; & vice versa. Hinc æquatio media $xydx - yydy = -xxdy + nxxdx + yydy - nyydx$ est erronea; quippe, mutatis signis terminorum posterioris membri, provenit eadem æquatio ac in primo casu.

(c) Vel generalius $\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{x^{\pm n}}{a^{\pm n}}$, assumpta a constante ad supplenda homogenea. Est enim $\int(\frac{1}{2}dz : (1+z)) + \int(\frac{1}{2}dz : (1-z))$, id est, $\frac{1}{2}l(1+z) - \frac{1}{2}l(1-z) = \int(\pm ndx : x) = \pm nlx \mp nla$, &, sumtis logarithmorum numeris, $\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{x^{\pm n}}{a^{\pm n}}$, sive $\frac{1+z}{1-z} = \frac{x^{\pm 2n}}{a^{\pm 2n}}$, & $z = (x^{\pm 2n} - a^{\pm 2n}) : (x^{\pm 2n} + a^{\pm 2n}) = (\pm x^{2n} \mp a^{2n}) : (x^{2n} + a^{2n})$.

No. CIII. NB. Primæ formulæ prorsus convenit media, si B D fiat major quam A D ([d]).

([d]) Etiamsi BD non sit major quam AD, id est, etiamsi punctum A, unde sumitur segmentum a tangente resectum, non jaceat inter puncta B & D; tamen casus secundus eodem modo resolvitur ac primus, ut apparet ex Nota b.

ARTIC. XX.

Invenire Curvam, cujus curvedo in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est, quæ ab appenso pondere flectitur in rectam ([a]).

Confer. N^{us}. LVIII, pag. 599 & 600.

QUia nominatis abscissa $= x$, applicata $= y$, arcu curvæ s, & posita ds constante, radius circuli osculatoris, curvedini reciproce proportionalis, est $dxds : -ddy$; habebitur, ex hypothesi, hæc æquatio $-aaddy = sdsdx$. Ponatur $sdx = adt$, erit $-addy = dtds$, & integrando $ads - ady = tds$ ([b]), unde $ds = ady : (a - t)$, & $ds^2 = dx^2 + dy^2 = aady^2 : (aa - 2at + tt)$.

([a]) Hanc identitatem non inveni demonstratam.

([b]) Quantitas constans, in integratione æquationis $-addy = dtds$ addenda, generalius potest poni $= bds$, ut sit $bds - ady = tds$; unde emerget $ds = ady : (b - t)$, & $dy = (b - t)\, dx : \sqrt{(aa - bb + 2bt - tt)}$, & iterum $ds\, [= ady : (b - t)] = adx : \sqrt{(aa - bb + 2bt - tt)}$, & tandem, positis reliquis ut antea, $a^3 : 2qq = \int(adt : \sqrt{(aa - bb + 2bt - tt)})$. Sed propterea constructio non mutabitur, nisi quod EC non facienda sit $= t$, sed $a - b + t$.

tt), id est, $(aa - 2at + tt)\,dx^2 = (2at - tt)\,dy^2$. Hinc $dy = (a - t)\,dx : \sqrt{(2at - tt)}$, & $ady : (a - t) = adx : \sqrt{(2at - tt)} = ds$. Jam quia $sdx = adt$, erit differentiando [positis dx æqualibus ([c])] $dsdx = addt$, seu $ds = addt : dx$; ergo $adx : \sqrt{(2at - tt)} = addt : dx$, sive $dx^2 = ddt\,\sqrt{(2at - tt)}$. Sit $qdt = adx$; erit, ob dx constantem, $qddt + dtdq = 0$, seu $ddt = -dtdq : q$, & $dx^2 = [ddt\,\sqrt{(2at - tt)} =] - dtdq\,\sqrt{(2at - tt)} : q = qqdt^2 : aa$, hinc $-aadq : q^3 = dt : \sqrt{(2at - tt)}$ & $a^2 : 2qq = \int(adt : \sqrt{(2at - tt)})$. No. CIII.

CONSTRUCTIO.

Fiat quadrans circuli AEDB [*Fig.* 28], radio $AB = a$. Sit $EC = t$, erit $CD = \sqrt{(2at - tt)}$, arcus $ED = \int(adt : \sqrt{(2at - tt)})$. In DC producta abscindatur CH = mediæ proportionali inter AB & $aa : 2ED = q$; sumta $EI = a$, fiat rectangulum EM = spatio $ECHK = \int qdt = ax$, erit $EP = x$. Porro, ducta AN normali ad AD, ut sit $CD\,[\sqrt{(2at - tt)}] : AD\,[a] = AC\,[a - t] : AN = \left[\frac{aa - at}{\sqrt{(2at - tt)}}\right]$, & abscindatur

Yyyyyy 2 PQ =

([c]) Neminem debet morari, quod, differentiando æquationem $sdx = adt$, dx sumatur constans, cum antea ds posita fuit constans in æquatione $-aaddy = sdsdx$. Nam æquatio differentialis $sdx = adt$, cum sit primi gradus, per se nullam quantitatem differentialem constantem supponit, adeoque in illa quælibet quantitas differentialis pro constante assumi potest. Sed etiam sine nova differentiatione potest res confici, & comparatio institui inter duas æquationes $sdx = adt$, & $ds = adx : \sqrt{(2at - tt)}$, hoc modo. Per priorem est $dx = adt : s$, qui valor ipsius dx in altera substitutus præbet $ds = aadt : s\sqrt{(2at - tt)}$, sive $sds = aadt : \sqrt{(2at - tt)}$, & integrando $\frac{1}{2}ss = \int(aadt : \sqrt{(2at - tt)}) = ap$ [posito $\int(adt : \sqrt{(2at - tt)}) = p$]. Hinc $s = \sqrt{2ap} =$ [per priorem æquationem] $adt : dx$; unde $dx = adt : \sqrt{2ap}$; quæ æquatio eodem recidit ac ista $a^2 : 2qq = \int(adt : \sqrt{(2at - tt)}) = p$, sive $q = \sqrt{a^3} : \sqrt{2p} = aa : \sqrt{2ap}$; in qua, ob factam æquationem $qdt = adx$, supponitur $dx = qdt : a = adt : \sqrt{2ap}$.

No. CIII. $PQ = AN$, erit area $QPEL = \int((aadx - atdx) : \sqrt{(2at - tt)}) = ay$; idcirco facta $ER = a$, & rectangulo $ES = QPEL = ay$; erit RS, seu $PT = y$; dum $EP = x$; adeoque punctum I in curva quæsita ET; in quo puncto radius circuli osculatoris, sive $dxds : - ddy$ erit q, & $sq = aa$ (d).

(d) Est enim $sdx = adt$, & qdt vel $sq = aa$. $= adx$. Hinc $sqdtdx = aadtdx$,

ARTIC. XXI.

Demonstratio analytica Constructionis mechanicarum curvarum omnium, ope Logarithmicæ & alterius curvæ algebraïcæ per tractionem describendæ; quæ tradita est in Actis Lipf. *1696, pag. 263.* *

Sint [*Fig.* 29] $CG = AE = x$, $GD = u$, longitudo fili $FGH = AC = GE$, $GH = FE = p$, $DH = \sqrt{(pp - uu)}$; æquatio construenda $ady = tdx$; ubi t detur per x. Ex natura tangentis GH est diff. HD $[\frac{pdp - udu}{\sqrt{(pp - uu)}}]$: diff. CD $[dx + du] =$ HD $[\sqrt{(pp - uu)}]$: GD $[u]$; hinc $updp - uudu = ppdx - uudx + ppdu - uudu$, seu $updp = ppdx - uudx + ppdu$. Sit $bu = pq$, & $du = (pdq + qdp) : b$ erit $ppqdp : b = ppdx - ppqqdx \cdot bb + p^3dq : b + p^2qdp : b$, sive $ppdx - ppqqdx : bb = - p^3dq : b$, aut $bbdx - qqdx = - bpdq$; seu $dx : p = - bdq$: (bb

* N°. LXX, pag. 727.

$(bb - qq)$ (a). Pone $bb - qq = b^4 : rr$, erit, $dx : p = - dr : \sqrt{(rr - bb)}$. Pone $r = (zz + bb) : 2z$, erit $dx : p = \pm dz : z$, seu $abdx : p = \pm abdz : z$. Fiat jam comparatio inter tdx & $abdx : p$; item inter ady & $\pm abdz : z$, eritque $t = ab : p$, seu $p = ab : t$, & $dy = \pm bdz : z$, adeoque $y =$ Log. z, vel $=$ Log. $bb : z$, cum subtangens est b. Habetur autem z ex p, u, q, & r; nempe $z = b\sqrt{\frac{p - u}{p + u}}$ (b); quod suppeditat Constructionem paulo differentem ab ea, quæ præscribitur in dicto loco *Actorum Lips.* Fiet autem prorsus eadem Constructio, si statuatur æqualitas inter tdx & $2abdx : p$, sicut inter ady & $2abdz : z$; tunc enim erit $p = 2ab : t$, & $y =$ [ponendo subtangentem Logarithmicæ $b = 1$] Log. $zz =$ Log. $\frac{p - u}{p + u} = l(p - u) - l(p + u)$; quod est id quod præcipit dicta Constructio. No. CIII.

(a) Sine novis substitutionibus hæc quantitas $- bdq : (bb - qq)$ resolvi potest in duo differentialia logarithmica $- \frac{1}{2} dq : (b - q)$ & $- \frac{1}{2} dq : (b + q)$; unde erit [ponendo $tdx = 2abdx : p$] $- abdq : (b - q) - abdq : (b + q) = ady$, & $y = l(b - q) - l(b + q) = l\frac{b - q}{b + q} =$ [quia $q = bu : p$] $l\frac{p - u}{p + u}$.

(b) Quia $q = bu : p$, est $bb - qq = (bbpp - bbuu) : pp = b^4 : rr$. Hinc $r = bp : \sqrt{(pp - uu)} = (zz + bb) : 2z$, id est, $zz = 2bpz : \sqrt{(pp - uu)} - bb$, & $z = bp : \sqrt{(pp - uu)} \pm \sqrt{(bbpp : (pp - uu) - bb)} = (bp \pm bu) : \sqrt{(pp - uu)} = b\sqrt{\frac{p - u}{p + u}}$ vel $b\sqrt{\frac{p + u}{p - u}}$.

ARTICUL. XXII.

Observatiuncula singularis ad praxin Calculi differentialis, ejusque usus in radiis osculi inveniendis.

Confer. N^us. XCIV, pag. 888, & CI, pag. 975.

SI latus quadrati minoris sit x, & majoris $x + dx$; erit quadratum minus xx, & majus $xx + 2xdx + dx^2$; adeoque differentiale ipsius xx est $2xdx + dx^2$; hoc est, [quia ordinarie dx infinities minus est ipso x] $2xdx$, omisso dx^2. Sed ubi x infinities minor est ipsa dx, [quod ubique fit in scaturigine quantitatis fluentis x, quando minor x est absolute nihil, seu o, & major x est $o + dx$], patet $2xdx$ potius evanescere debere respectu dx^2, adeoque differentiale ipsius xx non esse $2xdx$, sed potius dx^2. Ex. gr. in quadrante circuli, posito radio r, & tangente minore y, majore $y + dy$; erit secans minor $\surd(rr + yy)$, & differentia secantium $ydy : \surd(rr + yy)$, quamdiu videlicet y est quantitas. Sed si applicatio fieri debeat ad initium quadrantis, ubi y est o, & minor secans radius; erit secantium differentia, id est, differentia radii & proximæ secantis, sive lineola illa quæ designat conatum centrifugum corporis in circulo gyrantis, seu denique subtensa evanescens anguli contactus, non $ydy : \surd(rr + yy)$ sed $dy^2 : 2\surd(rr + yy) = dy^2 : 2r$. Fingatur quadrans hic applicari curvæ alicui BE [*Fig.* 30], ita ut punctum B sit in curvæ peripheria, BA curvæ perpendicularis, & BC coincidat cum tangente: patet si BD quoque cadat super ipsam curvam, seu si anguli contactus utrinque æquentur; fore hunc circulum illum ipsum,

ipſum, qui curvam hanc oſculari dicitur: unde ad radium oſculi inveniendum, nil aliud requiritur, quam ut ſubtenſa anguli contactus quoque in ipſa curva [obſervata hac differentiandi regula] quæratur, & deinde cum $dy^2 : 2r$ adæquetur, ad habendum r. Prius autem relatio punctorum curvæ reſpectu rectæ perpendicularis per datum punctum tranſeuntis quærenda hoc modo: Sint BE, CG [*Fig.* 31] duæ applicatæ, BF curvæ perpendicularis occurrens productæ CG in H, & CD normalis ipſi BF: vocentur $AE = p$, $EB = q$, $EF = m$, $AF = p + m = l$, $BF = n = \sqrt{(qq + mm)}$, $AG = t$, $GC = z$, $BD = x$, $DC = y$. Ob ſimilitudinem triangulorum BEF, FGH, CDH; eſt $EF[m] : EB[q] = GF[t - l] : GH[\frac{qt - ql}{m}] = CD[y] : DH[\frac{qy}{m}]$; item $EF[m] : BF[n] = GF[t - l] : FH[\frac{nt - nl}{m}] = CD[y] : CH[\frac{ny}{m}] = GC + GH = z + (qt - ql) : m$; unde $ny = mz + qt - ql$. Sed $BD + DH[x + qy : m] = BF + FH[n + (nt - nl) : m]$; quare $mx + qy = mn + nt - nl =$ [ob $l - m = p$] $nt - np$; hinc $t = p + (mx + qy) : n$; quo valore in æquatione $ny = mz + qt - ql$ ſubſtituto, habetur $ny = mz + pq + (qqy + qmx) : n - ql = mz - mq + (qqy + qmx) : n$. Hinc $z = q + (nny - qqy) : mn - qx : n =$ [ob $nn - qq = mm$] $q + my : n - qx : n$. (*). Ergo in æquatione, quæ relationem t ad z exprimit, loco t & z ponantur eorum

No. CIII.

(*) Ductis DO ipſi BE, & DP ipſi AG parallelis; ipſæ AG [t] & GC [z] facillime ſic determinantur: Ob parallelas BE, DO, eſt $BF[n] : EF[m] = BD[x] : EO[\frac{mx}{n}]$. Item $BF[n] : BE[q] = DF[n - x] : DO$ ſeu $PG[q - qx : n]$, & ob triangula BEF, DPC ſimilia, $BF[n] : BE[q] = DC[y] : DP$ ſeu $OG[\frac{qy}{n}]$; item $BF[n] : EF[m] = DC[y] : CP[\frac{my}{n}]$ quare $AG = AE + EO + OG = p + mx : n + qy : n = t$, & $GC = PG + CP = q - qx : n + my : n = z$.

No. CIII. rum valores, ubi præter indeterminatas x & y non niſi conſtantes reperiuntur p, q, m, n. Hac ergo differentiata juxta ſpecialem noſtram regulam, invenitur ratio dx ad dy in ipſo puncto B. Non vero opus eſt progredi in hoc negotio, niſi ad illa membra in quibus reperitur dy^2, neglectis omnibus reliquis ubi eſt $dxdy$ dx^2, dy^3, &c.; cum hæc illo ſint infinities minora.

Exemplum in Parabola.

Æquatio eſt $at = zz$; facta ſubſtitutione habetur $ap + (aqy + amx):n = qq + (2qmy - 2qqx):n + (mmyy - 2qmxy + qqxx):nn$, & differentiando $(aqdy + amdx):n = (2qmdy - 2qqdx):n + mmdy^2:nn$; & quia ex natura Parabolæ, ob $a = 2m$, deſtruunt ſe mutuo $aqdy:n$ & $2mqdy:n$; fiet, his eliſis, $amdx = -2qqdx + mmdy^2:n$, ſive $mmdy^2:n = amdx + 2qqdx = 2mmdx + 2qqdx = 2nndx$, hoc eſt, $dx = mmdy^2:2n^3$. Supra vero in circulo reperta fuit CD, ſeu $dx = dy^2:2r$. Quare $mmdy^2:2n^3 = dy^2:2r$, hoc eſt, $r = n^3:mm$. Confer. *Acta Lipſ.* m. Jan. 1691, pag. 22 *.

Generaliter pro omnibus Paraboloidibus cujuſvis gradus: Eſto $a^{s-1}t = z^s$; facta ſubſtitutione loco t & z, habetur $a^{s-1}p + (a^{s-1}qy + a^{s-1}mx):n = q^s + (sq^{s-1}my - sq^s x):n + \frac{s.s-1}{2} q^{s-2}mmyy:nn$, &c. [nec enim opus eſt procedere ulterius]; ubi deletis utrinque $a^{s-1}qy:n$ & $sq^{s-1}my:n$, [propter $a^{s-1} = sq^{s-1}m$, ex natura Parabolæ], & differentiatis reliquis, fit $a^{s-1}mdx:n = -sq^s dx:n + \frac{s.s-1}{2} q^{s-2}mmdy^2:nn$, ſeu $dx = \frac{s.s-1}{2} q^{s-2}mmdy^2:(a^{s-1}mn + sq^s n) =$ [propter $q^s = a^{s-1}p$] $\frac{s.s-1}{2} q^{s-2}mmdy^2:(a^{s-1}mn + sa^{s-1}pn) =$ [ob $a^{s-1} =$

s q

* N°. XLI, pag. 441.

$sq^{s-2}m$] $\frac{1}{2}(s-1)mdy^2:(mn+spn)=$[ex hyp.] $dy^2:2r$; unde habetur $r=(mn+spn):(sm-m)=$[ob $sp=$ subtangentem Parabolæ, quæ vocetur u] $(mn+un):(sm-m)$ (b); quod hanc facillimam constructionem suppeditat. Ex puncto I, [*Fig.* 32] ubi tangens BI secat axem, excitetur axi perpendicularis IK, cui occurrat BF in K, erit $FK=sr-r=(mn+un):m$. Conf. Constructio particularis in Parabola *Act. Lipſ.* 1692, p. 210 *, & generalis D. *Marcb.* HOSPITALII, *Anal. Infin. parv.* p. 85. No. CIII.

Hoc pacto radius osculi cujusvis curvæ in ejus vertice cum x & $y=0$, & curva ad axem perpendicularis dicto citius invenitur. Ex. gr. *In Parabola*, $ax=yy$; etenim differentiando habetur $adx=dy^2$, & $dx=dy^2:a=dy^2:2r$; unde $r=\frac{1}{2}a$.

In Ellipſi aut Hyperbola, $abx\mp bxx=ayy$; differentiando fit $abdx=ady^2$, seu $dx=dy^2:b=dy^2:2r$; unde $r=\frac{1}{2}b$.

In Curva $y^3-x^3=axy$; differentiando habetur $dy^3=adxdy$, seu $dy^2=adx$; id est, $dx=dy^2:a=dy^2:2r$; unde $r=\frac{1}{2}a$. Vid. HOSPITAL. *Anal. inf. parv.* pag. 15.

NB. Quia differentiando scribendum est dy pro y, dy^2 pro y^2, dy^3 pro y^3, $dxdy$ pro xy, dx^2dy pro x^2y, &c. potest ipsa æquatio brevitatis ergo sine mutatione retineri, & tantum per x & y quantitates infinite parvæ intelligi; per y tamen etiam quantitas infinite

(b) Si pro a^{s-1} substituatur $sq^{s-2}m$, quæ ipsi æqualis est, ex natura Parabolæ; æquatio transit in hanc $spq^{s-2}m+(sq^{s-1}my+sq^{s-2}mmx):n=q^s+(sq^{s-1}my-sq^s x):n+\frac{s.s-1}{2}q^{s-2}mmyy:nn$ seu $spm+smmx:n=qq-sqqx:n+\frac{s.s-1}{2}mmyy:nn$, vel [ob $mm+qq=nn$] $spm+snx=qq+\frac{s.s-1}{2}mmyy:nn$, quæ differentiata dat $sndx=\frac{s.s-1}{2}mmdy^2:nn$, id est, $dx=\frac{1}{2}(s-1)mmdy^2:n^3=dy^2:2r$. Hinc $r=n^3:(s-1)mm$.

* N°. XLIX, pag. 496.

No. CIII. infinite major quam per x: tum quantitates homogeneæ invicem comparandæ, reliquis omnibus infinite minoribus neglectis, ad habendum x, quod denique æquandum ipsi $yy:2r$. Ratio operationis ex eo perspicitur, quod in initio ipsarum x & y, coincidant x & dx, nec non y & dy ([c]).

Exemplum in Conchoide.

Æquatio est $x^4 - 2(a+c)x^3 + (4ac+cc+yy)xx - 2a(cc+yy)x + aayy = 0$, ubi, positis x & y infinite parvis, sed tamen x infinities adhuc minore quam y, patet omnia membra evanescere, præter duo ultima $-2accx + aayy$; sic ut tota æquatio sit $-2accx + aayy = 0$; e qua habetur $x = ayy:2cc = yy:2r$; unde tandem fit $r = cc:a$ in vertice. Et generaliter in quovis puncto $r = n \times (2p^3m - 3appm - 3cppm + 4acpm + ccpm + pqqm - ppqq - accm + 2apqq - aqqm - aaqq):(6apqq + 6cpqq - 6ppqq - 4acqq - ccqq - q^4 - 4pqqm - ppmm + 2apmm + 4aqqm - aamm)$.

Ad tegendum artificium & compendifaciendam solutionem, in æquatione curvæ, quæ relationem coordinatarum t & z, vel p & q exprimit, neglecto termino cognito si adsit, substitue tantum loco t^s vel p^s, $+ sp^{s-1}mx:n + \frac{s.s-1}{2} p^{s-2}$

([c]) Hoc ipsum, sine ope calculi differentialis, ex Elementis EUCLIDIS colligi potest. Ex his enim constat, quod si ex dato puncto C [*Fig.* 33] ad circuli peripheriam ducatur tangens BC, & alia quæ eandem secet in punctis D, F; rectangulum sub CD & CF futurum sit æquale quadrato tangentis BC; unde sequitur, si puncta B & D sint infinite propinqua, ut ratio inter BC & ED, nec non inter CF & DF, & inter CD & BE fiat ratio æqualitatis; fore rectangulum sub BE & DF æquale quadrato ipsius ED; adeoque si ponamus rectam secantem CF transire per centrum Circuli A, & arcum circularem BD coincidere cum arcu elementari curvæ cujusdam, cujus coordinatæ initiales sint BE $= x$, ED $= y$, posito axe BA in puncto B ad curvam BD perpendiculari, & radius circuli BA sit $= r$, erit $2rx = yy$, sive $x = yy:2r$, aut $r = yy:2x$, & $x:y = y:2r$. Patet etiam, ob angulum BDE infinite parvum, abscissam BE [x] infinities esse minorem applicata ED [y].

$p^{s-2}qqyy:nn$; loco z^u vel q^u, $-uq^ux:n+\frac{u.u-1}{2}q^{u-2}mmyy:$ No. CIII.
nn, & loco t^sz^u vel p^sq^u, $(sp^{s-1}q^umx-up^sq^ux):n+$
$(\frac{s.s-1}{2}p^{s-2}q^{u+2}yy+sup^{s-1}q^umyy+\frac{u.u-1}{2}p^sq^{u-2}mmyy):$
nn; omissis videlicet omnibus reliquis terminis, in quibus aut neutra indeterminatarum x & y, aut y unius, aut trium pluriumve, aut x duarum, trium, pluriumve dimensionum reperitur; quo facto erit valor ipsius $yy:2x$ in p, q, m, n radius quæsitus osculi.

Vel compendiosius, ponatur loco $p^s=+sp^{s-1}mnx+s.(s-1)p^{s-2}qqyy$, loco $q^u=-uq^unx+u(u-1)q^{u-2}mmyy$; loco $p^sq^u=+sp^{s-1}q^umnx-up^sq^unx+s(s-1)p^{s-2}q^{u+2}yy+2sup^{s-1}q^umyy+u(u-1)p^sq^{u-2}mmyy$, & tum valor $yy:x$ erit radius osculi. (d).

(d) Ut ratio hujus operationis manifesta fiat, fingatur æquatio generalis exprimens relationem coordinatarum AE, EB, esse $o=Ap^aq^b+Bp^cq^e+$ &c. ubi A, B, &c. significant coefficientes terminorum; a, b, c, e, &c. indices potestatum indeterminatarum p & q; quorum aliqui possunt esse $=o$. Designetur quilibet horum terminorum [neglecto coefficiente] per p^sq^u. Quibus positis, æquatio exprimens relationem coordinatarum AG, GC erit $At^az^b+Bt^cz^e+$ &c. $=o$, quorum terminorum singuli neglectis coefficientibus exprimantur etiam per t^sz^u. Sed quia $t=p+(qy+mx):n$, & $z=q+(my-qx):n$; erit $t^s=p^s+sp^{s-1}\times(qy+mx):n+\frac{s.(s-1)}{2}p^{s-2}\times(qqyy+2mqyx+mmxx):nn+$ &c. Similiter erit $z^u=q^u+uq^{u-1}\times(my-qx):n+\frac{u(u-1)}{2}q^{u-2}\times(mmyy-2mqyx+qqxx):nn+$ &c. adeoque $t^sz^u=p^sq^u+sp^{s-1}q^u\times(qy+mx):n+\frac{s.(s-1)}{2}p^{s-2}q^u\times(qqyy+$ &c.$):nn+up^sq^{u-1}\times(my-qx):n+sup^{s-1}q^{u-1}\times(qmyy+$ &c.$):nn+\frac{u(u-1)}{2}p^sq^{u-2}\times(mmyy-$ &c.$):nn+$ &c. Ubi notandum primo, quia per

No. CIII. Vel adhuc brevius: æquatione tota ad unam partem constituta, & neglecto termino quem neutra indeterminatarum ingreditur; fiat fractio, in cujus numeratore pro singulis fp^s membris reponatur $+fsp^{s-1}m$, & in denominatore $+(1-s)sfp^{s-2}qq$; pro singulis gq^u in numeratore $-guq^u$; in denominatore $+(1-u)$

per x & y intelliguntur quantitates infinite parvæ, quarum tamen y infinities major est quam x; posse omnes terminos per &c. designatos negligi; deinde posse etiam negligi terminum $p^s q^u$, in quem neutra indeterminatarum x & y ingreditur, quia omnes termini $p^s q^u$ simul sumti, id est, $Ap^a q^b + Bp^c q^e +$ &c. $= 0$; tertio posse quoque negligi terminos $sp^{s-1} qu \times qy : n$, seu $sp^{s-1} q^{u+1} y : n$, quod ex natura rectæ BF ad curvam perpendicularis consequitur; nam $dp : dq = q$ [BE]: m [EF]. Sed æquatio generalis differentiata præbet $Aap^{a-1} q^b dp + Bcp^{c-1} q^e dp +$ &c. $+ Abp^a q^{b-1} dq + Bep^c q^{e-1} dq +$ &c. $= 0$; id est, $dp : dq = Abp^a q^{b-1} + Bep^c q^{e-1} +$ &c: $- Aap^{a-1} q^b - Bcp^{c-1} q^e -$ &c. $= q : m$; multiplicatis extremis & mediis, omnibusque terminis ad unam partem transpositis, erit $Ambp^a q^{b-1} + Bmep^c q^{e-1} +$ &c. $+ Aap^{a-1} q^{b+1} + Bcp^{c-1} q^{e+1} +$ &c. $= 0$, id est, substitutis s & u pro a & b, item pro c & e &c. erunt omnia $mup^s q^{u-1} + sp^{s-1} q^{u+1}$ per suos respective coefficientes multiplicata $= 0$. Restabunt igitur, in æquatione generali, soli termini qui per x & yy multiplicantur, nempe $sp^{s-1} q^u mx : n + s(s-1)p^{s-2} q^{u+2} yy : 2nn - up^s q^u x : n + sup^{s-1} q^u myy : nn + u(u-1)p^s q^{u-2} mmyy : 2nn = t^s z^u$. Quia vero omnia $t^s z^u = 0$, erunt illa adhuc $= 0$, si per $2nn$ multiplicentur, aut pro singulis $t^s z^u$ ponatur $2sp^{s-1} q^u mnx + s(s-1)p^{s-2} q^{u+2} yy - 2up^s q^u nx + 2sup^{s-1} q^u myy + u(u-1)p^s q^{u-2} mmyy$; ex quibus omnibus, si eruatur valor ipsius x, erit $r = yy : 2x$, vel si pro $2x$ ponatur x, ita ut sit $t^s z^u = sp^{s-1} q^u mnx + s(s-1)p^{s-2} q^{u+2} yy - up^s q^u nx + 2sup^{s-1} q^u myy + u(u-1)p^s q^{u-2} mmyy$, erit $r = yy : x$.

$- u)\,ugq^{u-2}mm$; pro ſingulis $hp^s q^u$, in numeratore $hsp^{s-1}q^u m$ No. CIII.
$- hup^s q^u$, in denominatore $+(1-s)hp^{s-2}q^{u+2} - 2suhp^{s-1}q^u m$
$+(1-u)up^s q^{u-2}mm$; eritque, ut denominator fractionis ad ejus numeratorem, ſic u ad r, ſeu BF ad radium oſculi.

Seu ſi variatis litteris, more conſueto, æquatio exprimatur in x & y; denotante x abſciſſam, y applicatam, & inſuper z ſubperpendicularem EF, nec non exponens poteſtatis x in quolibet membro dicatur m, ipſius y in quolibet membro n; reponendum erit pro ſingulis fx^m, $+fmx^{m-1}z$ in numeratore, & $+(1-m)mfx^{m-2}yy$ in denominatore; pro ſingulis gy^n, $-gny^n$ in numeratore, & $+(1-n)ngy^{n-2}zz$ in denominatore; pro ſingulis $hx^m y^n$, in numeratore $hmx^{m-1}y^n z - hnx^m y^n$ & in denominatore $+(1-m)mhx^{m-2}y^{n+2} - 2mnhx^{m-1}y^n z + (1-n)nhx^m y^{n-2}zz$. Tum vero ut denominator ad numeratorem, ſic BF ad radium oſculi. Quæ eſt Regula exhibita in *Act. Lipſ.* 1700, pag. 508 & ſeqq. *.

Si Curva in initio ipſarum x axi perpendicularis, radius oſculi in vertice ſic invenitur. In æquatione naturam curvæ exprimente ponatur pro x ubique $yy:2r$. & ſublatis fractionibus dividatur æquatio per y quoad fieri poteſt; quo facto

1°. Si y evaneſcat, vel ex tota æquatione, vel ex duobus tantum pluribuſve ejus membris, rejectis reliquis, quæratur valor ipſius r ſecundum illa quæ remanent.

2°. Si y evaneſcat ex uno ſolo, deleantur omnia reliqua, præter illud, vel illa, in quo, vel quibus, y minimum dimenſionum numerum habet; ac quæratur tum valor ipſius y exprimendus per fractionem aliquam, cujus numerator unum tantum, denominator aut unum aut plura membra habere poteſt:

α. Si r in numeratore tot vel plures dimenſiones habet, quot habet ad ſummum in denominatore, tum $r = 0$.

β. Si r non reperiatur in numeratore, $r = \infty$.

* N°. XCIV, pag. 888.

No. CIII. γ. Si r in numeratore & plures habet dimensiones & pauciores, quam alicubi habet in denominatore, $r = 0$ & ∞ ([e]).

Hæc

([e]) Hæc regula paulo aliter enuntiata sic facile demonstratur. Sit æquatio generalis naturam curvæ exprimens $Ax^a y^b + Bx^c y^e + Cx^f y^g + Dx^h y^k +$ &c. $= 0$. Substituatur ubique $yy:r$ pro x, [ubi per r intelligatur non radius, sed diameter circuli osculatoris] & habebitur $Ay^{2a+b} r^{-a} + By^{2c+e} r^{-c} + Cy^{2f+g} r^{-f} + Dy^{2h+k} r^{-h} +$ &c. $= 0$. In hac æquatione seligantur termini, in quibus y est minimarum dimensionum; hi erunt vel unus, vel plures.

1°. Si plures, ex. gr. tres, designentur illi per $Ay^{2a+b} r^{-a} + By^{2c+e} r^{-c} + Cy^{2f+g} r^{-f}$; positis nempe $2a + b = 2c + e = 2f + g = 2h + k - l$, &c. existentibus l &c. numeris affirmativis; dividatur æquatio per y^{2a+b}; eritque $Ar^{-a} + Br^{-c} + Cr^{-f} = 0$; nam quia y supponitur $= 0$, reliqui termini $Dy^l +$ &c., in quibus y reperitur, evanescunt; radix igitur æquationis $Ar^{-a} + Br^{-c} + Cr^{-f} = 0$, dabit valorem finitum diametri circuli osculatoris.

2°. Si in unico tantum termino reperitur y minimarum dimensionum, sit ille $Ay^{2a+b} r^{-a}$, dividatur æquatio per y^{2a+b}; eritque $Ar^{-a} + By^{2c+e-2a-b} r^{-c} + Cy^{2f+g-2a-b} r^{-f} + Dy^{2h+k-2a-b} r^{-h} +$ &c. $= 0$. Ubi statim liquet r non posse habere valorem finitum: evanescerent enim, ob y infinite exiguam, omnes termini præter Ar^{-a}, qui solus foret $= 0$, contra hypothesin. Sunt igitur adhuc alii termini, [unus vel plures,] in quibus y reperitur minimarum dimensionum cum termino Ar^{-a} comparabiles: ponatur $2c + e - 2a - b = l$; $2f + g - 2a - b = m$; $2h + k - 2a - b = n$, erit $Ar^{-a} + By^l r^{-c} + Cy^m r^{-f} + Dy^n r^{-h} +$ &c. Hic si inter numeros l, m, n, &c. solus l sit omnium minimus, erit $Ar^{-a} + By^l r^{-c} = 0$, reliquis terminis $Cy^m r^{-f} + Dy^n r^{-h}$, &c. evanescentibus; hinc $-Ar^{c-a} : B = y^l = 0$; quod ostendit, si $c - a$ sit numerus affirmativus, esse $r = 0$; sed si sit negativus, esse $r = \infty$.

3°. Si duo indices sint minimi & æquales, puta $l = m$; erit $Ar^{-a} + By^l r^{-c} + Cy^l r^{-f} = 0$,

reli-

Hæc ex occasione observationis quod pro differentiali ipsius xx aliquando non ponendum sit $2xdx$, sed dx^2. Altera observatio est, quod loco differentialis xx, nonnunquam ponendum sit nec $2xdx$ nec dx^2, solum, sed potius utrumque $2xdx + dx^2$; nempe tum cum x determinatur ad aliquem valorem, in quo ipsum $2xdx$ ab alia æquationis parte destruitur. Sic differentiale $\sqrt{(2ax - xx)}$, in casu $x = a$, non est $(adx - xdx) : \sqrt{(2ax - xx)} = 0\, dx : a$; sed potius $(2adx - 2xdx - dx^2)$, $2\sqrt{(2ax - xx)} = - dx^2 : 2a$; quia quamvis dx^2 evanescit respectu $2xdx$, non tamen evanescit respectu $2adx - 2xdx$; quin potius hoc, ceu purum nihil, evanescit respectu illius. Hinc radius osculi, ex. gr. in Ellipsi, reperitur ad summum punctum, cum $x = \frac{1}{2}a$, semissi nempe axis transversi. Æquatio est $abx - bxx = ayy$; differentiando habetur $abdx - 2bxdx - bdx^2 = 2aydy$; id est, [quia $abdx$ & $-2bxdx$ se destruunt] $-bdx^2 = 2aydy$, & $dy = -bdx^2 : 2ay = -bdx^2 : 2a\sqrt{(bx - bxx : a)} = -bdx^2 : a\sqrt{ab}$, sive $-dy = bdx^2 : a\sqrt{ab} = dx^2 : 2r$; unde $r = a\sqrt{ab} : 2b$ (f). No. CIII.

reliquis terminis præ his evanescentibus, hinc $-Ar^{-a} : (Br^{-c} + Cr^{-f}) = y^l = 0$, vel $-A : (Br^{a-c} + Cr^{a-f}) = 0$; unde sequitur 1°. si $a - c$, & $a - f$ sint numeri negativi fore $r = 0$, 2°. Si sint affirmativi fore $r = \infty$. 3°. Si alteruter numerorum $a - c$ & $a - f$ sit affirmativus, & alter negativus; hoc est, si a sit inter c & f medius, fore r & $= 0$, & $= \infty$.

(f) Ponitur $-dy = dx^2 : 2r$, loco $dx = dy^2 : 2r$; quia æquatione ab axe transverso Ellipsis ad axem conjugatum translata, dx transit in $-dy$, & dy in dx.

ART I.

No. CIII.

ARTICUL. XXIII.

Inventio Subtangentis & Subnormalis per præcedentem Methodum.

Conf. N^us. XCIV, pag. 891.

QUærenda ſit tangens in puncto B [*Fig.* 34]? Ducatur per B recta BH parallela axi, & poſitis conſtantibus $AE = x$, $BE = y$, conſiderentur BH & HI ut indeterminatæ, quarum illa ſit $= t$, hæc $= z$; erit ergo $AL = x + t$, & $LI = y + z$: cum igitur eadem ſit relatio inter AL & LI quæ inter AE & EB, ſeu x & y; poterit, in æquatione data, loco x ſubſtitui $x + t$, & $y + z$ loco y; nec non loco x^m, $x^m + mx^{m-1}t +$ &c. & $y^n + ny^{n-1}z +$ &c. loco y^n, & loco $x^m y^n$, $x^m y^n + nx^m y^{n-1} z + mx^{m-1} y^n t$; neglectis ſcilicet reliquis terminis in quibus t & z, aut junctim reperiuntur, aut plures una dimenſiones habent; cum omnes illi termini evaneſcunt, ubi t & z infinite parvæ concipiuntur. Et quia termini illi, in quibus nec t nec z reperiuntur, ſunt illi ipſi qui dati ſunt in æquatione, adeoque ſe mutuo deſtruunt; ſunt & illi delendi, ſic ut pro x^m tantum ponendum ſit $mx^{m-1}t$, pro y^n tantum $ny^{n-1}z$, & pro $x^m y^n$ tantum $nx^m y^{n-1} z + mx^{m-1} y^n t$; unde loco formulæ æquationis $fx^m + gy^n + hx^p y^q + a = 0$ ſubſtituendum $mfx^{m-1}t + ngy^{n-1}z + qhx^p y^{q-1} z + phx^{p-1} y^q t = 0$; unde fiet $t : z = -ngy^{n-1} - qhx^p y^{q-1} : mfx^{m-1} + phx^{p-1} y^q$; quare, cum t & z exiſtentibus infinite parvis, $t : z = GE : EB = EB : EF$; erit $-ngy^{n-1} - qhx^p y^{q-1} : mfx^{m-1} + phx^{p-1} y^q = GE : EB [y] = EB [y] EF$; quare ſubnormalis $EF = (mfx^{m-1} + phx^{p-1} y^q) : (-ngy^{n-2} - qhx^p y^{q-2})$; ſubtangens $EG = (-ngy^n - qhx^p y^q)$:

$-qhx^p y^q):(mfx^{m-1}+phx^{p-1}y^q)$, & $AG = EG - EA =$ No. CIII. $(-ngy^n - qhx^p y^q):(mfx^{m-1}+phx^{p-1}y^q) - x = (-ngy^n - qhx^p y^q - mfx^m - phx^p y^q):(mfx^{m-1}+phx^{p-1}y^q)$. Iidem valores harum linearum possunt quoque vulgari calculo differentiali inveniri.

ARTICUL. XXIV.

Extensio Methodi præcedentis pro radiis osculi inveniendis ad illas quoque æquationes algebraicas, in quibus occurrunt quantitates surdæ pluri-membres, ut non opus sit surditatem ex æquatione tollere; sive Demonstratio Regulæ in Act. Lipf. 1700, *pag.* 511, § 3, * *exhibitæ.*

Quia positis [*Fig.* 31] $AE = x$, $EB = y$, $EF = z$, $BD = t$, & $CD = u$, reperta fuit $AG = x + (yu + zt):n$ & $GC = y + (zu - yt):n$; erit EG seu $dx = (yu + zt):n$, & $dy = (zu - yt):n$; adeoque $dx^2 = yyuu:nn$, & $dy^2 = zzuu:nn$; evanescentibus reliquis, propter $u = \infty t$. Quibus præmissis, esto quantitas surda in æquatione $\sqrt[p]{(x^l + a)}$; ad quam rite differentiandam, pono $f = \sqrt[p]{(x^l + a)}$, erit $f^p = x^l + a$, & differentiando $pf^{p-1}\,ddf + \frac{p.p-1}{2} f^{p-2}\,df^2 = l x^{l-1} ddx$

 $+ l.l-1$

* N°. XCIV, pag. 891, Obs. III.

No. CIII. $+\frac{l.l-1}{2}x^{l-2}dx^2+$ &c. seu $pf^{p-1}df = lx^{l-1}dx + \frac{l.l-1}{2}x^{l-2}dx^2$ $-\frac{p.p-1}{2}f^{p-2}df^2$ & dividendo, $df = lx^{l-1}dx : pf^{p-1} + \frac{l.l-1}{2}$ $x^{l-2}dx^2 : pf^{p-1} - (p-1)df^2 : 2f$ & [ponendo $llx^{2l-2}dx^2 :$ ppf^{2p-2} loco df^2 (a)] $df = lx^{l-1}dx : pf^{p-1} + \frac{l\,l-1}{2}x^{l-2}dx^2 :$ $pf^{p-1} - (p-1)\,llx^{2l-2}dx^2 : 2ppf^{2p-1} =$ diff. ipsius $\sqrt[p]{(x^l + a)}$. Jam ponatur $zt : n$ loco dx [neglecto yu, ut pote quod est incomparabile ipsi uu] & $yyuu : nn$ loco dx^2, fiet diff. $\sqrt[p]{(x^l + a)} = lx^{l-1}zt : pf^{p-1}n + \frac{l.l-1}{2}yyuu : pf^{p-1}nn - (p-1)$ $llx^{2l-2}yyuu : 2ppf^{2p-1}nn$, e quibus statuendum est ab una parte $lx^{l-1}zt : pf^{p-1}n$, & ab altera $\frac{1}{2}(1-l)\,lx^{l-2}yyuu : pf^{p-1}nn +$ $(p-1)\,llx^{2l-2}yyuu : 2ppf^{2p-1}uu$; unde cum $uu : zt = r$, sequitur loco $f = \sqrt[p]{(x^l + a)}$ surrogandum esse (b) in numeratore fractionis $lx^{l-1}z : pf^{p-1}$, & in denominatore $(1-l)\,lx^{l-2}yy : pf^{p-1}$ $+(p-1)\,llx^{2l-2}yy : ppf^{2p-1}$.

(a) Ponitur $llx^{2l-2}dx^2 : ppf^{2p-2}$ pro df^2; quia quadrando æquationem $df = lx^{l-1}dx : pf^{p-1} + \frac{l(l-1)}{2}x^{l-2}dx^2 : pf^{p-1} - (p-1)df^2 : 2f$, provenit $df^2 = llx^{2l-2}dx^2 : ppf^{2p-2} +$ &c. ubi reliqui termini per &c. designati respectu primi evanescunt.

(b) Quemadmodum t & u, ubi sunt $=0$, conveniunt cum dt & du; sic etiam in hoc casu f convenit cum df, & hæc surrogatio fit non tam pro $\sqrt[p]{(x^l + a)}$, quam pro $\sqrt[p]{(t^l + a)}$; quod ex supra dictis cum his collatis melius intelligetur.

ARTI-

ARTICUL. XXV.

Invenire Radios oſculi in Curvis per Focos deſcriptis.

I *Modus.*

SInt [*Fig.* 35] AB, BC æquales curvæ particulæ; G, H, I, &c. foci per quas deſcripta eſt; BN radius oſculi, in eoque aſſumptum punctum S. Productæ intelligantur AB & GC ad communem occurſum in M, & angulo BGC æqualis concipiatur angulus MBD; nec non centro B per C deſcriptus arculus LCD ſecans BM & BD, in L & D, & ſit DE parallela GM. Poro eſto GO perpendicularis GB, eique parallela SV. Appellentur autem GB $= x$, HB $= y$, IB $= z$; BN $= r$, BS $= a$; AB vel BC $= ds$, BK $= dx$: quibus poſitis, erit ang. BDE $=$ MBD $+$ BMC $=$ BGC $+$ BMC $=$ ABG; quare triangula ABK & BDE ſunt ſimilia & æqualia, & DE $=$ BK $= dx$; adeoque CF $-$ DE $= ddx$; hinc BV : BS $[a] =$ BF : BC $=$ CF $-$ DE $[ddx]$: CD $[\frac{addx}{BV}]$; nec non BN $[r]$: BC $[ds]$ $=$ BC $[ds]$: CL $[\frac{ds^2}{r}]$; adeoque totus arcus LD $=$ CL $+$ CD $= ds^2 : r + addx :$ BV. Igitur BL $[ds]$: LD $[\frac{ds^2}{r} + \frac{addx}{BV}]$ $=$ BG $[x]$: BF $[\frac{x.BV.ds^2 + arxddx}{r.BV.ds}]$; & quia BV : BS $[a] =$ BF $[\frac{x.BV.ds^2 + arxddx}{r.BV.ds}]$: BC $[ds]$, erit $ddx = (r.BV^2.ds^2$

No.CIII. $- a x . BV . ds^2) : a a r x$. Eodem modo ſi ducantur ST & SW perpendiculares ipſis BH & BI, reperitur $ddy = (r . BT^2 . ds^2 - ay . BT . ds^2) : aary$; & $ddz = (r . BW^2 . ds^2 - az . BW . ds^2) : aarz$. Rurſus FC [dx] : BC [ds] $=$ SV : BS [a], unde $dx = SV . ds : a$, & ſimiliter $dy = ST . ds : a$, & $dz = SW . ds : a$.

Eſto jam æquatio ad curvam $b x^l + c y^m + e z^n =$ conſt. cujus differentiale $b l x^{l-1} dx + c m y^{m-1} dy + e n z^{n-1} dz = 0$; iterumque differentiando $b l x^{l-1} ddx + bl . (l - 1) x^{l-2} dx^2 + c m y^{m-1} ddy + c m (m - 1) y^{m-2} dy^2 + e n z^{n-1} ddz + e n (n - 1) z^{n-2} dz^2 = 0$, ubi ſubſtitutis valoribus ddx, ddy, ddz, ut & dx^2, dy^2, dz^2, & facta diviſione per $ds^2 : aar$, habetur $b l x^{l-2} . BV^2 . r - a b l x^{l-1} . BV + b l (l - 1) x^{l-2} . SV^2 . r + c m y^{m-2} . BT^2 . r - a c m y^{m-1} . BT + c m (m - 1) y^{m-2} ST^2 . r + e n z^{n-2} . BW^2 . r - a e n z^{n-1} . BW + e n (n - 1) z^{n-2} . SW^2 . r = 0$, vel [quia $BV^2 = bS^2 - SV^2 = aa - SV^2$, &c] $a a b l x^{l-2} r + b l (l - 2) x^{l-2} . SV^2 . r - a b l x^{l-1} . BV + a a c m y^{m-2} r + c m (m - 2) y^{m-2} . ST^2 . r - a c m y^{m-1} . BT + a a e n z^{n-2} r + e n (n - 2) z^{n-2} . SW^2 . r - a e n z^{n-1} . BW = 0$, adeoque $r = (b l x^{l-1} . BV + c m y^{m-1} . BT + e n z^{n-1} . BW) a : (a a b l x^{l-2} + b l (l - 2) x^{l-2} . SV^2 + a a c m y^{m-2} + c m (m - 2) y^{m-2} . ST^2 + a a e n z^{n-2} + e n (n - 2) z^{n-2} . SW^2)$.

II *Modus.*

Idem per novum differentiandi modum obtinetur ita. Sunto rurſum [*Fig.* 36] GO, SV, perpendiculares ipſi GB, & huic parallela CE ſecans BS in L; ſitque CD perpendicularis ipſi BS; & centro C, radio CE, deſcriptus arcus EF ſecans ductam GC in F. Quibus poſitis, ſunto $GB = x$, $GO = p$, $BO = q$, $BD = t$, $CD = u$. Erunt GO [p] : BO [x] $=$ EO [$p -$ GE] : EL [$\frac{px - x \, GE}{p}$] $=$ CD [u] : DL [$\frac{x u}{p}$]. Item GO [p]: BO [q] $=$ EO [$p -$ GE] : LO [$\frac{pq - q \, GE}{p}$] $=$ CD [u] :

CL

CL $[\frac{qu}{p}] = EC - EL = EC - x + \frac{x}{p}GE$. Hinc $GE = (qu + px - p.EC):x$. Sed $BD + DL [t + xu:p] = BO - OL [q - \frac{pq - q.GE}{p} = \frac{q}{p}GE]$; unde denuo $GE = (pt + xu):q = (qu + px - p.EC):x$; quod dat EC [FC] $= x - xt:q + (qqu - xxu):pq = x - xt:q + ppu:pq = x + (pu - xt):q$. No.CIII.
Fingatur C infinite prope accedere ad B; fient CD, BD, GE, GF infinite parvæ; sed BD & GF infinities minores ipsis CD & GE: Est vero tunc GF tertia proportionalis ad 2 EC, vel 2GB & GE; nempe 2GB $[2x]$: GE $[\frac{xu}{q}$, quia pt respectu xu evanescit$] =$ GE $[\frac{xu}{q}]$: GF $[\frac{xuu}{2qq}]$; Quare $GC = FC + GF = x + (pu - xt):q + xuu:2qq$. Jam quia GB est minor x, & GC major x, potest in æquatione data pro x poni $x + (pu - xt):q + xuu:2qq$. & pro x^l, $(x + (pu - xt):q + xuu:2qq)^l = x^l + (lx^{l-1}pu - lx^lt):q + lx^luu:2qq + \frac{1}{2}l.(l-1)x^{l-2}ppuu:qq +$ &c. $=$ [propter $p = x.SV:BV$ & $q = ax:BV$] $x^l + (lx^{l-1}.SV.u - lx^{l-1}.BV.t):a + lx^{l-2}.BV^2.uu:2aa + \frac{1}{2}l(l-1)x^{l-2}.SV^2.uu:aa +$ &c. Similiter pro y^m & z^n ponantur respondentes valores; unde pro $f = bx^l + cy^m + cz^n$, pono $bx^l + (blx^{l-1}.SV.u - blx^{l-1}.BV.t):a + (blx^{l-2}.BV^2.uu + bl(l-1)x^{l-2}.SV^2.uu):2aa +$ &c. $+ cy^m + (cmy^{m-1}.ST.u - cmy^{m-1}.BT.t):a + (cmy^{m-2}.BT^2.uu + cm(m-1)y^{m-2}.ST^2.uu):2aa +$ &c. $+ ez^n + (enz^{n-1}.SW.u - enz^{n-1}.BW.t):a + (enz^{n-2}.BW^2.uu + en(n-1)z^{n-2}.SW^2.uu):2aa +$ &c. $= f$, & subtracta æquatione priore a posteriore remanebit prioris differentia $(blx^{l-1}.SV.u - blx^{l-1}.BV.t):a +$ &c. $= 0$: in qua termini qui denominantur ab u [cæteris omnibus neglectis, quippe qui infinities sunt minores] inter se adæquati, & divisi per $u:a$, exhibent æquationem $blx^{l-1}.SV + cmy^{m-1}.ST + enz^{n-1}SW = 0$: quæ determinat perpendicularem curvæ BS. Si vero, hac insuper habita, termini a t & uu denominati [qui secum mutuam

No. CIII. ſunt comparabiles, ſequentibus vero omnibus infinities majores] inter ſe adæquentur (*), determinabit æquatio radium oſculi. In quem finem termini qui habent t ſtatuendi ſunt ab una, & qui uu ab altera parte, ita: $(blx^{l-1}.BV.t + cmy^{m-1}.BT.t + enz^{n-1}.BW.t) : a = (blx^{l-2}.BV^2 + bl(l-1)x^{l-2}.SV^2 + cmy^{m-2}.BT^2 + cm(m-1)y^{m-2}.ST^2 + enz^{n-2}.BW^2 + en(n-1)z^{n-2}.SW^2) \times uu : 2aa$; factaque convenienti multiplicatione & diviſione, $r =$ [cum ſit BD : DC = DC : $2r$] $\frac{uu}{2t} = (ablx^{l-1}.BV + acmy^{m-1}.BT + aenz^{n-1}.BW) : (blx^{l-2}.BV^2 + bl(l-1)x^{l-2}.SV^2 + cmy^{m-2}.BT^2 + cm(m-1)y^{m-2}.ST^2 + enz^{n-2}.BW^2 + en(n-1)z^{n-2}.SW^2)$.

Inventus igitur eſt radius oſculi, & quidem ut ſupra.

III *Modus.*

Sit rurſus in ſimili Schemate [niſi quod nunc GP perpendicularis ipſi BS] $GB = x$, $GP = q$, $BP = p$, $BD = t$, $CD = u$. Erunt, producta CD donec occurrat ipſi GB in N, BP $[q]$: GP $[p]$ = BD $[t]$: DN $[\frac{pt}{q}]$; $GR = CN = CD + DN = u + pt : q$; $RP = GP - GR = p - u - pt : q$; $RP + DC =$ [ducta CQ parallela ad BS] $RQ = p - pt : q$; GP $[p]$: GB $[x]$ = RQ $[p - pt : q]$: RC $[x - xt : q]$; GB $[x]$: GP $[p]$ = GR $[u + pt : q]$: RE $[pu : x + ppt : qx]$; GB $[x]$: BP $[q]$ = GR $[u + pt : q]$: GE $[(qu + pt) : x]$; $FC = EC = RC + RE = x - xt : q + pu : x + ppt : qx = x + pu : x + (ppt - xxt) : qx = x + (pu - qt) : x$; $GF = GE^2 : 2EC = qqu u : 2x^3$ [evanc-

(*) Id eſt; ſi in æquatione $(blx^{l-1}.SV.u + cmy^{m-1}.ST.u + enz^{n-1}.SW.u) : a = 0$ ſubtracta ab æquatione $(blx^{l-1}.SV.u - blx^{l-1}.BW.t +$ &c.$) : a = 0$, termini a t & uu denominati inter ſe adæquentur.

vanefcentibus reliquis terminis in numeratore & denominatore], No. CIII.
GC [major x] $= FC + GF = x + (pu - qt) : x + qquu : 2x^3$. Quare major $x^l = x^l + lx^{l-2} - lx^{l-2}qt + \frac{1}{2} lx^{l-4}qquu + \frac{1}{2} l(l - 1) x^{l-4} ppuu +$ &c. $=$ [ob $p = x.SV : a$ & $q = x.BV : a$] $= x^l + lx^{l-1}.SV.u : a - lx^{l-1}.BV.t : a + lx^{l-2}.BV^2.uu : 2aa + l(l-1) x^{l-2}.SV^2.uu : 2aa$, &c. ut fupra; unde & cætera, ut ibi.

IV *Modus.*

Major $x = GC = \sqrt{(GQ^2 + QC^2)} = \sqrt{((GP + PQ)^2 + (BP - BD)^2)} = \sqrt{(pp + 2pu + uu + qq - 2qt + tt)}$; unde major $x^l = (pp + 2pu + uu + qq - 2qt + tt)^{\frac{1}{2}l} = (xx + 2pu + uu - 2qt + tt)^{\frac{1}{2}l} = x^l + lx^{l-2}pu + \frac{1}{2}lx^{l-2}uu - lx^{l-2}qt + l(\frac{1}{2}l - 1)x^{l-4}ppuu =$ [ob $p = x.SV : a$ & $q = x.BV : a$] $x^l + lx^{l-1}.SV.u : a + lx^{l-1}.BV.t : a + \frac{1}{2}lx^{l-2}uu + l(\frac{1}{2}l - 1) x^{l-2}.SV^2.uu : aa =$ [ob $\frac{1}{2}lx^{l-2} = lx^{l-2}aa : 2aa = (lx^{l-2}.BV^2 + lx^{l-2}SV^2) : 2aa$] $x^l + lx^{l-1}.SV.u ; a - lx^{l-1}.BV.t : a + (lx^{l-2}.BV^2.uu + l(l-1)x^{l-2}.SV^2.uu) : 2aa$, ut fupra.

ARTICUL. XXVI.

Inventio Centri Tenfionis.

Conf. N[i]. XCVIII, pag. 932, & CI, pag. 976.

SIt LG [*Fig.* 37] compages funium rectorum parallelorum æquidiftantium, ejufdem craffitiei & longitudinis, alligatorum lineæ rigidæ inflexili BG, rotabili circa axem G: Hæc aperia-

No. CIII. aperiatur angulo quocunque BGH; sic funis LB extendetur in BH, funis MD in DI, funis NF in FK &c. Sublata autem subito vi tendente, magna pernicitate sese contrahent; quae quidem continuo augetur, ob continuam actionem vis retrahentis. Sint jam tensiones BH, DI, FK, contractae ad BC, DE, FT; erunt celeritates acquisitae punctorum C, E, T, ut tensiones BC, DE, FT; adeoque virga inflexilis GC, cui alligati sunt funes, nil impedit quominus cum his celeritatibus pergere possint. Accedant autem novi impulsus a vi retrahente CS, EQ, TR, unde puncta C, E, T, appellerent simul ad S, Q, R, si soluti funes essent; sed quia illigati virgae GC, non possunt simul reperiri in S, Q, R, propter vires retrahentes [hoc est tendentes] CS, EQ, TR, tensionibus BC, DE, FT, non proportionales: unde vires hae sic moderabuntur actiones mutuas in se invicem, ut puncta C, E, T simul appellant ad P, Q, V; parte residua virium, velut PS, translata velut in RV; existente tamen intermedio quodam fune, velut DE, cui nihil nec aufertur, nec additur; hoc est, qui, sive seorsim, sive junctim cum caeteris resorbeatur; eodem momento ad Q accedit. Et hujus funis DE punctum alligationis E appello *Centrum Tensionis*; quod sic invenitur. Sit [*Fig.* 38] AEC Curva Tensionis, hoc est, BC, DE [eaedem quae in *Fig.* 37,] funium tensiones, & AB, AD vires tendentes, quibus vires retrahentes aequantur; sitque $BC = x$, $DE = p$, $GC = nx$, $GE = np$, $AB = y$, $AD = q$; unde cum vires retrahentes quoque exponantur per CS & EQ, erit etiam $CS = y$, & $EQ = q$; & DE $[p]$: BC $[x] =$ EQ $[q]$: CP $[\frac{qx}{p}]$; unde $PS = CS - CP = y - qx:p$; & quia [similiter atque in demonstratione generalissima Centri Oscillationis ex natura vectis, Vid. *Mem. de l'Acad. des Sciences*, 1703 *,] omnia producta ex latitudine funis seu elemento ipsius GC, ex distantia ipsa GC, & ipsa PS, debent aequari

* No. XCVIII, pag. 934 & seq.

æquari nihilo, hinc erit $\int(ndx.nx.(y - qx:p)) = 0$, hoc eſt, No. CIII.
$\int(nnxydx - nnqxxdx:p) = 0$, ſive $\int xydx = \int qxxdx:p = \frac{1}{3}qx^3:p$, indeque $q:p = 3\int xydx:x^3$; quare cum, ob datam curvam AEC, detur q per p, & y per x, cognoſcetur quoque p per x. Nominatim ſi AEC ſit Paraboloides, hoc eſt, $y = x^m$, & $q = p^m$, fiet $p^{m-1} = q:p = 3\int xydx:x^3 = 3\int x^{m+1}dx:x^3 = 3x^{m-1}:(m+2)$; adeoque $p = x\sqrt[m-1]{(3:(m+2))}$, & $x:p = BC:DE = GC:GE = 1:\sqrt[m-1]{(3:(m+2))}$; quæ ratio cum ſit conſtans, cujuſcunque ſit longitudinis x, vel BC, vel BH; erit quoque GH : GI = GC : GE; proinde fibra DI eodem tempore reſorbebitur, ſive ſibi relicta, ſive juncta cum aliis ſe contrahat; atque adeo I erit centrum tenſionis: & quidem ſi $m = 2$, fiet GI = [poſita GH = 1] $\frac{3}{4}$; ſi $m = 3$, $GI = \sqrt{(3:5)}$; ſi $m = 4$, $GI = \sqrt[3]{(1:2)}$; ſi $m = 5$, $GI = \sqrt[4]{(3:7)}$, &c. Idem procedit quoque, ſive ſolæ fibræ in ſpatio BFKH, ſive in toto triangulo BGH comprehenſæ laxentur. At ſi AEC alia ſit curva quam Paraboloides, variabit ratio x ad p, prout variat x; unde GE & GI non æquabuntur, nec erit una aliqua fibra, cujus omnes & ſingulæ partes [ſive ſeparatim, ſive in complexu reliquarum laxetur] eodem tempore reſorbeantur: unde nec in tali hypotheſi dari poterit *Centrum tenſionis*. Interim tamen poteſt inveniri tempus, quo fibra BC vel BH, ipſeque adeo angulus BGH reſorbetur, ita: Sit CW celeritas acquiſita fibræ BC in $C = z$; erit tempuſculum, quo elementum fibræ dx abſumitur, $= dx:z$; unde, poſito tempuſculo conſtanti $dx:a$, erit, per oſtenſa in Articulo IX †, incrementum celeritatis in dato tempuſculo $= zdz:a$, quod incrementum proportionari debet ipſi $CP = qx:p$; quare $zdz:a = qxdx:p =$ [per modo inventa] $3dx\int xydx:xx$; adeoque $zz:2a = 3\int(dx\int xydx:xx)$ & $zz = 6a\int(dx\int xydx:xx)$, & $z = \sqrt{(6a\int(dx\int xydx:xx))}$, & $dx:z = dx:\sqrt{(6a\int(dx\int xydx:xx))}$, tempuſculum quo ele-

† Pag. 1031, 1032.

No. CIII. mentum dx absorbetur; quod adeo est in ratione composita ex directa ipsius dx, & reciproca radicis quadratæ spatii curvilinei, cujus applicata est $\int xydx : xx$; unde si cum tempusculo quo particula proportionalis alterius longioris vel brevioris fibræ, hoc est, majoris minorisve anguli BGH absumitur, comparetur, eo modo quo factum in Artic. IX *, observabitur discrimen temporum, quibus inæquales anguli absorbentur, dependere a concavitate aut convexitate curvæ, cujus applicata $= \int xydx : xx$.

Eodem modo invenitur *Centrum tensionis*, si loco virgæ GH substituatur asser curvilineus GIHFLG [*Fig.* 39], cujus applicata HF vocatur t; reperitur enim $q : p = \int txydx : \int txxdx$ (*); quod relationem exhibet constantem ipsius GI ad GH, si GLF quoque sit Parabola. Etenim posito $t = x^n$, sicut $y = x^m$, & $q = p^m$; fiet $p^{m-1} = (n+3)x^{m-1} : (m+n+2)$, & $p = x . \sqrt[m-1]{\frac{n+3}{m+n+2}}$;

& $x : p = 1 : \sqrt[m-1]{\frac{n+3}{m+n+2}}$.

(*) Quia numerus funium applicatæ HF alligatorum, quorum extremitates rotantur per arcus circulares habentes radios æquales ipsi HG, proportionalis est ipsi applicatæ HF; ideo erit $\int (nntxydx - nnqtxxdx : p) = 0$, seu $\int txydx = \frac{q}{p} \int txxdx$.

* Supra pag. 1030, & seq.

ARTI-

No. CIII.

ARTIC. XXVII.

Artificium impellendi Navem a principio motus intra ipsam Navem concluso.

NAuta ſtans in littore firmo poteſt conto propellere navem: at ſtans in ipſa navi non poteſt, quia quantum illam prorſum impellit, tantundem illam pedibus carinæ innixus retrorſum pellit: unde vulgo exiſtimant, non poſſe motum induci corpori a principio intra ipſum concluſo. At ſequens machina hujus rei poſſibilitatem oſtendit. In navicula A [*Fig.* 40] ſit BC tabulatum firmum, perfecte elaſticum, puta chalybeum aut reticulatum, cui appenſum ſit in B pendulum BP, cum annexo pondere P, itidem elaſtico; quod dum deſcendit per quadrantem PC, impellit tabulatum, & cum illo totum navigium proram verſus; ac poſtmodum reflectitur, & redeſcendendo repetit ſuos ictus. Ne vero motus ſenſim langueſcat; ſed id, quod tum abſumptum fuit a reſiſtentia aeris, tum communicatum navigio, reparetur, atque pendulum ſemper ad initium quadrantis reaſcendat, mediante automato, ut in horologiis pendulis fieri ſolet, obtineri poteſt. Quoniam autem pendulum navem non tantum in C antrorſum impellit, ſed & in locis intermediis quadrantis extenſione fili BP, tum a gravitate annexi ponderis P, tum ab ejus conatu centrifugo facta, navem oblique retrahit; hinc utriuſque hujus impulſus contrarii quantitas calculo prius æſtimanda eſt, ut conſtet utra alteri prævaleat.

Sit altitudo deſcenſus perpendicularis penduli, ſeu ejus longitudo [*Fig.*41] BC $= a$, expoſita per triangulum KLM, tempus deſcenſus perpendicularis per BC exponatur per KL $= t$; erit celeritas ejus in fine caſus LM $= 2a : t$ (*); unde ſi tempus deſcenſus & aſcen-

(*) Notum eſt ex Theoria *Galilæana*, quod in hypotheſi gravitatis conſtantis;

No. CIII. ascensus penduli per quadrantem sive integræ oscillationis dicatur T, fiet impulsio navis proram versus $= 2aT : t$ ([b]). Videamus nunc impulsum contrarium puppim versus, & quidem profectum

1°. *A vi gravitatis.* Sit tempusculum constans KS $=$ ZL $= dt$; erit $tt : dt^2 = a : \frac{adt^2}{tt} =$ KSV vi gravitatis, quæ exponatur per PE: hinc si motus per PE resolvatur in duos alios PD & PF, & motus per PD rursum in duos PG & PH, atque vocentur BI $= x$, IP $= y$, QP $= ds$; fiet BP $[a]$: PI $[y]$ $=$ PE $[\frac{adt^2}{tt}]$: PD $[\frac{ydt^2}{tt}]$: item BP $[a]$: BI $[x]$ $=$ PD $[\frac{ydt^2}{tt}]$: PH $[\frac{xydt^2}{att}]$; & quia celeritates in P & C sunt ut radices altitudinum IP, BC, celeritas autem in C $=$ LM $= 2a : t$, adeoque spatium ista celeritate tempusculo dt peractum æquale rectangulo ZM $= 2adt : t$, & spatium eodem tempusculo altera celeritate transactum QP $= ds$; erit $\sqrt{}$BC $[\sqrt{a}]$: $\sqrt{}$IP $[\sqrt{y}]$ $=$ rectang. ZM $[\frac{2adt}{t}]$: QP $[ds]$; unde $2dt\sqrt{ay} : t = ds$, & $dt = tds : 2\sqrt{ay}$; adeoque PH [impulsio navis puppim versus a vi gravitatis tempusculo dt impressa] $= xydt^2 : tt = xydsdt : 2at\sqrt{ay} = xdsdt\sqrt{ay} : 2aat$. Quare si omnes præcedentes impulsiones repræsententur per spatium curvilineum N, & celeritas per illas ultimo acquisita per rectam z, significabit triangulum characteristicum $\alpha\beta\gamma$ ([c]) ipsum ultimum impulsum BH $= xdsdt\sqrt{ay} : 2aat$,

stantis, si tempora descensuum perpendicularium exponantur per rectas KL, KZ, KS; celeritates acquisitæ exponi possint per applicatas alicujus trianguli LM, ZY, SV, & spatia percursa per ipsa triangula KLM, KZY, KSV.

([b]) Per impulsionem navis proram versus, quæ ponitur $2aT : t$, intelligitur spatium quod navis celeritate $2a : t$ lata, tempore T, in aqua non resistente percurreret: quemadmodum paulo post per vim gravitatis intelligitur spatiolum, quod grave recta descendendo, primo tempusculo dt, percurrit, quodque per triangulum KSV repræsentatur.

([c]) Quia per omnes præcedentes impulsiones a spatio curvilineo N repræsentatas intelligitur ipsarum effectus, seu spatium a navi toto harum impulsionum tempore puppim versus descriptum; manifestum est, quod

$2aat$; qui proinde si dividatur per $\frac{1}{2}a\beta = \frac{1}{2}dt$, dabit incrementum celeritatis $\beta\gamma$, sive $dz = xds\sqrt{ay} : aat =$ [per naturam circuli] $ady\sqrt{ay} : aat = dy\sqrt{ay} : at$; unde $z = 2y\sqrt{ay} : 3at$, & $zdt = 2ydt\sqrt{ay} : 3at =$ [expungendo dt] $yds : 3a$ (d) $= -adx : 3a = -dx : 3$, ac proinde spatium N, seu $\int zdt = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x$; id est, respectu totius quadrantis $= \frac{1}{3}a$; quare summa impulsionum in descensu per quadrantem $= \frac{1}{3}a$, & totidem in ascensu: quod facit impulsum totalem a vi gravitatis navi, tempore T, puppim versus impressum $= \frac{2}{3}a$. No.CIII.

2°. *A Penduli conatu centrifugo.* Sit [*Fig.* 42] QD tangens circuli, adeoque PD conatus centrifugus, qui rursum resolvatur in duos conatus alios PG & PH; illorum hic in trahenda nave puppim versus occupatur, ille in premenda nave deorsum versus aquam absumitur. Est vero, ut constat, $PD = PQ^2 : 2BP = ds^2 : 2a$; unde $BP[a] : BI[x] = PD\left[\frac{ds^2}{2a}\right] : PH\left[\frac{xds^2}{2aa}\right]$ $=$ [ob $ds^2 = 2dt\sqrt{ay} : t$] $= xdsdt\sqrt{ay} : aat$; quæ precise dupla est alterius impressionis PH a vi gravitatis profectæ (e): unde

Bbbbbbb 3 & to-

quod si ultimo tempusculo dt nullus novus accederet impulsus, navis eadem celeritate z, quam ultimo acquisivit, pergeret moveri, & hoc ultimo tempusculo percurreret spatium repræsentatum per parallelogrammum $\lambda\mu\beta\alpha$; sed quia, ob accedentem novum impulsum, spatium curvilineum N non solo parallelogrammo $\lambda\mu\beta\alpha$, sed adhuc trilineo $\alpha\beta\gamma$ augetur; ideo hoc trilineum pro effectu ultimi impulsus habendum est.

(d) Eadem æquatio $zdt = yds : 3a = -dx : 3$, aliter sic invenitur: Ponatur $PE = g =$ sollicitationi gravitatis, erit $PD = gy : a$, $PF = gx : a$, $PH = gxy : aa$. Sit velocitas penduli in $P = v$, cujus elementum cum sit in ratione vis acceleratricis PF & temporis quo describitur elementum arcus QP, erit illud, seu $dv = gxdt : a$, & $QP = ds = vdt$: hinc $vdv = gxds : a =$ [per naturam circuli] gdy, & $\frac{1}{2}vv = gy$, seu $v = \sqrt{2gy}$; hinc $dt = ds : v = ds : \sqrt{2gy}$. Posita jam celeritate puppim versus, quam navis ab actione virium retrahentium PH $= gxy : aa$ acquisivit, $= z$, erit $dz = gxydt : aa = gxyds : aa2\sqrt{gy}$ [ob $xds = ady$.] $= gydy : a\sqrt{2gy} = dy\sqrt{gy} : a\sqrt{2}$. Ergo $z = y\sqrt{2gy} : 3a$, & $zdt = yds : 3a = -dx : 3$.

(e) Aliter etiam potest ostendi impulsum a vi centrifuga ortum duplum

No. CIII. & totalis impulſus conatus centrifugi tempore T impreſſus duplus eſt totius impulſus a vi gravitatis manantis, adeoque $\frac{4}{3}a$ & uterque ſimul $\frac{2}{3}a + \frac{4}{3}a = 2a$. Ergo ſi hos impulſus, qui navem tempore T puppim verſus impellunt, junctim ſubtrahas ab illo qui eandem eo tempore proram verſus propellit, quique inventus eſt $2aT:t$, remanet, pro parte efficaci hujus impulſus verſus proram, $2aT:t - 2a = 2a(T - t):t$.

Unde conſtat fieri hac ratione poſſe impulſionem navis verſus proram, quia T major quam t; & definiri illam poſſe, modo habeatur utriuſque ratio; quæ ſic innoteſcet.

Quia tempuſculum dt, quo deſcribitur arcus quadrantis QP vel ds, repertum eſt $tds : 2\sqrt{ay}$, & $ds =$ [ex natura circuli] $ady : \sqrt{(aa - yy)}$, erit $dt = atdy : 2\sqrt{(a^3y - ay^3)} =$ [poſito $ay = uu$] $atdu : \sqrt{(a^4 - u^4)} =$ elemento curvæ Elaſticæ, cujus integrale [per Prop. LVII *de Serieb. Infin.* *] eſt $tu : a + 1.tu^5 : 2.5a^5 + 1.3.tu^9 : 2.4.9a^9 + 1.3.5tu^{13} : 2.4.6.13a^{13} +$ &c. ſive [ſumto pro toto quadrante y, adeoque & $u = a$] $= t \times (1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} +$ &c.$)$ $=$ circiter [per Prop. LVIII *de Serieb. Infin.* †] $\frac{131}{100}t$; unde duplum hujus, ſcilicet omnia tempuſcu-

plum eſſe ejus qui a vi gravitatis oritur. Sit $f =$ vi centrifugæ, ſollicitationi nempe quæ continue agit in pendulum P ſecundum directionem PD; hæc licet ſit variabilis & quadrato celeritatis penduli proportionalis, tamen ut conſtans poteſt ſupponi durante motu qui fit, tempore dt, per arcum infinite parvum QP. Conſideretur recta PD ut ſpatium aliquod finitum a mobili aliquo a vi f uniformiter accelerato tempore dt deſcriptum; ſit p pars aliqua rectæ PD, quam mobile tempore θ percurrit, & v velocitas acquiſita in fine hujus temporis; erit ex natura accelerationis $fd\theta = dv$, & integrando $f\theta = v$, hinc dp [$= vd\theta$] $= f\theta d\theta$; & iterum integrando $p = \frac{1}{2}f\theta\theta$; ſubſtituatur jam pro p integra recta PD $= ds^2 : 2a$, & dt pro θ, eritque $ds^2 : 2a = \frac{1}{2}fdt^2$; hinc $f = ds^2 : adt^2 =$ [quia $dt = ds : \sqrt{2gy}$ ut in præcedenti Nota oſtenſum] $2gy : a$. Si igitur f exponatur per rectam PD, erit hæc $2gy : a$, & per conſequens PH $= 2gxy : aa$; quæ quantitates duplæ ſunt earum quæ in præcedenti Nota inventæ ſunt.

* Pag. 964.

† Pag. 966.

pusculа dt, quibus quadrans totus bis percurritur ascendendo & descendendo, nempe $T = \frac{262}{100} t$; adeoque tandem quantitas impulsus penduli versus proram, qui singulis temporibus T imprimitur, nempe $2a(T - t) : t = \frac{324}{100} a =$ [si vis] c. No. CIII.

Ut jam constet, quanta portio hujus impetus communicetur navi (f), statuatur pondus penduli $= p$, & pondus navis cum toto suo apparatu reliquo $= n$; erit momentum penduli divisum per summam ponderum ipsius & navis $= pc : (p + n)$; cujus proinde duplum $2pc : (p + n)$ [ob suppositam corporum elasticitatem] denotat quantitatem impetus singulis temporibus T navi communicati.

Ut vero tandem determinetur maxima celeritas navis, quam hoc pacto impulsa acquirere potest, quæque vocetur z; sit pondus molis aquæ, cui navis celeritate $2pc : (p + n)$ lata tempore T impingit $= q$; erit celeritas navis residua post impulsum aquæ $(n - q) \times \frac{2pc}{p + n} : (n + q)$; adeoque pars ejus absumta, hoc est resistentia aquæ $2q \times \frac{2pc}{p + n} : (n + q) = 4pqc : (p + n)(q + n)$. Et quia resistentiæ sunt ut quadrata celeritatum navis, erit $\frac{4ppcc}{(p + n)^2} : zz = \frac{4pqc}{(p+n)(q+n)} : \frac{q(p+n)zz}{pc(q+n)} =$ resistentiæ aquæ, cum navis movetur celeritate maxima z. Unde cum resistentia ista tum navis impulsui $2pc(p + n)$ debet æquari, fiet $q(p + n)zz$:

(f) Videtur mihi hic calculus emendatione opus habere; nam elasticitas penduli aut tabulati nihil contribuit ad impulsus navi puppim versus impressos & a vi gravitatis & a conatu centrifugo Penduli derivatos: deinde resistentia aquæ non recte computatur, dum ponitur navem æquabili celeritate $2pc : (p + n)$ ferri toto integræ oscillationis tempore T; & demum in fine hujus temporis resistentiam pati æqualem $4pqc : (p + n)(q + n)$; etenim resistentia aquæ agit in navem singulis descensus aut ascensus penduli momentis, & non tum demum cum pendulum in tabulatum impingit; adeo ut navis durante tempore T inæquabili celeritate moveatur. Sed hæc omnia accuratius examinare, ob calculi prolixitatem, nunc non vacat.

No. CIII. $n) zz : pc(q+n) = 2pc : (p+n)$; quod dat $z = pc\sqrt{(2n+2q)} : (p+n)\sqrt{q} = 324ap\sqrt{(2n+2q)} : 100(p+n)\sqrt{q}$. Sit igitur pendulum, quod oscillationibus suis maximis mensuret T minutum secundum; erit ejus longitudo a trium pedum horariorum, qualium 20 circiter a gravi perpendiculariter descendente eodem secundo temporis, experientia teste, transiguntur. Sit item $p+n$ [pondus navis cum toto apparatu] $= 100$, cujus pars centesima sit pondus solius penduli $p = 1$: nec non pondus molis aquæ, cui navis celeritate prima $2pc : (p+n)$ lata tempore T impingit, $q = 1$: erit celeritas prima navis, sive spatium primo tempore T ab illa percussum, $2pc : (p+n) = \frac{2}{100}c = \frac{648}{10000}a = \frac{1944}{10000}$ ped. hor. $= \frac{1}{5}$ pedis horarii circiter; & celeritas maxima, sive spatium tum a nave tempore T transactum $324ap\sqrt{(2n+2q)} : 100(p+n)\sqrt{q} = \frac{9720}{10000}\sqrt{2}$ ped. hor. $= \frac{972 \times 1414}{1000000} = \frac{1375}{1000} = \frac{275}{200} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$ pedis horarii circiter; unde hac celeritate, tempore unius minuti primi, navis percurret $82\frac{1}{2}$ ped. hor. & tempore integræ horæ, 4950 ped. hor. Reperio etiam, quod, 30 minutis secundis exactis, celeritas Navis jam tanta sit, ut deficiat a maxima vix $\frac{1}{10000}$ pedis; & quod tempore horum minutorum secundorum jam percurrerit $35\frac{1}{2}$ pedes. Si sit rostrata navis, sic ut ratio q ad $n+q$, quæ ante fuit subcentupla, tantum censeatur submillecupla, manebit quidem, ut antea, $2pc : (p+n) = \frac{1}{5}$ ped. hor. circiter, sed celeritas maxima z fiet $\frac{\sqrt{2000}}{100}c = \frac{972\sqrt{2000}}{10000} = 4\frac{347}{1000}$ ped. hor. unde spatium uno minuto primo transactum sit $260\frac{41}{50}$ & integra hora $15649\frac{1}{5}$ ped. hor.

Observandum cæterum, quod dum navis movetur, una secum rapit pendulum, eidemque eundem motum imprimit; adeo ut

ut communis hic motus considerandus sit tanquam abesset, & navis in quiete ictum penduli exciperet: quod moneo, ne quis causare possit, navem, dum in motu est, subducere se penduli ictui, eoque debilius percuti quam alias percuteretur. No. CIII.

ARTICUL. XXVIII.

Curvatura Conoidis in Automato, cui circumplicata catenula rotis horologii motum æquabilem conciliat: Deducta ex illis quæ habentur in Comment. Acad. Reg. 1705, pag. 176. *

Sit Elater in statu naturali XC, [*Fig.* 43] isque a potentia majore *bm* curvetur in XA, a minore *bn* in XB; sic ut extremitas ejus C, dum sese restituit elater, describat curvam ABC, manente altera extremitate fixa in X: Sunt autem AX, BX, CX ejusdem ad sensum longitudinis, propter exiguam elateris crassitiem, eoque tensionem ejus in superficie convexa vix perceptibilem. Sit ANGHI &c. chorda vel catenula annexa extremitati elateris A, & ambiens Spiram conoidis GHIK. Quare dum elater sese restituit ex A in B, convolvitur catena circa AB, adeoque revolvere facit Spiram GHIK circa F, sic ut GH existente $= AB$, ipsa FH veniat in situm FG, fiatque directioni catenæ AN perpendicularis: unde, cum vis elateris tum ex hypothesi sit bn, erit momentum hujus potentiæ ad circumagendas rotas $= bn \times FH$, quemadmodum antea erat $= bm \times FG$: Quare cum momenta semper æqualia ponantur, erit $bm \times FG$ $= bn$

* N°. CII, pag. 976, & seq.

No. CIII. $= bn \times$ FH, adeoque FH : FG $= m : n$. Requiritur ergo duntaxat, ut, data potentia bn tendente elaterem, quæratur locus puncti B, hoc est, ut reperiatur curva ABC, quod ita fit. Quia momenta omnia virium tendentium fibras elateris [per ea quæ dicta sunt in *Mem. de l'Acad. des Sciences* 1705, pag. 183 †.] sunt $\frac{bb}{tt}\int rtdt = \frac{bb}{\tau\tau}\int \rho\tau d\tau$ [scriptis r & ρ pro eo quod (a) loco citato exponitur per m & μ], & momentum appensæ potentiæ bm, est bmx, aut potentiæ bn, bnx [appellando XN vel XL, x], erit tum $\frac{b}{tt}\int rtdt = mx$, tum $\frac{b}{tt}\int rtdt = nx$; quare cum ex hypothesi detur r per t, dabitur & t per m & x, nec non t per n & x; adeoque & τ dabitur per m & x, aut per n & x, cum utique ρ detur per τ, quod ipsum datur per t, propter $\frac{1}{tt}\int rtdt = \frac{1}{\tau\tau}\int \rho\tau d\tau$. Facto itaque [*Fig.* 44] rectangulo XY, latere XQ $= 1$, & XA $=$ longitudini elateris XC [*Fig.* 43]; constituantur curvæ QR, QρS, &c. nec non XM, XμW, &c. tales, ut sit ubique NR $= bf : \sqrt{(bbff - (\int(t+\tau)dx)^2)}$ quatenus t datur per m & x; & N$\rho = bf : \sqrt{(bbff - (\int(t+\tau)dx)^2)}$ quatenus t datur per n & x, nec non NM & N$\mu = \int(t+\tau)dx : \sqrt{(bbff - (\int(t+\tau)dx)^2)}$ quatenus t datur per m vel n, & x: Tum abscissis spatiis XNRQ, XLSQ, &c. singulis æqualibus rectangulo constanti XY, erunt XN, XL, &c. $= x$, & spatia XNM, XLW, &c. singula applicata ad unitatem XQ $= y$ (b).

Positio

† Supra, pag. 986.

(a) Significationes litterarum b, t, τ, r [m], ρ [μ] repetendæ sunt ex loco citato *Comment. Acad. Reg.* [pag. 986]. Inspiciatur ibi *Fig.* 5, nempe b significat crassitiem laminæ elasticæ IK vel AB; t tensionem RT fibræ datæ longitudinis f factam a vi tendente NR $= r$ [m]; τ compressionem $\rho\theta$ ejusdem fibræ factam a vi comprimente N$\rho = \rho$ [μ].

(b) Demonstratum est ibidem, æquationem generalem curvæ Elasticæ KAN, existentibus AD $= x$, DN $= y$, NA $= s$, AH $= ds$, esse

dy

Positio ipsarum x & y in 43 Fig. sic determinatur: Facto semicirculo DEX super quavis diametro DX, applicetur in illo XE ut sit $DX : XE \; [= ds : dx] = \frac{bf}{\sqrt{(bbff - (\int (t+\tau)\,dx)^2)}} : 1 =$ (c) LS : XQ [*Fig.* 44] & producatur XE [*Fig.* 43] in L, ut sit XL = XL [*Fig.* 44] ac denique erigatur super XL [*Fig.* 43] perpendicularis LB $= y =$ spatio XLW [*Fig.* 44] applicato ad XQ, erit B punctum in curva optata ABC [*Fig.* 43]; & sic tot alia puncta invenientur quot libuerit. Sint itaque A & B puncta satis vicina; Dico, si super FG erigatur triangulum FHG, ut sit GH = AB, & FH $= m \times$ FG $: n$, fore punctum H in Spira conoidis GHIK; quo pacto & alia ejusdem Spiræ puncta inveniuntur. No. CIII.

Applicatio ad vulgarem tensionis hypothesin.

Sit [Fig. 5. *Mem. de l'Acad.* 1705 *,] linea tensionis & compressionis TVN$\upsilon\theta$ una linea recta, & sit $r = t$, ut & $\rho = \tau$, erit $\frac{1}{3}t = \frac{1}{tt}\int rt\,dt = \frac{1}{\tau\tau}\int \rho\tau\,d\tau = \frac{1}{3}\tau$; adeoque $t = \tau$: nec non $\frac{1}{3}bt = \frac{b}{tt}\int rt\,dt = nx$; unde t vel $\tau = 3nx : b$. Quare $dy = dx \int (t+\tau)\,dx : \sqrt{(bbff - (\int (t+\tau)\,dx)^2)} = dx \int \frac{6nx\,dx}{b}$:

$dy = dx \int (t+\tau)\,dx : \sqrt{(bbff - (\int (t+\tau)\,dx)^2)}$, seu $bf\,dy = ds \int (t+\tau)\,dx$; quare $ds = bf\,dy : \int (t+\tau)\,dx = bf\,dx : \sqrt{(bbff - (\int (t+\tau)\,dx)^2)}$, & integrando $s = \int (bf\,dx : \sqrt{(bbff - (\int (t+\tau)\,dx)^2)}) =$ [per constructionem] areæ XNRQ vel XLSQ [*Fig.* 44]; unde si pro s sumatur integra longitudo elateris XC = XA $\times 1 =$ XA $\times$ XQ = rectangulo XY, debebunt singulæ areæ XNRQ, XLSQ, &c. æquales esse rectangulo constanti XY; & quia per eandem constructionem NM vel LW $= \int (t+\tau)\,dx : \sqrt{(bbff - (\int (t+\tau)\,dx)^2)}$, erunt areæ XNM, vel XLW $= \int (dx \int (t+\tau)\,dx : \sqrt{(bbff - (\int (t+\tau)\,dx)^2)}) = \int dy$; adeoque ista spatia ad unitatem XQ applicata sunt $= y$.

(c) Quia DX tangit curvam Elasticam XB, ideo erit [positis XL $= x$, XB $= s$] $ds : dx =$ DX : XE.

* Fig. 5, Nᵒ. CII.

No. CIII. $\sqrt{(bbff - (\int \frac{6nxxdx}{b})^2)} = 3nxxdx : \sqrt{(b^4ff - 9nnx^4)} = xxdx :$

$\sqrt{(\frac{b^4ff}{9nn} - x^4)}$, adeoque $ds = \frac{bbf}{3n} dx : \sqrt{(\frac{b^4ff}{9nn} - x^4)}$. Quæ absque quadraturis ope curvæ Lemniscatæ sic construuntur [Vid. *Act. Lipſ.* 1694, m. Sept. p. 338. †]. Super semi-axe minore AB [*Fig.* 45] $= b\sqrt{(f : 3n)}$, statuatur Lemniscata AEDB, nec non Ellipsis BIF, cujus semi-axis major AF sit $= b\sqrt{(2f : 3n)}$. Abscindatur in Lemniscata ex nodo ejus A portio AED = longitudini elateris XC, [*Fig.* 43] & subtensæ rectæ AD fiat æqualis AH, & erigatur HI parallela AF, erit recta AD vel AH = x = XL [*Fig.* 43], & FI — AED = y = LB [*Fig.* 43]. Deinde sumta n majore vel minore, fiat rursum $A\beta = b\sqrt{(f : 3n)}$, & super $A\beta$ describatur alia Lemniscata $\beta\delta$, & alia Ellipsis $\beta\gamma$; quod sit dummodo trajiciatur ex nodo infinita recta ADγ secans indefinite curvas AEB & BGF in D & G, atque junctis BD, BG, fiant parallelæ $\beta\delta$, $\beta\gamma$, secantes infinitam in δ, γ; hæc enim erunt puncta in nova Lemniscata & Ellipsi. ([d]).

† N°. LX, pag. 609.

([d]) Ratio hujus constructionis manifesta fiet ex Exemplo 1 primæ Regulæ, & Exemplo 1 quartæ Regulæ Articulo II°. horum Posthumorum traditarum, pag. 1000, & 1006.

ARTI-

ARTICUL. XXIX.

Problema de Curvatura fornicis, cujus partes ſe mutuo proprio pondere ſuffulciunt ſine opere cæmenti.

SIt Fornix ABC [*Fig. 46.*] conſtructus ex lapidibus cæſis DKLE figuræ fere parallelogrammæ rectangulæ oblongæ, niſi quod KL tantillo major ſit quam DE, latitudinis DK valde exiguæ vel infinite parvæ; & vocetur EN $= dx$, ND $= dy$, DE [pondus particulæ DL] $= ds$, adeoque pondus ipſius BE $= s$. Concipiatur pars fornicis EBF [deficientibus partibus inferioribus AE, CF] ſuſtineri a filis perpendicularibus LG, FH, ſuſtinebit utrumque dimidium ponderis EBF, hoc eſt EB, ſeu s. Si porro loco fili HF ſubſternatur fulcrum in F, potentia ſuſtinens in G manebit eadem quæ antea, eritque $= s$, cum ſuſtineat vectem EF, cujus medio M appenſum intelligitur pondus EBF ſeu $2s$. Quod ſi oblique trahatur idem vectis ſecundum rectam LI tangentem fornicis, demiſſa in LI perpendiculari FI, erit potentia trahens ducta in FI $=$ ponderi appenſo EBF in FM $=$ EB $\times$ FE $= s \times$ FE; adeoque potentia ſuſtinens filum LI : $s =$ FE : FI $=$ [propter ſimilia triangula EFI, EDN] DE : EN $= ds : dx$; adeoque dicta potentia [proinde & vis qua premitur lapis DL juxta directionem LK perpendicularem plano EL vel DK] $= s\,ds : dx$. Porro conſiderandum, quod ſi auferretur pars fornicis EBF, lapis DL nullo cæmento cum parte inferiore AK cohærens, proprio pondere cadere neceſſum haberet; idque vel labendo ſuper plano KD, ſi hoc planum ſit perfecte lubricum; vel rotando circa punctum D, ſi in DK ſit frictio: utrumvis autem fiat, erit conatus hic deſcendendi [hoc eſt potentia ſuſti-

No. CIII. nens lapidem in centro gravitatis ejus, filo OP perpendiculari ad DE] ad pondus lapidis, ut DN ad DE, seu ut dy ad ds; adeoque cum pondus lapidis sit $= ds$, erit descendendi conatus $= dy$. Habemus ergo duas potentias $sds : dx$ & dy; quarum illa lapidem impellit secundum tangentem curvæ IL, ista secundum rectam PO curvæ perpendicularem: momenta autem harum potentiarum variant, prout variat hypothesis, & lapis vel labendo vel rotando descendere conatur ([a]).

1. Si labi conetur lapis, hoc est, ejus partes KD & LE cum omnibus intermediis æquali nisu in rectis ipsi KD parallelis descendere affectent: oportet concipere lapidem instar cunei sese intrudere conantis intra triangulum DQE, qui dum ex KL pervenit in situm DE, hoc est, dum spatium KD absolvit, potentiam prementem secundum IL retropellit longitudine KL — DE; quare, ex natura cunei, vis $dy \times KD =$ vi $\frac{sds}{dx} \times (KL - DE)$, hoc est, [quia KD : KL — DE = DQ : DE = z [radius osculi] : ds] $zdy = sds^2 : dx$, hoc est, [propter $z = ds^3 : dy\,ddx$, posita dy constante] $ds^3 : ddx = sds^2 : dx$, seu $ds : s = ddx : dx$.

2. Si propter impedimentum frictionis in KD rotare conatur lapis circa D: concipiendus est vectis DE, quem potentia $sds : dx$, applicata in extremitate E, impellit secundum directionem IL vel huic parallelam ER, dum potentia dy applicata in vectis medio O eundem impellit juxta directionem PO; quare, ex natura vectis, $sds : dx$ in DR $= dy$ in DO: est vero DR [subtensa anguli contactus ([b])] $= DE^2 : DQ = ds^2 : z$, unde $sds^3 : zdx =$ $dy \times$

([a]) Imo non variant, ut mox ostendetur.

([b]) Subtilis hic est paralogismus. Subtensa anguli contactus DR non est $DE^2 : DQ$, sed $DE^2 : 2DQ$. Nam RD & DQ non in directum jacent, nec angulus contactus RED æqualis est angulo DQE, sed ejus dimidio OQE; quippe RD perpendicularis supponitur ad vectem DE, adeoque parallela rectæ PO vel OQ, posito DQ & EQ esse duos radios circuli osculatoris, & tangentem ER esse perpendicularem ad radium EQ; ita ut anguli RED & OQE sint singuli ejusdem anguli DEQ vel OEQ com-

$dy \times DO = dyds : 2$, adeoque $zdy = 2sds^2 : dx$; hoc est, [propter $z = ds^3 : dyddx$] $ds^3 : ddx = 2sds^2 : dx$, hoc est $ds : 2s = ddx : dx$. No. CIII.

Habemus ergo duas æquationes $ds : s = ddx : dx$, & $ds : 2s = ddx : dx$, seu $sddx - dsdx = 0$, & $2sddx - dsdx = 0$, hoc est, integrando $dx : s = dy : a$, & $dx^2 : s = dy^2 : a$, seu $s = adx : dy$, & $s = adx^2 : dy^2$.

Ad resolvendam priorem; quadretur, ut sit $ssdy^2 = aadx^2$, & addatur $ssdx^2$, erit $ssds^2 = aadx^2 + ssdx^2$, seu $ssds^2 : (aa + ss) = dx^2$, & integrando $\sqrt{(aa + ss)} = x$; indeque $s = \sqrt{(xx - aa)} = adx : dy$; unde $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$, quod indicat curvam Catenariam, ut habet GREGORIUS *.

Ad resolvendam posteriorem $sdy^2 = adx^2$, addatur ady^2, erit $ady^2 + sdy^2 = ads^2$, hoc est $dy\sqrt{(a+s)} = ds\sqrt{a}$, seu $dy = ds\sqrt{a} : \sqrt{(a+s)}$, & integrando $y = 2\sqrt{(aa + as)}$; indeque $s = (yy - 4aa) : 4a = adx^2 : dy^2$, unde $4aadx^2 = yydy^2 - 4aady^2$ & $2adx = dy\sqrt{(yy - 4aa)}$; cujus ecce Constructiones duæ.

I. *Ope Hyperbolæ*: Fiat hyperbola æquilatera BC, [*Fig.* 47] cujus axis BD, centrum A, semiparameter $AB = 2a$, & $AD = y$, erit $DC = \sqrt{(yy - 4aa)}$; in hac igitur producta capiatur DF = spatio BCD diviso per AB; eritque punctum F in curva optata fornicis BF: quia differentiando habetur Diff. DF = Diff. BCD : AB $= dy\sqrt{(yy - 4aa)} : 2a$, hoc est, $2a \times$ diff. DF $= dy\sqrt{(yy - 4aa)} = 2adx$. Ergo $DF = x$.

II. *Ope Logarithmicæ vel Catenariæ*: Esto [*Fig.* 48] Logarithmica quævis HGBIK, cujus axis NM, & sit applicata BA = subtangenti $= 2a = b$; sumtis indefinite in axe ex utraque parte

complementum ad rectum; unde erit OQ : OE [½ DE] = DE : DR [$\frac{DE^2}{2OQ}$] = [ob differentiam inter DQ & OQ infinite parvam] $\frac{DE^2}{2DQ}$. Correcto igitur hoc errore, prodibit eadem æquatio quæ in priori hypothesi, adeo ut Catenaria utrique hypothesi satisfaciat.

* *Transf. Phil.* N°. 231, A. 1697, Aug. pag. 633, vel *Act. Erud.* 1698, Jul. pag. 309.

No. CIII. parte rectis æqualibus AE, EN, AL, LM, applicentur Logarithmicæ totidem rectæ EG, NH, LI, MK, & ex EG abscindatur EC [cui fiat æqualis AD] $= \frac{1}{2}$EG $+ \frac{1}{2}$LI; erit punctum C ex constructione *Leibnitiana* in Catenaria BC: juncta CD producatur in F, ut sit DF $= \frac{1}{8}$NH $- \frac{1}{8}$MK $- \frac{1}{2}$AE, habebiturque F punctum in curva optata fornicis BF.

DEMONSTRATIO.

Sit EG $= p$, fient NH $= pp:b$, LI $= bb:p$, MK $= b^3:pp$ & AE $=$ log. p; eritque $y =$ AD $=$ EC $= \frac{1}{2}$EG $+ \frac{1}{2}$LI $= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}bb:p$; adeoque $dy = \frac{1}{2}dp - \frac{1}{2}bbdp:pp$, & $yy = \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}b^4:pp$, & $yy - bb = \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}b^4:pp$, & $\sqrt{(yy - bb)} = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}bb:p$; proinde $dy\sqrt{(yy - 4aa)} = dy\sqrt{(yy - bb)} = \frac{1}{2}(dp - bbdp:pp) \times \frac{1}{2}(p - bb:p) = \frac{1}{4}pdp - \frac{1}{2}bbdp:p + \frac{1}{4}b^4dp:p^3$. Porro $x =$ DF $= \frac{1}{8}$NH $- \frac{1}{8}$MK $- \frac{1}{2}$AE $= \frac{1}{8}pp:b - \frac{1}{8}b^3:pp - \frac{1}{2}$log. p, & differentiando $dx = \frac{1}{4}pap:b + \frac{1}{4}b^3dp:p^3 - \frac{1}{2}bdp:p$, adeoque $bdx = 2adx = \frac{1}{4}pdp + \frac{1}{4}b^4dp:p^3 - \frac{1}{2}bbdp:p = dy\sqrt{(yy - 4aa)}$. Q. E. D.

NOTA. Posset quis objicere, gratis sumi fulcrum in F puncto lineæ horizontalis EF [*Fig.* 46]; posset enim eodem jure alibi accipi, puta in S; & tum videtur planum LE a majori incumbente pondere EBS fortius urgeri quam antea; unde fornix in eadem parte simul & fortius & debilius premeretur, prout fulcrum in F vel S concipitur: quod absurdum. *Respondetur*: Ostendendum est hoc non fieri, sed ubivis sumatur fulcrum in utraque nostra curva, vim quam sustinet filum LI constanter esse $sds:dx$, aut eam, quam sustinet filum LG, esse s.

1. Sit EBS Catenaria, cujus tangentes in L & S concurrant in T, e quo demissum perpendiculum TY secet vectem SL in X, & ducantur SV, SY normales super LI & TX. Constat centrum gravitatis portionis catenariæ EBS reperiri in perpendiculo TY, adeoque tantundem esse, ac si pondus EBS appensum esset in puncto X vectis SL; quare ostendendum, potentiam LI seu $sds:dx$

$sds : dx$ in SV = ponderi EBS in SY, quod ita liquet: Quia s No. CIII.
$= \sqrt{(xx - aa)}$, erit $ds = xdx : s$, & $sds : dx = x$. Sed ipsa x in Catenaria exhibet ejus firmitatem in puncto L, quæ, ex lege gravium filis suspensorum, debet esse ad pondus catenæ EBS tanquam appensum in T, ut sinus anguli STY ad sinum anguli STL, hoc est, ut SY ad SV, quare x seu $sds : dx$ in SV = ponderi EBS in SY. *Q. E. D.*

2. *NB.* In altera curva deprehendo istud non procedere: unde suspicor, in hac hypothesi [quod lapis DE rotando circa D descensum moliatur] aliquid vitii latere, ut stare non possit. Ratio haud dubie hæc est, quod lapis ipso DL proxime inferior & ipse minime quiescit, sed circa inferiorem extremitatem pari nisu rotare conatur; unde superior extremitas D non manet immota, sed æquali conatu cum E juxta directionem KD descensum affectat; quod tantundem est, ac si lapis DL gliscceret super KD, quæ fuit ipsa prima hypothesis. Unde solam Funiculariam Problemati satisfacere concludo. (c)

(c) Non igitur hypothesis, sed solutio fuit vitiosa; nec ratio subjecta valet. Potest enim lapidis inferioris extremitas superior D ut fulcrum immotum considerari, quia non statim ac liberatur lapis superior DL a pondere incumbente EBF, etiam inferior lapis ab omni pressione lapidis superioris liberatur.

No. CIII.

ARTICUL. XXX.

Lineæ datæ rigidæ, ab infinitis potentiis ſecundum quaſvis directiones impulſæ tractæve, determinare directionem mediam, axem æquilibrii & vim impulſus.

DE linea flexili non data, ſupra ARTIC. XI. * Nunc de data inflexili.

I. Sit hæc primo recta AD [*Fig.* 49] tracta ab infinitis potentiis P, Q, R, &c. ſecundum quaſvis directiones BP, CQ, DR, &c. Poſito E eſſe fulcrum circa quod fiat æquilibrium, demittantur ex illo rectæ ES, ET, EV, &c. perpendiculares ſuper BP, CQ, DR, &c. & vocentur ſin. tot. $= a$, ſin. ang. ABP $= b$, compl. $= c$; ſin. ang. ACQ $= d$, compl. $= e$; ſin. ang. ADR $= f$, compl. $= -g$, propter angulum obtuſum; nec non AB $= s$, AC $= t$, AD $= u$, AE $= x$, P $= p$, Q $= q$; R $= r$. Erunt Sin. tot. [a] : ſin. ang. ABP [b] = BE [$x - s$] : ES [$\frac{bx - bs}{a}$]; Sin. tot. [a] : ſin. ang. ACQ [d] = CE [$t - x$] : ET [$\frac{dt - dx}{a}$]; parique modo Sin. tot. [a] : ſin. ang. ADR [f] = DE [$u - x$] : EV [$\frac{fu - fx}{a}$]. Hinc momentum potentiæ P = P × ES = $(bpx - bps) : a$; moment. potent. Q = Q × ET = $(dqt - dqx) : a$; moment. potent. R = R × EV = $(fru - frx) : a$; unde, cum ſumma momentorum ab una parte æquetur

* Pag. 1036, & ſeq.

quetur summæ momentorum ab altera, erit $bpx - bps = dqt - dqx + fru - frx$, hoc est, $(bp + dq + fr)x = bps + dqt + fru$ ac proinde $x = (bps + dqt + fru) : (bp + dq + fr)$, seu $x = \int bps : \int bp$. Rursus esto vectis positio I L H parallela priori, quam intersecent lineæ directionum in F, G, H, &c. & jungant utrumque vectem rectæ perpendiculares [quæ singulæ $= a$] A I, BK, CM, DN, EL, &c. sitque U punctum fulcrum posterioris vectis: itaque Sin. ang. ABP [b]: sin. compl. [c] $=$ BK [a]: FK No. CIII.

[$\frac{ac}{b}$]; Sin. ang. ACQ [d]: sin. compl. [e] $=$ CM [a]: GM

[$\frac{ae}{d}$]; Sin. ang. ADR [f]: sin. compl. [$-g$] $=$ DN [a]:

HN [$\frac{-ag}{f}$]. Hinc $IF = AB - FK = s - ac : b$, $IG = AC - GM = t - ae : d$; $IH = AD + HN = u - ag : f$; & posita $IU = y$, erunt $FU = IU - IF = y - s + ac : b$, $GU = IG - IU = t - ae : d - y$, $HU = IH - IU = u - ag : f - y$; ergo demissæ ex U super BP, CQ, DR, &c. perpendiculares ordine reperiuntur $(by - bs + ac) : a$, $(dt - ae - dy) : a$, $(fu - ag - fy) : a$; unde momentum Potent. $P = (bpy - bps + apc) : a$; mom. potent. $Q = (dqt - aqe - dqy) : a$; momentum potentiæ $R = (fru - arg - fry) : a$; adeoque $bpy - bps + apc = dqt - aqe - dqy + fru - arg - fry$, hoc est, $(bp + dq + fr)y = bps + dqt + fru - apc - aqe - arg$, ac proinde $y = (bps + dqt + fru - apc - aqe - arg) : (bp + dq + fr)$. Quare $UL = AE - IU = x - y = (apc + aqe + arg) : (bp + dq + fr)$, hoc

est, $UL = \int apc : \int bp$, adeoque $EL : UL = a : \frac{\int apc}{\int bp} = \int bp : \int cp$;

unde repertum est fulcrum seu centrum æquilibrii vectis E, & linea directionis mediæ EU.

No. CIII.

Aliter.

Resolvatur pressio obliqua BP, &c. in duos motus BK & KF, quorum ille vecti AD perpendicularis, hic parallelus: eritque BF ad BK, seu a ad b, ut p ad $bp:a$, vim qua trahitur vectis juxta perpendicularem BK; nec non BF ad FK, seu a ad c, ut p ad $cp:a$, vim qua idem trahitur juxta BA. Est igitur tota vis perpendicularis, quæ exponatur per $EL = \int(bp:a)$, & tota vis parallela, exposita per $LU = \int(cp:a)$; adeoque $EL:LU = \int bp : \int cp$, ut supra. Porro vis $(bp:a) \times AB = bps:a =$ momento vis trahentis per BK respectu puncti A, quare summa momentorum $\int(bps:a)$ divisa per summam virium $\int(bp:a)$, dabit $AE = \int bps : \int bp$, distantiam centri æquilibrii E a puncto A, ut supra. Hinc vis impulsus $EU = \surd(EL^2 + LU^2) = \surd((\int bp)^2 + (\int cp)^2):a$.

II. Sit deinde curva quæcunque rigida ADF, [*Fig.* 50] quæ in omnibus suis punctis D trahatur vel impellatur ab infinitis potentiis P, secundum quasvis datas directiones DP. Producatur PD donec axem curvæ AC secet in B; parique momento potentia P trahet vectem curvum AD per DP, atque traheret vectem rectum AC in B per eandem directionem BP, quoniam eadem est perpendicularis ex fulcro A in communem directionem BP demissa. Idcirco determinetur, per præced. §. 1, axis æquilibrii EU rectæ AB, hic quoque erit axis æquilibrii curvæ AD.

EXEMPLUM I.

Esto adhuc ADF curva quæcunque, in qua $AC = x$, $CD = y$, $AD = z$; sed $P = adz$, & omnes directiones DP curvæ perpendiculares, quales sunt impulsus fluidorum: erit DH [dz]: GH [dx] = BD : CD = sin. tot. [a]: sin. ang. ABP [b]; unde $b =$

$b = adx : dz$, & pariter $c = ady : dz$; porro GH $[dx]$: GD No. CIII.
$[dy] =$ CD$[y]$: CB $[\frac{ydy}{dx}]$; unde $s = AB = AC + CB = x + ydy : dx = (xdx + ydy) : dx$; quare $bps = (adx : dz) \times adz \times (xdx + ydy) : dx = aaxdx + aaydy$. Ideo $\int bps = \frac{1}{2} aaxx + \frac{1}{2} aayy$, & $AE = \int bps : \int bp = (xx + yy) : 2x$, ut & $EL : LU = \int bp : \int cp = x : y$, & $EU = \sqrt{((\int bp)^2 + (\int cp)^2)} : a = a\sqrt{(xx + yy)}$.

Conſtructio talis: Per medium chordæ AD normalis agatur IE, erit hæc axis æquilibrii. Nam, propter triangula ſimilia ACD, AIE, & ELU, eſt AC$[x]$: AD$[\sqrt{(xx+yy)}] =$ AI $[\frac{1}{2}\sqrt{(xx+yy)}]$: AE$[\frac{xx+yy}{2x}]$; nec non EL : LU $=$ AC : CD $= x : y$. Impulſus totalis EU $= a \times$ AD. Si arcus AD, dicta ratione impulſus, in A & D fulcris aut filis ipſi IE parallelis ſuſtineatur, ſuſtinebit utrumvis $a \times$ AI.

EXEMPLUM II.

Sit deinde ADF [*Fig.* 51] *Velaria* ſeu *Catenaria*, cujus centrum M, & $MC = x$; conſtat eſſe $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$; $dz = xdx : \sqrt{(xx - aa)}$; $z = \sqrt{(xx - aa)}$, $P = ady^2 : dz$(*) $= a^3dx : xz$; quare ſin. ang. $ABP = b = adx : dz = az : x$; ſin. compl. $c = ady : dz = aa : x$; $MB = MC + CB = s = x + ydy : dx = x + ay : z$; proinde $bp = a^4dx : xx$, & $\int bp = (a^3x - a^4) : x$;

(*) Si curva AD repræſentet velum a potentiis ad curvam perpendicularibus impulſum, eſt $P = ady^2 : dz$; ſed ſi repræſentet catenam a potentiis ad axem AC parallelis impulſam, erit $P = adz$, & media directio RN itidem ad axem AC parallela. Pro vecte enim recto hic ſumenda eſt recta AS ad axem AC perpendicularis, eritque $b = a$ & $c = 0$, $s = AS = y$, unde $\int bps = \int aaydz = aa\int ydz = aayz - aa\int zdy = aayz - aa\int adx =$ [quia, in caſu $x = a$, $\int bps$ debet eſſe $= 0$] $aayz - a^3x + a^4$; quare $\int bps : \int bp = (aayz - a^3x + a^4) : aaz = (yz - ax + aa) : z =$ AN $=$ diſtantiæ centri æquilibrii a puncto A; ipſeque axis æquilibrii NR ad axem AC parallelus, ob $\int bp : \int cp = b : c = a : 0$.

No. CIII. x; nec non $bps = a^4 dx : x + a^3 y dx : xxz$, & $\int bps = a^3 yz : x$ (b); ut & $cp = a^3 dx : xxz$, & $\int cp = a^3 z : x$; unde tandem $ME = \int bps : \int bp = yz : (x - a)$, & $AE = yz : (x - a) - a$; noc non $AN : AE = EL : LU = \int bp : \int cp = \frac{a^3 x - a^4}{x} : \frac{a^3 z}{x} = x - a : z$. Quæ confirmantur ex eo, quod axis æquilibrii EN bisecare debet angulum AND, per ea quæ ostensa sunt supra Art. XI, in *Applicatione* *, ubi in hypothesi $r = a$, id est, anguli PDN recti, sinus m, id est, sinus anguli DNE inventus est = sinui n, id est, sinui anguli ANE. Cum enim per Artic. cit. & *Act. Lips.* 1695, p. 548 †, sit $DK = x$; atque insuper $z : x = dx : dz = CA\,[x - a] : DN\,[\frac{xx - ax}{z}]$, & $AN = \frac{yz - ax + aa}{z}$; nec non, ob angulum AND bisectum, triangula NDK, NAE similia, erit $DN : DK$, hoc est, $\frac{xx - ax}{z} : x = [x - a : z =]$ $AN\,[\frac{yz - ax + aa}{z}] : AE\,[\frac{yz - ax + aa}{x - a} = \frac{yz}{x - a} - a]$, ut antea.

(b) Quia $zdy = adx$, ideo $a^4 dx : x + a^3 y dx : xxz = a^3 z dy : x + a^3 ydx : xxz = [\text{ob } aa = xx - zz]$ $a^3 zdy : x + (a^3 yxxdx - a^3 yzzdx) : xxz = [\text{ob } xdx = zdz]$ $a^3 zdy : x + (a^3 yxzdz - a^3 yzzdx) : xxz = a^3 zdy : x + a^3 ydz : x - a^3 yzdx : xx$, cujus integralis est $a^3 yz : x = \int bps$. Sic quoque invenitur $\int cp = \int a^3 dx : xxz = \int \frac{a^3 xxdx - a^3 zzdx}{xxz} = \int \frac{a^3 xzdz - a^3 zzdx}{xxz} = \int \frac{a^3 xdz - a^3 zdx}{xx} = \frac{a^3 z}{x}$.

* Pag. 1045, Not. m.

† N°. LXVI, pag. 656, & 657, Not.

ARTI-

ARTICUL. XXXI.

De inventione Sectoris Cycloidici solidi, qui centrum gravitatis habeat algebraice determinabile.

Conf. N^us. XCV, pag. 893, 894.

Sint [*Fig.* 52] radius AH $= 1$, semiperipheria ALF $= c$, AK $= x$, KL $= \sqrt{(2x - xx)} = y$, KI $= z$, BL $=$ AL $= t$; adeoque $dy = (dx - xdx):y$, & $dt = dx:y$, erit conus IBD $= (y+t)^2 \times \frac{1}{3}cz$; centri gravitatis ejus distantia ab A $= x + \frac{1}{4}z$, adeoque momentum ejus respectu A $= (\frac{1}{3}xyyz + \frac{2}{3}xyzt + \frac{1}{3}xztt + \frac{1}{12}yyzz + \frac{1}{6}yzzt + \frac{1}{12}zztt) \times c$. Differentiale segmenti solidi Cycloidici BAD $= (yy + 2yt + tt)cdx$; momentum hujus differentialis ab A $= (xyy + 2xyt + xtt)cdx$, ipsum segmentum solidum BAD seu $\int(yy + 2yt + tt) \times cdx = (-x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{3}x^3 + yt + xyt - \frac{1}{2}tt + xtt)c$; $\int xyycdx = (\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4).c$; $\int 2xytcdx = (x + \frac{1}{6}xx - \frac{2}{9}x^3 - yt - \frac{1}{3}xyt + \frac{2}{3}xxyt + \frac{1}{2}tt).c$; $\int xttcdx = (-\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}xx + \frac{3}{2}yt + \frac{1}{2}xyt - \frac{3}{4}tt + \frac{1}{2}xxtt).c$ (*); adeoque momentum totius segmen-

(*) Ecce rationem harum integrationum $\int yydx = \int(2x - xx)dx = xx - \frac{1}{3}x^3$; $\int 2ytdx = 2xyt - \int 2xydt - \int 2xtdy =$ [ob $ydt = dx$] $2xyt - xx - \int 2xtdy =$ [ob $dy = (dx - xdx):y = dt - xdt$] $2xyt - xx - \int 2xtdt + \int 2xxtdt =$ [ob $yy = 2x - 2xx$] $2xyt - xx - \int 2yytdt + \int 2xtdt = 2xyt - xx - \int 2ytdx + \int 2xtdt$. Ergo $\int 4ytdx = 2xyt - xx + \int 2xtdt = 2xyt - xx + \int(2tdt - 2tdy) = 2xyt - xx + tt - 2yt + \int 2ydt = 2xyt - xx + tt - 2yt + 2x$. Hinc, dividendo per 2, est $\int 2ytdx = xyt - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}tt - yt + x$; $\int ttdx = xtt - \int 2xtdt = xtt - \int(2tdt - 2tdy) = xtt - tt + 2yt - \int 2ydt = xtt - tt + 2yt - 2x$. Quare $\int(yy + 2yt + tt)dx = xx - \frac{1}{3}x^3 + xyt - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}tt - yt + x + xtt - tt + 2yt - 2x = -x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{3}x^3 + yt + xyt - \frac{1}{2}tt + xtt$.

No. CIII. menti ſolidi, ſeu $\int(xyy + 2xyt + xtt)\,c\,dx = (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}xx + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}yt + \frac{1}{6}xyt + \frac{2}{3}xxyt - \frac{3}{4}tt + \frac{1}{2}xxtt).c$; addito momento coni IBKD, habetur momentum Sectoris IBAD, quod diviſum per ipſum Sectorem, ſeu aggregatum ſegmenti & coni, dat diſtantiam centri gravitatis Sectoris ab A, quæ exprimetur per fractionem, cujus numerator erit $(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}xx + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}xyyz + \frac{1}{12}yyzz + \frac{1}{2}yt + \frac{1}{6}xyt + \frac{2}{3}xxyt + \frac{2}{3}xyzt + \frac{1}{6}yzzt - \frac{3}{4}tt + \frac{1}{2}xxtt + \frac{1}{3}xztt + \frac{1}{12}zztt).c$ & denominator $(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}yyz + yt + xyt + \frac{2}{3}yzt - \frac{1}{2}tt + xtt + \frac{1}{3}ztt).c$ ([b]).

Neglecto c, ponantur quantitates, quæ per tt multiplicatæ ſunt in numeratore, ad quantitates, quæ per tt multiplicantur in denominatore, eam rationem habere quam habent quantitates, quæ utrobique ſunt per t multiplicatæ, ut & eam, quam habent quantitates in quibus utrobique t non reperitur: ſic æquivalebit fractio dictæ rationi.

Operatio talis: $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}xz + \frac{1}{12}zz : -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}xy + \frac{2}{3}xxy + \frac{2}{3}xyz + \frac{1}{6}yzz : y + xy + \frac{2}{3}yz$; ſublatis fractionibus,

xtt. Porro $\int xyydx = \int(2xxdx - x^3dx) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$; $\int 2xytdx = xxyt - \int xxydt - \int xxtdy = xxyt - \frac{1}{3}x^3 - \int xxtdy = xxyt - \frac{1}{3}x^3 - \int xxtdt + \int x^3tdt = xxyt - \frac{1}{3}x^3 - \int xyytdt - \int yytdt + \int 2xtdt = xxyt - \frac{1}{3}x^3 - \int xytdx - \int ytdx + \int 2xtdt$ = [quia in præced. inventum eſt $\int 2ytdx = xyt - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}tt - yt + x$, & $\int 2xtdt = \int(2tdt - 2tdy) = tt - 2yt + \int 2ydt = tt - 2yt + 2x$] $xxyt - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xyt + \frac{1}{4}xx - \frac{1}{4}tt + \frac{1}{2}yt - \frac{1}{2}x + tt - 2yt + 2x - \int xytdx = xxyt - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xyt + \frac{1}{4}xx + \frac{3}{4}tt - \frac{3}{2}yt + \frac{3}{2}x - \int xytdx$. Quare utrinque addendo $\int xytdx$, & poſtea dividendo per 3, invenitur $\int xytdx = \frac{1}{3}xxyt - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}xyt + \frac{1}{12}xx + \frac{1}{4}tt - \frac{1}{2}yt + \frac{1}{2}x$. Eodem modo $\int xttdx = \frac{1}{2}xxtt - \int xxtdt = \frac{1}{2}xxtt + \int(yytdt - 2xtdt) = \frac{1}{2}xxtt + \int(ytdx - 2xtdt) = \frac{1}{2}xxtt + \frac{1}{2}xyt - \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}tt - \frac{1}{2}yt + \frac{1}{2}x - tt + 2yt - 2x = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}xx + \frac{3}{2}yt + \frac{1}{2}xyt - \frac{3}{4}tt + \frac{1}{2}xxtt$.

([b]) Hic in ſcribendo valorem ſegmenti BAD $= \int(yy + 2yt + tt)\,c\,dx$, irrepſit error in primum terminum denominatoris. Debuiſſet enim poni $- x +$ &c. loco $-\frac{1}{2}x +$ &c. Hinc erronea eſt ſolutio ab Auctore inventa, quam tamen in *Actis Lipſ.* 1700, pag. 552, [N°. XCV, pag. 894] non dedit niſi ſalvo errore calculi.

bus, $-3+6xx+4xz+zz : -6+12x+4z = 6y+2xy+$ No. CIII.
$8xxy+8xyz+2yzz : 12y+12xy+8yz =$ [dividendo tertium & quartum terminum per $2y$] $3+x+4xx+4xz+zz : 6+6x+4z =$ [differ. quinti & primi : different. ſexti & ſecundi $=$] $6+x-2xx : 12-6x =$ [dividendo per $2-x$] $3+2x : 6$, ſeu [dividendo ſecundum & decimum per 2] $-3+6xx+4xz+zz : -3+6x+2z = 3+2x : 3$. Multiplicando extrema & media, habetur $3zz+12xz+18xx-9 = 6z+4xz+12xx+12x-9$, factaque reductione $zz = 2z - \frac{8}{3}xz - 2xx + 4x$, & $z = 1 - \frac{4}{3}x + \sqrt{(1+\frac{4}{3}x - \frac{2}{9}xx)}$.

Porro $-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}xx+\frac{1}{3}xz+\frac{1}{12}zz : -\frac{1}{2}+x+\frac{1}{3}z = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{12}xx + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}xyyz + \frac{1}{12}yyzz : -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}xx - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}yyz$ [e]. Sublatis fractionibus, $-9+18xx+12xz+3zz : -3$

[e] Correcto errore qui eſt in quarto termino, & ſublatis fractionibus, habetur hæc proportio, $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z = -18x-3xx+16x^3-9x^4+12yyz+3yyzz : -6x+3xx-2x^3+2yyz =$ [primus terminus per yy multiplicatus minus tertio : ſecund. per yy multipl. minus quarto $=$] $-9yy+18xxyy+18x+3xx-16x^3+9x^4 : -3yy+6xyy+6x-3xx+2x^3 =$ [ſubſtituendo $2x-xx$ pro yy] $12xx+20x^3-9x^4 : 12xx-4x^3 = 12+20x-9xx : 12-4x$. Hinc $(-9+18xx+12xz+3zz) : (-3+6x+2z) = (12+20x-9xx) : (12-4x)$: Sed ſupra, in reductione prioris proportionis, inventum fuit $(-3+6xx+4xz+zz) : (-3+6x+2z) = (3+2x) : 3$, ſeu $(-9+18xx+12xz+3zz) : (-3+6x+2z) = 3+2x$, unde $(12+20x-9xx) : (12-4x) = 3+2x$, quæ æquatio reducta præbet $xx-8x+24=0$, ſicuti invenit Cel. Auctoris *Frater* in *Act. Lipſ.* 1701, pag. 175. Sed nihilominus, ſi in reducenda hac proportione $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z = -18x-3xx+16x^3-9x^4+12xyyz+3yyzz : -6x+3xx-2x^3+2yyz$, inſiſtamus veſtigiis Auctoris, prodibit [quod mirandum] eadem æquatio ab Auctore inventa $xx = x+\frac{1}{4}$. Nam multiplicando duos primos terminos per x, in reliquis ſubſtituendo valorem ipſius yy, & deinde per x dividendo, fiet $-9x+18x^3+12xxz+3xzz : -3x+6xx+2xz = -18-3x+16xx-9x^3+24xz-12xxz+6zz-3xzz : -6+3x-2xx+4z-2xz =$ [ſumma tertii & primi : ſumm. quarti & ſecundi $=$] $-18-12x+16xx+9x^3+24xz+6zz : -6$

No. CIII. $-3+6x+2z = -18x-3xx+16x^3-9x^4+12xyyz+3yyzz : -3x+3xx-2x^3+2yyz$. Multiplicando duos primos terminos per x, ([d]) in reliquis substituendo valorem ipsius

$+4xx+4z$, seu duos primos terminos iterum per x dividendo, $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z = -18-12x+16xx+9x^3+24xz+6zz : -6+4xx+4z$; multiplicando extrema ac media, & reducendo, fiet $zz = ((30xx-104x+24)z+18x^3-69xx-24x+72):(-12x+36) = 2z-\frac{8}{3}xz-2xx+4x$, qua reducta, habetur $z = (6x^3-51xx+168x-72):(-2xx+16x-48) = (-6x+3):2 = 1-\frac{4}{3}x+\sqrt{(1+\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}xx)}$, id est $(3-10x):6 = \sqrt{(1+\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}xx)}$, unde iterum prodit $xx = x+\frac{1}{4}$. Verum, ut in citato loco *Actor. Lips.* monuit Cel. *Joh.* BERNOULLI, radices hujus æquationis sunt inutiles, nec quæsito satisfaciunt. Cujus rei ratio est, quod in reductione æquationis quæ relationem exprimit inter z & x, positum fuit $z = (6x^3-51xx+168x-72):(-2xx+16x-48) = (-6x+3):2$; quod non necessario verum est, quia hæc æquatio proprie non est ea ad quam pervenitur in reductione, sed [sublata fractione & membris omnibus ad unam partem positis] $2xxz+16xz+48z+6x^3-51xx+168x-72 = 0$, quæ quantitas eum composita sit ex duobus factoribus $xx-8x+24$, & $2z+6x-3$, satisfit æquationi, si modo alterutra harum quantitatum fuerit $= 0$. Solam autem priorem $xx-8x+24$ esse $= 0$, ex priore nostra resolutione patet. Cum igitur hujus æquationis radices sint imaginariæ, nullus per hanc methodum inveniri potest Sector solidus, cujus centrum gravitatis sit algebraice determinabile.

([d]) Si Auctor duos primos terminos, non per x, sed per yy aut $2x-xx$ multiplicasset, potuisset evitare radices inutiles; nam nec huic proportioni $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z = -18x-3xx+16x^3-9x^4+12xyyz+3yyzz : -3x+3xx-2x^3+2yyz$, quam, per errorem, loco hujus $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z = -18x-3xx+16x^3-9x^4+12xyyz+3yyz : -6x+3xx-2x^3+2yyz$ sibi resolvendam sumsit, satisfacit æquatio ab ipso inventa $xx = x+\frac{1}{4}$. Multiplicatis enim duobus primis terminis per yy, habetur $-9yy+18xxyy+12yyxz+3yyzz : -3yy+6xyy+2yyz = -18x-3xx+16x^3-9x^4+12xyyz+3yyzz : -3x+3xx-2x^3+2yyz =$ [diff. primi & tertii : diff. secundi & quarti $=$] $9yy-18xxyy-18x-3xx+16x^3-9x^4 : 3yy-6xyy-3x+3xx-2x^3$ seu [duos primos terminos iterum per yy dividendo] $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z =$ [substituendo $2x-xx$ pro yy] $-12xx-20x^3+9x^4 : 3x-$

12xx

ſius yy, & deinde dividendo per x, fit $-9x+18x^3+12xxz+3xzz : -3x+6xx+2xz = -18-3x+16xx-9x^3+24xz-12xxz+6zz-3xzz : -3+3x-2xx+4z-2xz =$ [ſumm. tertii & primi : ſumm. quarti & ſecundi $=$] $-18-12x+16xx+9x^3+24xz+6zz : -3+4xx+4z$, ſeu [duos primos terminos iterum per x dividendo] $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z = -18-12x+16xx+9x^3+24xz+6zz : -3+4xx+4z$. Multiplicando extrema & media, ac reducendo, fit $zz = ((30x^3-104xx+60x)z+18x^4-69x^3+30xx+72x-27) : (-12xx+36x-9)$ (e) $=$ [per ſuper. demonſtr.] $2z-\frac{8}{3}xz-2xx+4x$; qua reducta, habetur $z = (6x^4-51x^3+132xx-108x+27) : (-2x^3+16xx-36x+18) =$ [per ſup. dem.] $1-\frac{4}{3}x+\sqrt{(1+\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}xx)}$; unde $(6x^4-51x^3+132x^2-108x+27) : (-2x^3+16xx-36x+18)+\frac{4}{3}x-1 = \sqrt{(1+\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}xx)}$; id eſt, $(\frac{10}{3}x^4-\frac{83}{3}x^3+68xx-48x+9) : (-2x^3+16xx-36x+18) = \sqrt{(1+\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}xx)}$; ſeu, [multiplicando per 3] $\sqrt{(9+12x-2xx)} = (10x^4-83x^3+204xx-144x+27) : (-2x^3+16xx-36x+18) =$ [diviſis fractionis terminis per $x-3$] $(10x^3-53xx+45x-9) : (-2xx+10x-6) =$ [diviſis iiſdem per $xx-5x+3$] $(10x-3) : -2$; unde tandem prodit $xx = x+\frac{1}{4}$, & $x = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}$, & $z = [1+\frac{4}{3}x+\sqrt{(1+\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}xx)}]$

$12xx+4x^3 = -12x-20xx+9x^3 : 3-12x+4xx$. Sed ſupra in reſolutione primis proportionis invenit $-3+6xx+4xz+zz : -3+6x+2z = 3+2x : 3$, hoc eſt, [primum terminum per 3 multiplicando, & quartum per 3 dividendo] $-9+18xx+12xz+3zz : -3+6x+2z = 3+2x : 1$. Quare $-12x-20xx+9x^3 : 3-12x+4xx = 3+2x : 1$; multiplicando extrema & media, & omnia membra ad unam partem ponendo, proveniet $x^3-8xx+18x-9=0$; in qua æquatione cum non contineatur iſta $xx = x+\frac{1}{4}$; patet hanc poſteriorem non ſatisfacere.

(e) Quia uterque terminus fractionis $(6x^4-51x^3+132xx-108x+27) : (-2x^3+16xx-36x+18)$ per $x^3-8xx+18x-9$ diviſibilis eſt, prodeunte in quoto $(6x-3) : -2$; debuiſſet concludi, eſſe vel $z = (6x-3) : -2$, vel $x^3-8xx+18x-9=0$, vel utramque æquationem ſimul locum habere: ſed ſolam poſteriorem ſatisfacere modo oſtenſum eſt.

No. CIII. $- \frac{2}{9}xx)] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$. (f)

(f) Neque hic consequenter ratiocinatus est Auctor, quia fecit $z = (6x^4 - 51x^3 + 132xx - 108x + 27):(-2x^3 + 16xx - 36x + 18) = (6x - 3):-2$, & $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}$; sequeretur z esse $-3\sqrt{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{4}{3}x - \sqrt{(1 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}xx)}$.

ARTICUL. XXXII.

Quædam formulæ æquationum differentio-differentialium reductæ ad æquationes differentiales primi generis.

Confer. Ni. XCIII, pag. 864 & seq. & XCVI, pag. 897 & seq.

Sint x & y coordinatæ alicujus curvæ, z curvæ longitudo, p quantitas data per x, q quantitas data per z, $dp = hdx$, & $dq = idz$, a & b quantitates constantes.

I. Existente dy constante,

& 1. $hdz^2 d^3x - hdxddx^2 = dhdz^2 ddx$, - - erit $dy = adx\sqrt{(bb - 2bp + pp - aa)}$

2. $hdz^2 d^3x - 3hdxddx^2 = dhdz^2 ddx$ - - - $dy = pdx:\sqrt{(aa - pp)}$ & $(a - p)dx:\sqrt{(2ap - pp)}$

3. $hpdz^2 d^3x - 3hpdxddx^2 = pdhdz^2 ddx - 2hhdxdz^2 ddx$ - - $dy = adx:\sqrt{(pp - aa)}$ & $(p - a)dx:\sqrt{(2ap - aa)}$

4. $idxdz^2 d^3x = idx^2 ddx^2 + 2idz^2 ddx^2 + dIdxdz^2 ddx$ - - $dy = qdz:\sqrt{(aa + qq)}$ & $(a - q)dz\sqrt{(bb - 2aq + qq)}$

5. $qidxdz^2 d^3x + 2iidxdz^3 ddx = qidx^2 ddx^2 + 2qidz^2 ddx^2 + qdidxdz^2 ddx$ - $dy = adz:\sqrt{(aa + qq)}$ & $(aq - bb)dz \cdot b\sqrt{(bb - 2aq + qq)}$

6. $hpdz^2 d^3x - hpdxddx^2 = pdhdz^2 ddx - 2hhdxdz^2 ddx$ - - $dy = apdx:\sqrt{((bb - aa)pp - 2aabp + a^4)}$

II. Exi-

II. Exiſtente dz conſtante,

& 7. $phdy^2d^3x+3phdxddx^2+2hhdxdy^2ddx = pdhdy^2ddx$ - - erit $dy=pdx:\sqrt{(aa-pp)}$

8. $hdy^2d^3x+3hdxddx^2 = dhdy^2ddx$ - - - $dy=adx:\sqrt{(pp-aa)}$

9. $idy^2d^3x+3idxddx^2 = didy^2ddx$ - - - $dy=adz:\sqrt{(aa+qq)}$

10. $idxdy^2d^3x+3idx^2ddx^2 = 2idz^2ddx^2 + didxdy^2ddx$ - - - $dy=qdz\sqrt{(aa+qq)}$.

Poſſunt autem hæ æquationes differentiales tertii generis prius ad alias ſecundi generis reduci ita (*). Pro prima & ſecunda, pono

Kcccccc 3

(*) Commodius hæ æquationes integrantur reducendo ipſarum terminos ad differentialia logarithmica per ſimplicem diviſionem. Sic, in prima æquatione, dividendo per hdz^2ddx habetur $d^3x:ddx - dxddx:dz^2 = dh:h$, ſeu [ponendo $dzddz$ pro $dxddx$, ob dy conſt.] $d^3x:ddx - ddz:dz - dh:h = 0$, cujus integralis eſt $l.ddx - l.dz - l.h = l.$ conſt. Sumendo logarithmorum numeros, $ddx:hdz =$ conſt.

Similiter in ſecunda æquat. dividendo per eandem quantitatem hdz^2ddx, provenit $d^3x:d^2x - 3dxddx:dz^2$ [$-3ddz:dz$] $-dh:h = 0$; cujus integralis eſt $l.ddx - 3l.dz - l.h = l.$ conſt., & ſumendo numeros $ddx:hdz^3 =$ conſt.

Sic dividendo terminos tertiæ æquationis per $hpdz^2ddx$, habetur $d^3x:ddx - 3dxddx:dz^2$ [$-3ddz:dz$] $-dh:h+2hdx:p$ [$+2dp:p$] $= 0$, integrando $l.ddx - 3l.dz - l.h + 2l.p = l.$ conſt. ſumendoque numeros $p^2ddx:hdz^3 =$ conſt.

In quarta, dividendo per $idxdz^2ddx$, eſt $d^3x:d^2x - dxddx:dz^2$ [$-ddz:dz$] $-2ddx:dx - di:i = 0$, integrando $l.ddx - l.dz - 2l.dx - l.i = l.$ conſt. Unde $ddx:idx^2dz =$ conſt.

In quinta, dividendo per $qidxdz^2ddx$ eſt $d^3x:ddx + 2idz:q$ [$+2dq:q$] $- dxddx:dz^2$ [$-ddz:dz$] $-2ddx:dx - di:i = 0$, hinc $qqddx:idx^2dz =$ conſt.

In ſexta, dividendo per $hpdz^2ddx$, eſt $d^3x:ddx - dxddx:dz^2$ [$-ddz:dz$] $-dh:h+2hdx:p$ [$+2dp:p$] $= 0$; hinc $ppddx:hdz =$ conſt.

In ſeptima, dividendo per $phdy^2ddx$, habetur $d^3x:ddx+3dxddx:dy^2$ [$-3ddy:dy$, ob dz conſtantem] $+2hdx:p$ [$+2dp:p$] $-dh:h = 0$; proinde $ppddx:hdy^3 =$ conſt.

In octava, dividendo per hdy^2ddx, eſt $d^3x:ddx+3dxddx:dy^2$ [$-3ddy:dy$] $-dh:h = 0$; proinde $ddx:hdy^3 =$ conſt.

Eodem

No. CIII. pono $ddx^m : h^m dz^2 =$ conſtanti, unde differentiando habetur; $mh^m dz^2 ddx^{m-1} d^3x - 2h^m dz ddz ddx^m - mh^{m-1} dh dz^2 ddx^m = 0$. dividendoque per $mh^{m-1} ddx^{m-1}$, fiet $hdz^2 d^3x - \frac{2}{m} hdz ddz ddx - dh dz^2 ddx = 0$. locoque $dz ddz$ ponendo $dx ddx$. $hdz^2 d^3x - \frac{2}{m} hdx ddx^2 = dh dz^2 ddx$. Hanc æquationem comparo cum duabus primis, indeque reperio $\frac{2}{m} = 1$. & $\frac{2}{m} = 3$, hoc eſt $m = 2$, & $m = \frac{2}{3}$; adeoque loco $ddx^m : h^m dz^2 =$ conſt. invenio pro priore $ddx^2 : hhdz^2 =$ conſt., ſeu $ddx : hdz = - dy : a$, & pro poſteriore $\sqrt[3]{ddx^2 : dz^2}\sqrt[3]{hh} =$ conſt. ſeu $ddx^2 : hhdz^6 =$ conſt. ſeu $ddx : hdz^3 = - 1 : ady$ ([b]).

Ut jam porro reducantur hæ æquationes ad differentiales primi gradus, pono $adx = tdy$, unde fit $adz = dy\sqrt{(aa + tt)}$ & $addx = dydt$, qui valores ſubſtituti exhibent, loco prioris $ddx : hdz = - dy : a$, hanc $adt : \sqrt{(aa + tt)} = - hdy = - ahdx : t$, ſeu $tdt : \sqrt{(aa + tt)} = - hdx = - dp$, & $\sqrt{(aa + tt)} = b - p = adz : dy$. Hinc $(bb - 2bp + pp)dy^2 = aadz^2 = aadx^2 + aady^2$. & $dy = adx : \sqrt{(bb + 2bp + pp - aa)}$; loco poſterioris $ddx : hdz^3 = - 1 : ady$. hanc $a^3dt : (aa + tt)^{3:2} = - hdy = - ahdx : t$, ſeu $aatdt : (aa + tt)^{3:2} = - hdx = - dp$, & $aa : \sqrt{(aa + tt)} = p$, &c. ([c])

Pro

Eodem modo, in nona, $ddx : idy^3 =$ conſt.

In decima, dividendo per $idxdy^2ddx$, eſt $d^3x : ddx + 3dxddx : dy^2$ $[-3ddy : dy] - 2dz^2ddx : dxdy^2 - di : i = 0$, ſive, quia $dz^2 = dx^2 + dy^2$, $d^3x : ddx - ddy : dy - 2ddx : dx - di : i = 0$; proinde $ddx : idx^2dy =$ conſt.

([b]) Quia aſſumta conſtans a poteſt eſſe affirmativa vel negativa; nihil intereſt, utrum ponatur $ddx : hdz = dy : a$, vel $- dy : a$; item $ddx : hdz^3 = 1 : ady$ vel $- 1 : ady$.

([c]) Generalius eſt $aa : \sqrt{(aa + tt)} = b + p$, intelligendo per b quantitatem affirmativam vel negativam. Subſtituto valore ipſius $t = adx : dy$, habetur $ady : \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = b + p$, quæ reducta præbet $dy = (b + p)dx\sqrt{(aa - bb - 2bp - pp)}$ $=$ [in caſu $b = 0$] $pdx : \sqrt{(aa - pp)}$;

Pro tertia, pono $p^r ddx^m : h^m dz^2 =$ conſt. & reperitur $r = \frac{4}{3}$, & $m = \frac{2}{3}$; adeoque $\sqrt[3]{p^4 ddx^2} : dz^2 \sqrt[3]{hh}$ ſeu $ppdx : hdz^3 =$ conſt. $= \mp a : dy$ (d). No. CIII.

Pro quarta, pono $i^m dx^r ddx^n dz^s =$ conſt. & reperietur $m = -1$, $r = -2$, $n = 1$, $s = -1$, proinde $ddx : idx^2 dz =$ conſt. $= \pm 1 : ady$. (e).

Pro quinta, pono $q^l i^m dx^r ddx^n dz^s =$ conſt. & reperitur $l = 2$, $m = -1$, $r = -2$, $n = 1$, $s = -1$, proinde $qqddx : idx^2 dz$ $=$ conſt. $= \pm a : dy$ (f).

Similiter pro ſexta (g), fiet $ppddx : hdz =$ conſt. $= ady$.

Pro

pp); in caſu autem $b = -a$, erit $dy = (p-a)dx : \sqrt{(2ap - pp)}$, vel etiam, quia ſignum radicis poteſt negative accipi, $(a-p)dx : \sqrt{(2ap - pp)}$.

(d) Subſtituendo $dydt : a$ pro ddx, & $dy\sqrt{(aa+tt)} : a$ pro dz, loco æquationis $ppddx : hdz^3 = a : dy$, habetur $appdt : (aa+tt)^{3:2} = bdy = abdx : t$, ſeu $tdt : (aa+tt)^{3:2} = bdx : pp = dp : pp$, & integrando $-1 : \sqrt{(aa+tt)} = -1 : p + 1 : b$, ſeu $bbpp : (aa+tt) = bb - 2bp + pp$, vel, pro tt ejus valorem ſubſtituendo, $bbppdy^2 : (aady^2 + aadx^2) = bb - 2bp + pp$, unde oritur $dy = a(b-p)dx : \sqrt{(bbpp - aabb + 2aabp - aapp)} =$ [in caſu $b = \infty$] $adx : \sqrt{(pp - aa)}$, & $=$ [in caſu $b = a$] $(a-p)dx : \sqrt{(2ap - aa)}$ vel $(p-a)dx : \sqrt{(2ap - aa)}$.

(e) Subſtituendo $dydt : a$ pro ddx, & $tdy : a$ pro dx, loco æquationis $ddx : idx^2 dz = 1 : ady$ habetur $aadt : tt = idz = dq$, & integrando $b - aa : t = q$; ſubſtituto valore ipſius t, erit $b - q = ady : dx$, hoc eſt, $dy = (b-q)dx : a$, ſeu [ſi malimus dy comparare cum dz, ſubſtituto pro dx ejus valore $\sqrt{(dz^2 - dy^2)}$ & poſtmodum reducta æquatione] invenimus $(b-q)dz : \sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)} =$ [in caſu $b = 0$] $- qdz : \sqrt{(aa+qq)}$; ſcribendo autem a pro b & bb pro $aa+bb$, prodit altera Auctoris formula $dy = (a-q)dz : \sqrt{(bb - 2aq + qq)}$.

(f) Subſtituendo rurſus $dydt : a$ pro ddx, & $tdy : a$ pro dx, æquatio $qqddx : idx^2 dz = a : dy$ tranſit in hanc $dt : tt = idz : qq = dq : qq$, cujus integralis eſt $-1 : t = -1 : q + 1 : b$, hoc eſt, $-dy : adx = -1 : q + 1 : b$, ſeu $dy = a(b-q)dx : bq = adz : \sqrt{(aa+tt)} =$ [ob $t = bq : (b-q)$] $a(b-q)dz : \sqrt{(aabb - 2aabq + aaqq + bbqq)} =$ [in caſu $b = \infty$] $adz : \sqrt{(aa+qq)}$; ſcribendo autem $bb : a$ pro b, & $bb : \sqrt{(bb - aa)}$ pro a, prodit altera Auctoris formula $dy = \pm(aq - bb)dz : b\sqrt{(bb - 2aq + qq)}$.

(g) Æquatio ſexta $ppddx = abdydz$, ſcriptis $dydt : a$ pro ddx, & $dy\sqrt{(aa+tt)}$ pro adz, æquivalet iſti

No. CIII. Pro ſeptima, fit (h) $bdy^3 : ppddx =$ conſt. $= dz : a$.
Pro octava, fit (i) $bdy^3 : ddx =$ conſt. $= adz$.
Pro nona, fit (k) $idy^3 : ddx =$ conſt. $= adz$.
Pro decima, fit (l) $ddx : idx^2 dy =$ conſt. $= 1 : adz$. (m)

iſti $ppdt = abdy \sqrt{(aa + tt)} = aabdx\sqrt{(aa+tt)} : t = aadp \sqrt{(aa + tt)} : t$, ſeu $tdt : \sqrt{(aa + tt)} = aadp : pp$, cujus integralis eſt $\sqrt{(aa + tt)} = b - aa : p = adz : dy$; hinc $dy = apdz : (bp - aa)$, & $dy^2 = aappdz^2 : (bbpp - 2aabp + a^4) = (aappdx^2 + aappdy^2) : (bbpp - 2aabp + a^4)$; & reducendo $dy = apdx : \sqrt{(bbpp - aapp - 2aabp + a^4)}$.

(h) Ad reſolvendam æquationem ſeptimam & ſequentes, loco æquationis $adx = tdy$, debet aſſumi æquatio $adx = tdz$, unde fiet $dy = dx \sqrt{(aa - tt)} : t$, & $addx = dtdz$ qui valores in æquatione ſeptima $bdy^3 : ppddx = dz : a$ ſubſtituti dant $bdx^3 (aa - tt)^{3:2} : ppt^3 dtdz = dz : aa$, hoc eſt, $bdx : pp = dp : pp = t^3 dz^2 dt : aadx^2 (aa - tt)^{3:2} = tdt : (aa - tt)^{3:2}$, & integrando $1 : b - 1 : p = 1 : \sqrt{(aa - tt)} = dx : tdy = dz : ady$. Quadrando eſt $(pp - 2bp + bb) : bbpp = dz^2 : aady^2 = (dx^2 + dy^2) : aady^2$; unde oritur $dy = bpdx : \sqrt{(aapp - bbpp - 2aabp + aabb)} =$ [in caſu $b = \infty$] $pdx : \sqrt{(aa - pp)}$.

(i) Æquatio octava $bdy^3 : ddx = adz$, factis ſimilibus ſubſtitutionibus, tranſit in hanc $dp = aatdt : (aa - tt)^{3:2}$, cujus integralis eſt $b + p = aa : \sqrt{(aa - tt)} = aadx : tdy = adz : dy$, & quadrando $bb + 2bp + pp = aadz^2 : dy^2 = (aadx^2 + aady^2) : dy^2$; unde oritur $dy = adx : \sqrt{(pp + 2bp + bb - aa)} =$ [in caſu $b = 0$] $adx : \sqrt{(pp - aa)}$.

(k) Æquatio nona $idy^3 : ddx = adz$ tranſit in hanc $idx^3 . (aa - tt)^{3:2} : t^3 dt = dz^2$, ſeu $dq = a^3 dt : (aa - tt)^{3:2}$, cujus integralis eſt $b + q = at : \sqrt{(aa - tt)} = adx : dy$; unde $dy = adx : (b + q)$, ſeu quadrando $dy^2 = aadx^2 : (bb + 2bq + qq) = (aadz^2 - aady^2) : (bb + 2bq + qq)$; unde iterum prodit $dy = adz : \sqrt{(aa + bb + 2bq + qq)} =$ [in caſu $b = 0$] $adz : \sqrt{(aa + qq)}$.

(l) Æquatio ultima $ddx = idx^2 dy : adz$ mutatur in hanc $dtdz = ittdzdy : aa = ttdydq : aa = ttdqdx\sqrt{(aa - tt)} : aat = ttdqdz\sqrt{(aa - tt)} : a^3$, ſeu $dq = a^3 dt : tt \sqrt{(aa - tt)}$, cujus integralis eſt $q = b - a\sqrt{(aa - tt)} : t = b - ady : dx$; unde $dy = (b - q) dx : a$, ſeu quadrando $dy^2 = (b - q)^2 dx^2 : aa = (b - q)^2 dz^2 : aa - (b - q)^2 dy^2 : aa$; unde prodit $dy = (b - q) dz : \sqrt{(aa + bb - 2bq + qq)} =$ [in caſu $b = 0$] $- qdz : \sqrt{(aa + qq)}$.

(m) Liquet ex præcedentibus annotationibus, has æquationes, excepta prima, quarta, quinta & ſexta, ab Auctore non fuiſſe perfecte integratas. Monuit quidem in Solutione Problematis iſoperimetrici, cui hæ æquationes inſerviunt [No. XCIII, pag. 879] poſſe quantitates

p &

p & q augeri minuive quantitate quacunque constante, & hoc pacto solutiones reddi generalissimas: sed præcipitanter hoc dictum est, cum in quibusdam harum æquationum, ut in tertia, quinta, sexta & septima, non p aut q, sed $1 : p$ aut $1 : q$ possint augeri vel minui quantitate aliqua constante, ut ex præcedentibus integrationibus apparet.

Cæterum, sine assumtione novæ æquationis $adx = tdy$ aut $adx = tdz$, possunt hæ æquationes ad differentiales primi gradus reduci. Sit æquatio prima $ddx : bdz = -dy : a$, multiplicando per dx numeratorem & denominatorem prioris membri, habetur $-dy : a = dxddx : bdxdz =$ [ob $dzddz = dxddx$] $ddz : bdx = ddz : dp$, hoc est $-dydp : a = ddz$, & integrando $(b - p)\,dy : a = dz$.

Sit jam æquatio secunda $ddx : bdz^3 = -1 : ady = dxddx : bdxdz^3 = ddz : bdxdz^2 = ddz : dpdz^2$, seu $dp : ady = -ddz : dz^2$, & integrando $(b + p) : ady = 1 : dz$.

Æquatio tertia $a : dy = ppddx : bdz^3 = ppdxddx : bdxdz^3 = ppddz : bdxdz^2 = ppddz : dpdz^2$, seu $adp : ppdy = ddz : dz^2$, integrando $a : bdy - a : pdy = -1 : dz$.

Æquatio quarta $1 : ady = ddx : idx^2dz = ddx : dx^2dq$, seu $dq : ady = ddx : dx^2$, & integrando $(q - b) : ady = -1 : dx$. No. CIII.

Æquatio quinta $a : dy = qqddx : idx^3dz = qqddx : dx^3dq$ seu $adq : qqdy = ddx : dx^2$, & integrando $a : bdy - a : qdy = -1 : dx$.

Æquatio sexta $ady = ppddx : bdz = ppdxddx : bdxdz = ppddz : bdx = ppddz : dp$, seu $adydp : pp = ddz$, integrando $ady : b - ady : p = dz$.

Æquatio septima $dz : a = bdy^3 : ppddx = bdxdy^3 : ppdxddx =$ [ob $dxddx = -dyddy$] $-bdxdy^2 : ppddy$, seu $dzddy : ady^2 = -dp : pp$, & integrando $-dz : ady = 1 : p - 1 : b$.

Æquatio octava $adz = bdy^3 : ddx = bdxdy^3 : dxddx = -dpdy^2 : ddy$, seu $-adzddy : dy^2 = dp$, & integrando $adz : dy = p + b$.

Æquatio nona $adz = idy^3 : ddx = dqdy^3 : dzddx$, seu $dq = adz^2ddx : dy^3 = (ady^2ddx + adx^2ddx) : dy^3 =$ [ob $dxddx = -dyddy$] $(adyddx - adxddy) : dy^2$, & integrando $b + q = adx : dy$.

Æquatio decima $1 : adz = ddx : idx^2dy = dzddx : dqdx^2dy$, seu $dq = adz^2ddx : dx^2dy = (ady^2ddx + adx^2ddx) : dx^2dy = (adyddx - adxddy) : dx^2$, & integrando $q = b - ady : dx$.

F I N I S.

EMENDANDA IN TEXTU.

Pag. 17.	*lin.* 11.	*a c*	*lege*	*b c*
94.	11. & 12	*nb : m*	*l.*	*mb : n*
110.	23.	ſpeculationes	*l.*	ſpeculatione
172.	3 & 4.	mou-ment	*l.*	mouvement
182.	*In Tabella*	52.0 e a —	*l.*	52.0 e a +
281.	4.	BM	*l.*	BN
305.	*penult.*	RT.	*l.*	AT
323.	7.	preſſioni ,	*l.*	preſſionum
329.	§. III. *l.* 7.	CDAF	*l.*	HDAF
407.	*l.* 5. *a fine.*	Solis ex azim.	*l.*	Solis ex azimutho
433.	*ult.*	$2ry = yy.$	*l.*	$2ry + yy$
435.	15.	ANIGK.	*l.*	ANIGB
441.	20.	PB + BH	*l.*	PB + PH
455.	*l.* 13 *a fine.*	eſt a BB [1]	*l.*	eſt a AD [1]
467.	28.	GC × GH.	*l.*	GC × CH
475.	5.	conctatu	*l.*	contactu
476.	3.	allius	*l.*	alius
503.	*ult.*	axis	*l.*	axi
505.	17.	radius infinite ,	*l.*	radius circuli infinite
514.	8.	Fig. 2.	*l.*	Fig..1.
516.	*poſt lin. ult. addatur*	Vid. Nus. CIII. Art. XVI.		
579.	2.	umbiculo.	*l.*	umbilico.
601.	*antepen.*	efficit	*l.*	effecit
630.	12.	GBC, HBC, KBC,	*l.*	GBA, HBA, KBA
638.	30.	AEC.	*l.*	DEC
708.	7 *a fine.*	$= 3a^6x$	*l.*	$3a^5x$
945.	1.	[*Fig.* 1]	*l.*	[*Fig.* 2]
968.	4.	$\pm \frac{d}{t}$ —	*dele*	—
1025.	11.	$QC = x.$	*l.*	$QC = y$
1032.	2 & 3.	$\sqrt{\gamma}$ H K L,	*l.*	$\sqrt{\gamma}$ H K λ
	& ſimiliter in Notis Col. 1. *l.* 8, *Col.* 2. *l.* 3			
1038.	10.	A B P	*l.*	A P B
1065.	1.	$\sqrt{(aa = zz)}$	*l.*	$\sqrt{(aa - zz)}$
1102.	3 *a fine.*	BO [*x*]	*l.*	BG [*x*]
1105.	3.	$+ lx^{l-2}$	*l.*	$lx^{l-2}pu$
	14.	$+ lx^{l-1}$BV.*t*: *a*,	*l.*	$- lx^{l-1}$BV.*t*: *a*
1110.	5 *a fine.*	$xydt^2 : tt,$	*l.*	$xydt^2 : att$
	l. ult.	BH	*l.*	PH.

EMEN-

EMENDANDA IN NOTIS.

Pag.	Col.	lin.			
357.	2.	2.	respondit,	lege	respondet
483.	2.	12.	(dy^2+dy^2)	l.	(dx^2+dy^2)
493.	1.	7.	*d*H*a*	l.	*d*H*m*
494.	2.	7 & 8.	NB,	l.	HB
513.	1.	4 à fine.	BFH	l.	BFE
534.	1.	7.	BG : BC,	l.	BG : BL
—	–	4 a fine,	reflexum	l.	reflexus
556.	2.	4 a fine,	AD	l.	AB
579.	2.	7 a fine,	$dxdy$,	l.	$dxdy^2$
581.	2.	3 a fine,	Nossup	l.	Nos
581.	2.	3.	QY	l.	Q*y*
623.	2.	1.	RH	l.	KH
651.	1.	8 & 10 a fine,	M*m*	l.	N*m*
758.	2.	6.	CBDM,	l.	CBDH
771.	1.	21.	β, γ,	l.	β, κ,
788.	1.	8.	positione FB,	l.	positione datam FB
792.	2.	4 a fine,	dx	l.	ds.
793.	1.	4 a fine,	cludent	l.	cluderet
807.	2.	3.	AMQ	l.	AM*m*
876.	1.	1.	*ab*	l.	*ad*
		9.	*b*G*d*	l.	*b*GD
893.	1.	4 a fine;	CF	l.	HQ
939.	2.	4.	$3\int yyzdy$	l.	$-3\int yyzdy$
997.	1.	2.	= seu	l.	= o, seu
1005.	1.	3.	$= en$	l.	$= cn$
1007.	1.	4.	(fx^m+g),	l.	$(fx^m+g)^{l-1})$
1094.	1.	11.	qu	l.	q^u.

67

Fig. 2.

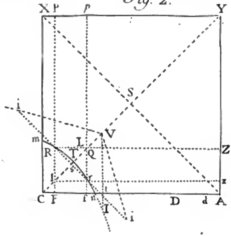


Fig. 4.

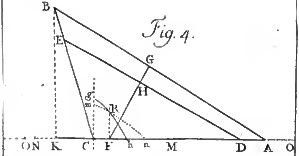


Fig. 6.

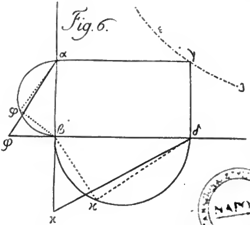


Fig. 8.

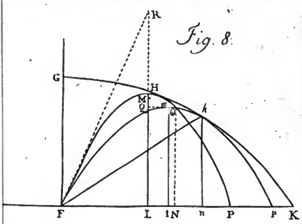
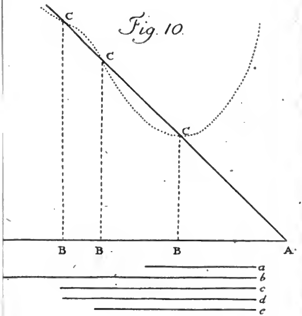


Fig. 10.



N°. 68 et 69.



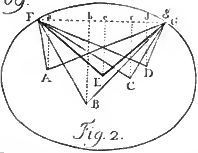
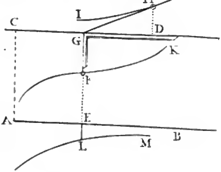


Fig. 2.

N°. 70.



4.

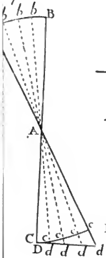


Fig. 3.

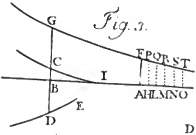
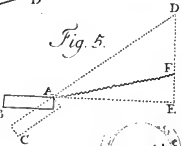
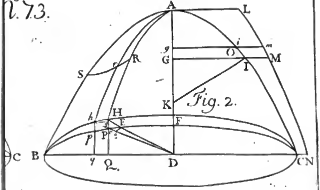
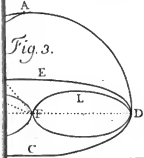


Fig. 5.

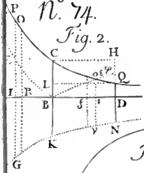


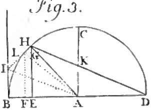
N°. 73.

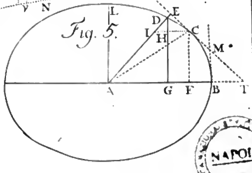

Fig. 2.
A
L
g
i
m
G
O
M
I
S
r
R
K
h
H
E
F
p
P
C
B
q
Q
D
CN

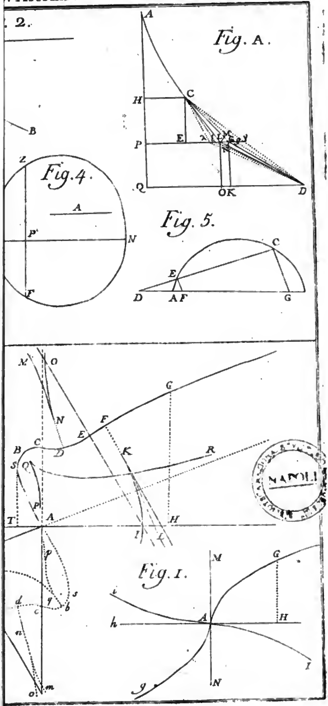

Fig. 3.
A
E
L
F
D
C

N°. 74.


Fig. 2.
P
O
C
H
L
Q
I
P
B
D
N
K
G


Fig. 3.
C
H
L
G
I
K
B
FE
A
D


Fig. 5.
L
E
D
I
H
C
M
A
G
F
B
T


. 2.
Fig. A.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. I.

n°. 78.

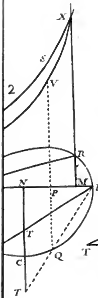


Fig. 3.

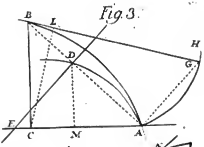
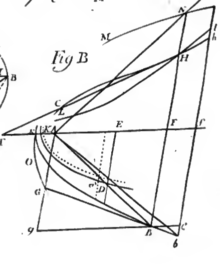
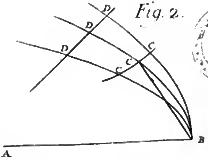


Fig B



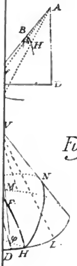
79.

Fig. 2.



N.° 80.

Fig. 2.



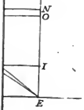


Fig. 3

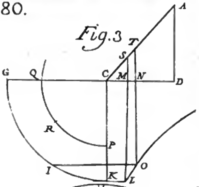


Fig. B.

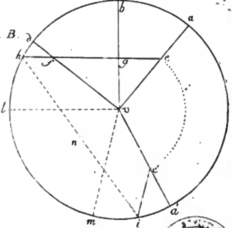
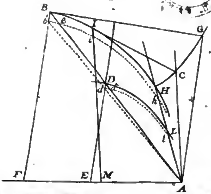
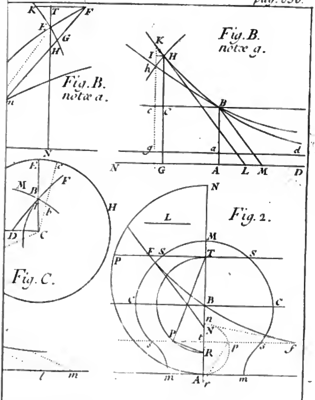
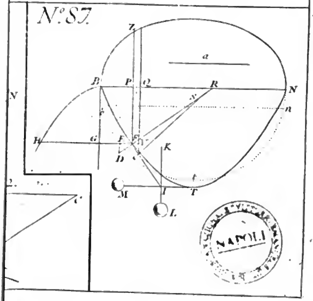
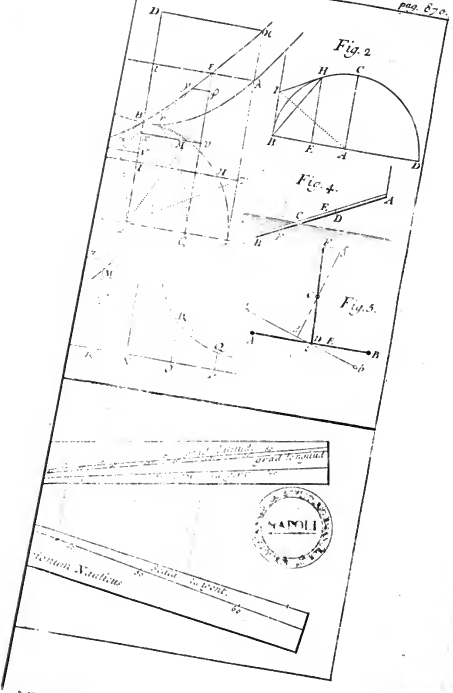


Fig. 5.




Fig. B.
notæ a.
Fig. B.
notæ g.
Fig. C.
Fig. 2.


N°. 87.


Fig. 2
Fig. 4.
Fig. 5.
grad. longitud.
Scala tangent.
ntionum Nauticus

N°. 93.

Fig. A.

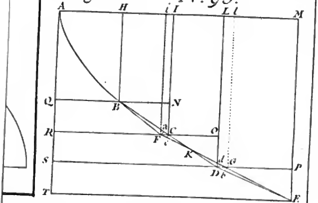


Fig. B.

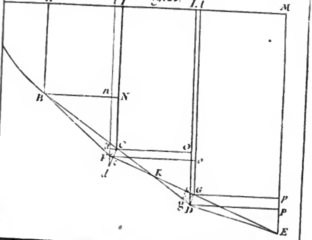
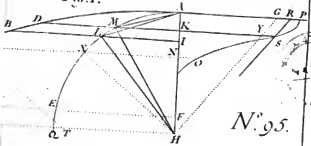


Fig. 1.



N°. 95.

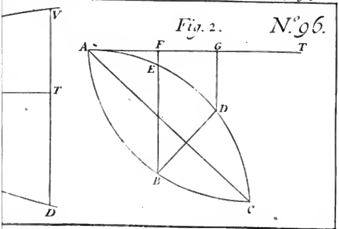
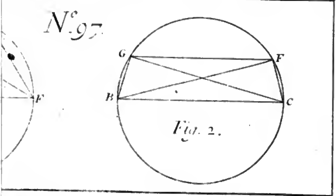
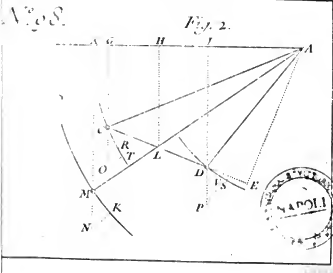


Fig. 2. N.° 96.

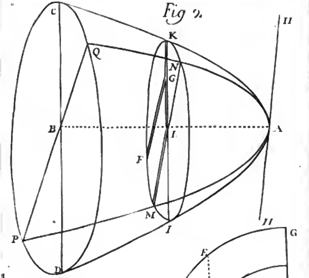


N.° 97. *Fig. 2.*



N.° 98. *Fig. 2.*

Fig 2.



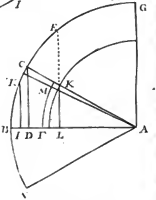
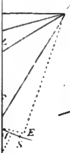
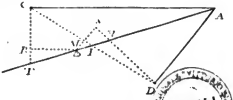


Fig 4

N.° 100.

Fig 2





N°. 101.

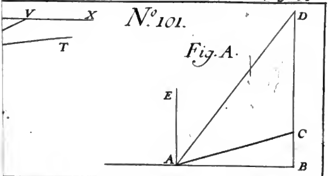


Fig. A.

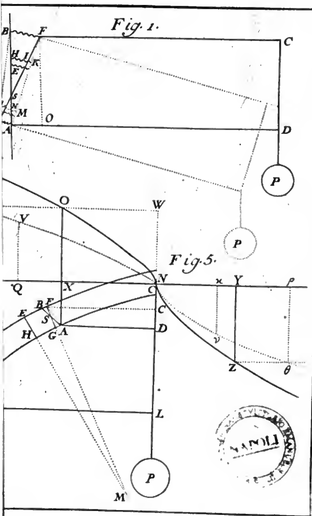
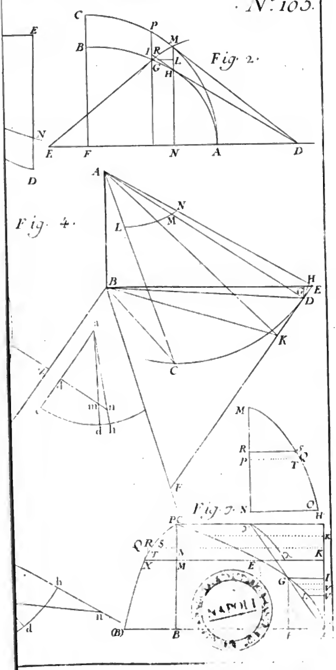


Fig. 1.

Fig. 5.

N°. 103.


Fig. 2.
C
P
M
B
I R
L
G H
E F N A D
E
N
D
A
N
Fig. 4.
L M
B
H
E
D
K
C
F
M
R
P
S
Q
T
O
N H
Fig. 7.
P C
Q R S
T
X M
E
K
K
G
I
(B) B
h
n
d
m n
d h

N°. 103.

Fig. 8.

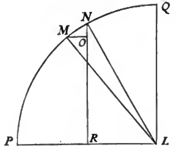


Fig. 10.

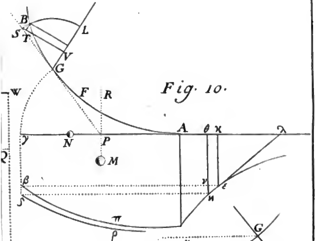


Fig. 10. 9

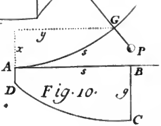
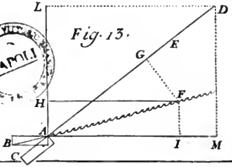


Fig. 13.



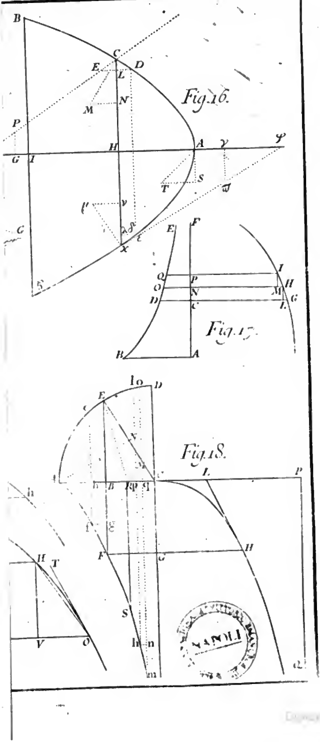
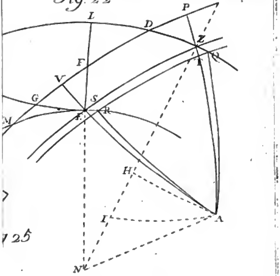


Fig. 16.

Fig. 17.

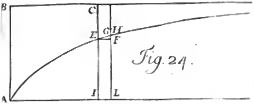
Fig. 18.

Fig. 22



25

Fig. 24.



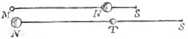
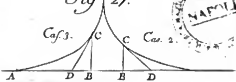
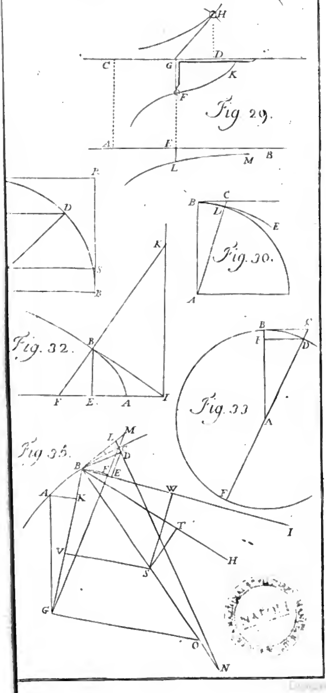


Fig 26.



Fig 27.




Fig. 29.
H
D
C
G
K
F
A
E
B
M
L
Fig. 30.
B
C
D
E
A
D
S
Fig. 32.
K
B
F
E
A
I
Fig. 33
B
C
F
D
A
E
Fig. 35.
M
L
D
B
E
A
K
W
T
I
V
S
H
G
O
N

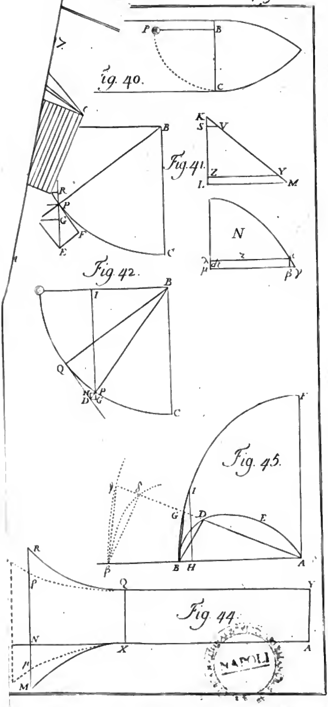

Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 45.
Fig. 44.
P
B
C
K
S
V
Z
Y
L
M
N
R
G
F
E
I
Q
H
D
A
X

Fig. 47.

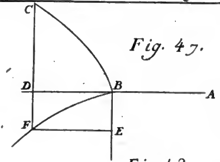
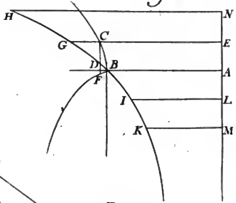


Fig. 48.



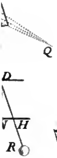
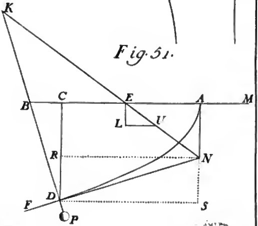


Fig. 51.



52.

